# حل امتحـــــان
## (( التفاضل والتكامل لطلاب الأزهر ))

**السـؤال الأول :**

**( ١ ) أوجد :**

**أولا :** $\int \frac{2س + 3}{\sqrt{س + 2}}$ د س  **ثانيا :** $\int$ جتاس $\left[$ جا س + ظا س $\right]$ د س

**الحـــــل**

**أولا :** $\int \frac{2س + 3}{\sqrt{س + 2}}$ د س $= \int \frac{2س + 4 - 1}{\sqrt{س + 2}}$

$= \int \frac{2(س + 2) - 1}{\sqrt{س + 2}}$ دس $= 2\int (س + 2)^{\frac{1}{2}} - (س + 2)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{4}{3}\sqrt{(س + 2)^3} - 2\sqrt{س + 2} + ث$

**ثانيا :** $\int$ جتاس $\left[$ جا س + ظا س $\right]$ د س

$= \int$ (جتاس حاس + حا س) د س

$= \int \frac{1}{2}$ حا ٢ س + حا س د س $= -\left(\frac{1}{4}\right)$ حتا ٢ س + حتا س ) + ث

---

**( ب ) أوجد القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للدالة**

ص = ٢ س$^3$ + ٣ س$^2$ – ٣٦ س – ١١ فى الفترة a –١ ، ٤ b

**الحـــــل**

A ص = ٢ س$^3$ + ٣ س$^2$ – ٣٦ س – ١١

B ص$'$ = ٦ س$^2$ + ٦ س – ٣٦

**إيجاد النقط الحرجة :**

٦ س$^2$ + ٦ س – ٣٦ = ٠  **بالقسمة على ٦**

B س$^2$ + س – ٦ = ٠  B ( س – ٣ )( س + ٢ ) = ٠

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

B س = ٣ ، س = – ٢

**بالتعويض فى معادلة المنحنى عن**

**س = ٣ ، س = – ٢ ، س = – ١ ، س = ٤**

**عندما س = ٢**

B ص = – ٣٨ ، ص = ٥٧ ، ص = ٢٦ ، ص = ٢١

**القيمة العظمى المطلقة ٥٧ ، الصغرى المطلقة – ٣٨**

---

**السـؤال الثانى :**

**( ١ ) تتحرك النقطة ( س ، ص ) على المنحنى س ص – س – ص = ٧ وفى لحظة ما كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن = ٢ ومعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن = – ١ . عين موضع النقطة فى هذه اللحظة .**

**الحـل**

A **س ص – س – ص = ٧ بالإشتقاق بالنسبة للزمن**

B $س \times \frac{د ص}{د ز} + ص \times \frac{د س}{د ز} - \frac{د س}{د ز} - \frac{د ص}{د ز} = ٠$

B $– س + ٢ ص – ٢ + ١ = ٠$ B $س = ٢ ص – ١$ ( ١ )

**بالتعويض من ( ١ ) فى معادلة المنحنى س ص – س – ص = ٧**

B $٢ ص^{٢} – ص – ٢ ص + ١ – ص = ٧$

B $٢ ص^{٢} – ٤ ص – ٦ = ٠$ B $ص^{٢} – ٢ ص – ٣ = ٠$

B $( ص – ٣ )( ص + ١ ) = ٠$

B **ص = ٣ ومنها س = ٥**

، **ص = – ١ ومنها س = – ٣** B **النقطة ( ٥ ، ٣ ) أ، ( – ٣ ، – ١ )**

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

(ب) ابحث اتصال الدالة د (س) = 
$$\begin{cases} \dfrac{س^{٢} + |س|}{س} & س \neq ٠ \\ ١ & س = ٠ \end{cases}$$

عند س = ٠

**الحـــــــــــــــــــل**

**بإعادة تعريف الدالـــــــــة**

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & ، \ س < ٠ \\ ١ & س = ٠ \\ س - ١ & ، \ س > ٠ \end{cases}$$

**لكي تكون الدالة متصلة لابد أن يكون**

$$د(٠^{+}) = د(٠^{-}) = د(٠)$$

A $د(٠^{+}) = ٠ + ١ = ١$ ، $د(٠^{-}) = ٠ - ١ = -١$

A $د(٠^{+}) \neq د(٠^{-})$ B الدالة غير متصلة عند س = ٠

---

**السـؤال الثالث :**

(أ) إذا كانت : س ص = حتاس فأثبت أن : $س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠$

**الحـــــــــــــــــــل**

A $س ص' = حتاس$ بالإشتقاق بالنسبة الى س

B $س ص' + ص = - حاس$ (١)

$س ص'' + ص' + ص' = - حتا س$ (٢)

B $س ص'' + ٢ ص' = - حتا س$

بإضافة س ص الى الطرفان :

B $س ص'' + ٢ ص' + س ص = - حتاس + حتاس = ٠$ ((لاحظ أن س ص = حتا س))

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

( ب ) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى ( س – ٣ ) والمستقيم ٣ س – ص + ١ = ٠ يمس هذا المنحنى . أوجد معادلة المنحنى .

**الحـــــــــــــــل**

A ص′ = س – ٣ (( ميل المماس عند أى نقطة عليه )) ، ميل المستقيم = ٣

B س – ٣ = ٣ B س = ٦

، A ] ص′ = س – ٣ B ص = $\frac{س^{٢}}{٢}$ – ٣ س + ث

بالتعويض فى معادلة المستقيم عن س = ٦

B ٣ × ٦ – ص + ١ = ٠ B ص = ١٩

والتعويض فى معادلة المنحنى بالنقطة ( ٦ ، ١٩ ) لانها تحققه

B ١٩ = ١٨ – ٣ × ٦ + ث B ث = ١٩

B معادلة المنحنى هى ٢ ص = س$^{٢}$ – ٦ س + ٣٨

---

**الســـــــــؤال الرابع :**

( أ ) أوجد معادلة العمودى على المنحنى س$^{٢}$ – س ص – ٦ = ٠ عند النقطة ( ٣ ، ١ ) الواقعة عليه .

**الحـــــــــــــــل**

A س$^{٢}$ – س ص – ٦ = ٠ بالإشتقاق بالنسبة الى س

B ٢ س – [ س ص′ + ص ] = ٠

B ٢ س – س ص′ – ص = ٠ B ص′ = $\frac{٢ س - ص}{س}$ (١)

بالتعويض بالنقطة (٣ ، ١) فى (١) لإيجاد الميل

B ص′ = $\frac{٥}{٣}$ B ميل العمودى = – $\frac{٣}{٥}$

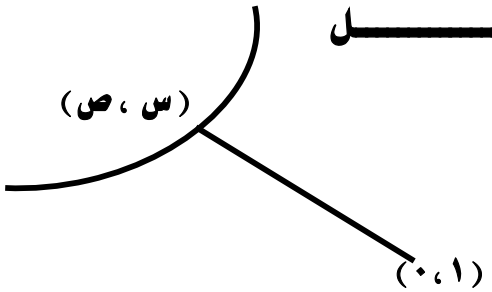
B معادلة العمودى هى $\frac{ص - ١}{س - ٣}$ = – $\frac{٣}{٥}$ B ٥ ص – ٥ = – ٣ س + ٩

٥ ص + ٣ س – ١٤ = ٠

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

( ب ) عين النقطة ( س ، ص ) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ والتى يكون بعدها ( ف ) عن النقطة ( ١ ، ٠ ) أصغر ما يمكن .

**الحـــــــــــــــل**




نفرض أن النقطة هى ( س ، ص )

والبعد بين النقطتين ف

B $ف^{٢}$ = $(س - ١)^{٢} + ص^{٢}$

B $ف^{٢}$ = $س^{٢} - ٢س + ١ + ص^{٢}$ ( ١ )

وبتربيع معادلة المنحنى :

B $ص^{٢}$ = س ( ٢ ) والتعويض فى ( ١ )

B $ف^{٢}$ = $س^{٢} - ٢س + ١ + س$

B $ف^{٢}$ = $س^{٢} - س + ١$ بالإشتقاق بالنسبة الى س

$٢ف \times \frac{د ف}{د س}$ = ٢س - ١

وعندما يكون البعد أصغر ما يمكن $\frac{د ف}{د س}$ = ٠

B س = $\frac{١}{٢}$ B النقطة هى $(\frac{١}{٢} ، \sqrt{\frac{١}{٢}})$

---

**الســـــــــؤال الخامس :**

( أ ) أثبت أن : $\int ٢ ظا^{٢} ٢س \, د س$ = ظا ٢س - ٢س + ث

**الحـــــــــــــــل**

الطرف الأيمن = $\int ٢ ظا^{٢} ٢س \, د س$ = $٢ \int (قا^{٢} ٢س - ١) \, د س$

= $٢ \left[ \frac{ظا ٢س}{٢} - س + ث \right]$

= ظا ٢س - ٢س + ث

---

( ب ) عين القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية وكذلك فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الإنقلاب - إن وجدت - لمنحنى الدالة د حيث

د ( س ) = س ( س - ٦ )$^{٢}$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

## الحـــــــــــــل

A د ( س ) = س ( س – ٦ )$^{٢}$ = س$^{٣}$ – ١٢ س$^{٢}$ + ٣٦ س

B ص$'$ = ٣ س$^{٢}$ – ٢٤ س + ٣٦

**النقط الحرجة :**

٣ س$^{٢}$ – ٢٤ س + ٣٦ = ٠ B س$^{٢}$ – ٨ س + ١٢ = ٠

( س – ٢ )( س – ٦ ) = ٠

س = ٢ ، س = ٦

B ص$''$ = ٦ س – ٢٤

عندما س = ٢ ⟵ B ص$''$ = – ١٢

B النقطة ( ٢ ، ٣٢ ) عظمى محلية

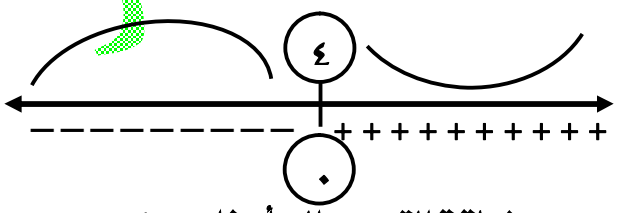
، عندما س = ٦ B ص$''$ = ١٢

B النقطة ( ٦ ، ٠ ) صغرى محلية

**فترات التحدب :**

عند س > ٤ B ص$''$ > ٠

، س < ٤ B ص$''$ < ٠




منطقة التحدب الى أعلى ] a ٤ ، ∞ – [ ، منطقة التحدب الى أسفل ] ٤ a ، ∞ [

( ٤ ، ١٦ ) نقطة انقلاب

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com