نظرى الفراغيـــــــــــة

(١) أى نقطتين مختلفتين س ، ص يمر بهما مستقيم وحيد وهو $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$
(٢) يمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحد مستوى واحد وواحد فقط
(٣) أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستويات
(٤) إذا اشترك مستقيم ومستوى فى نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى
(٥) أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات .
(٦) أى مستقيم فى الفراغ يمر به عدد لانهائى من المستويات

---

(٧) تعيين المســـــــــتوى

يتعين المستوى بالحالات الآتية :

(أ) بثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة
(ب) مستقيم ونقطة لا تنتمى اليه
(حـ) مستقيمين متوازيين (د) مستقيمين متقاطعين

---

(٨) إذا كان ل مستقيم ، سـ مستوى وكان سـ $\cap$ ل = $\emptyset$
فإن : ل // سـ
(٩) إذا اشترك مستويان مختلفين فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة

---

(١٠) الزاوية بين مستقيمين متخالفين

تعريف :

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هى الزاوية التى يصنعها أحدهما مع أي

مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الآخر .

(١٠) يتوازى المستقيمان ل ، م إذا كان :

(أ) يجمعهما مستوى واحد (ب) ل $\cap$ م = $\varnothing$

(١١) المستويان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

(١٢) إذا كان : س ، ص ، ع أبعاد متوازى المستطيلات فإن :

طول قطر متوازى المستطيلات = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}}$

(١٣) طول قطر المكعب الذى طول ضلعه ل

طول القطر = $\sqrt{3}$ ل ، مجموع أطوال الأقطار = ٤ $\sqrt{3}$ ل

(١٤) الهرم الثلاثى المنتظم :

هو هرم قائم جميع أوجهه الأربعة مثلثات متساويات الأضلاع ومتطابقة

(١٥) إذا وازى مستقيم مستوى فإنه يوازى جميع المستقيمات التى تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التى تحتوى ذلك المستقيم

(١٦) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما فى المستوى فإنه يوازى ذلك المستوى .

(١٧) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين

(١٨) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

(١٩) إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوى وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازيا لهذين المستقيمين .

(٢٠) إذا كان المستقيم عموديا على كل مستقيم فى مستوى كان هذا المستقيم عموديا على المستوى .

(٢١) إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازى خط تقاطعهما

(٢٢) إذا كان المستقيم عموديا على كل مستقيم فى مستوى كان هذا المستقيم عموديا على المستوى

(٢٣) إذا قطعت عدة مستويات متوازيه بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة .

(٢٤) إذا تقاطع مستقيمان فى مستوى وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين فى مستوى آخر كان مستوى المستقيمين الأولين موازيا لمستوى المستقيمين الآخرين .

(٢٥) المستقيم العمودى على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما .

(٢٦) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين مستويين معا وغير متوازيين فإنه يكون عمودى على مستويهما .

(٢٧)جميع الأعمدة المرسومة على مستقيم من نقطة عليه تقع فى مستوى واحد هو المستوى العمودى على هذا المستقيم .

(٢٨) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودى على مستقيم من نقطه عليه .

(٢٩) المستقيمان العمودان على مستوى واحد متوازيان .

(٣٠) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيان .

(٣١) المستقيم العمودى على أحد مستويين متوازيين يكون عمودى على الآخر .

الإسقاط العمــــــــودى

(٣٢) المسقط العمودى: لنقطة على مستوى معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة على المستوى .

(٣٣) الزاوية بين قطعه مستقيمة ومستوى :هى الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى وهى الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعه المستقيمة والمستوى.

(٣٤) إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان عموديا على مستقيم فى المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عمــــوديا المستقيم . ((نظرية ٤))

(٣٥) إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عموديا على ذلك المستقيم . ((عكس النظرية ٤))

(٣٦) الزاوية الزوجية : هى الزاوية المكونة من إتحاد نصفى مستويين وحدهما المشترك .

(٣٧) **الزاوية المستوية لزاوية زوجية :** هى الزاوية الناشئة من تقاطع الزاوية الزاوية الزوجية مع أى مستوى عمودى على حافتها ((وقياسها يساوى قياس الزاوية الزوجية))

(٣٨) جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية القياس .

(٣٩) إذا كان مستقيم عموديا على مستوى فكل مستوى يحوى هذا المستقيم يكون عموديا على ذلك المستوى .

(٤٠) إذا تعامد مستويان ورسم فى أحدهما مستقيم عمودى على خط التقاطع كان هذا المستقيم عموديا على المستوى الآخر .

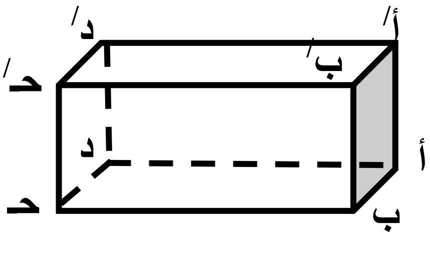
(٤١) إذا كان كل مستويين متقاطعين عموديا على مستوى ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عموديا على المستوى الثالث .

(٤٢) **الهرم القائم :** هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم ومركزه هو موقع العمود النازل من رأس الهرم على قاعدته وأوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

أمثـــــــــــــــــلة

(١) أ ب حـ د أ/ ب/ حـ/ د/ مكعب طول حــــرفه س ، أوجــد قيمة : $(ب د^{/})^{٢} : (ب د)^{٢}$

الحـــــــــــــــل



∵ ب د قطر فى المربع أ ب حـ د

∴ ب د = $\sqrt{٢}$ س وحدة طول

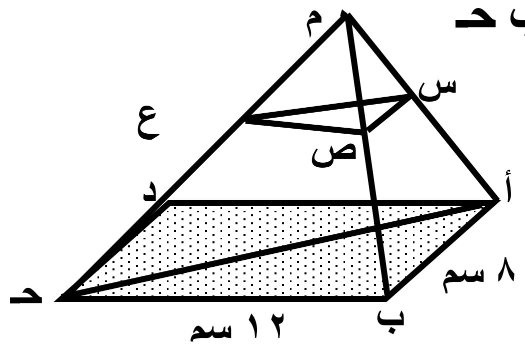
، ∵ ب د/ قطر فى المكعب

∴ ب د/ = $\sqrt{٣}$ س ∴ $(ب د^{/})^{٢} : (ب د)^{٢}$ = ٣ : ٢

أمثـــــــــــلة

(٢) أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، م نقطة خارج مستواه ورسمت $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ ثم أخذت نقطة س على $\overline{\text{م أ}}$ بحيث م س : س أ = ١ : ٣ ورسم من س مستوى يوازى المستوى أ ب حـ د ويقطع $\overline{\text{م ب}}$ فى ص ، $\overline{\text{م حـ}}$ فى ع ، أثبت أن : ∇ س ص ع يشابه ∇ أ ب حـ واحسب مساحة سطح المثلث س ص ع .

الحـــــــــــل



∵ المستوى س ص ع // المستوى أ ب حـ

، المستوى أ ب م قاطع لهما

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ بالمثل

$\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{م س}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ب}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ حـ}} = \frac{١}{٤}$

∴ ∇ س ص ع ≈ ∇ أ ب حـ

، ∵ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨

= ٤٨ سم^{٢}

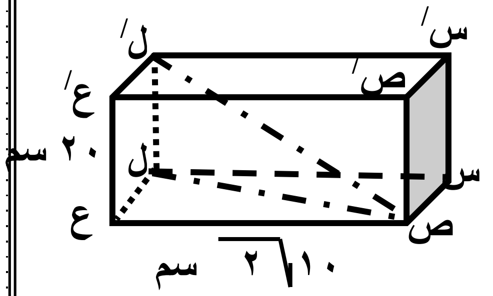
، ∵ $\frac{\text{مساحة المثلث س ص ع}}{\text{مساحة المثلث أ ب حـ}} = \frac{(\text{س ص})^{٢}}{(\text{أ ب})^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

∴ مساحة المثلث س ص ع = $\frac{٤٨}{١٦}$ = ٣ سم^{٢}

أمثـــــــــــلة

(٣) س ص ع ل س/ ص/ ع/ ل/ متوازى مستطيلات فيه
س ص = ص ع = ١٠ $\sqrt{٢}$ وارتفاعه ع ع/ = ٢٠ سم ، أثبت
أن : ل/ ص $\perp$ س ع ، ثم أوجد طول ل/ ص وقياس زاوية ميله
على القاعدة س ص ع ل .

الحــــــــــــل



∵ س ص = ص ع

∴ القاعدة س ص ع ل مربع

∴ القطران متعامدان

∴ $\overline{\text{س ع}}$ $\perp$ $\overline{\text{ص ل}}$ (١) ، ∵ ل ل/ $\perp$ المستوى

∴ $\overline{\text{ل ل/}}$ $\perp$ $\overline{\text{س ع}}$ (٢) ∴ من (١) ، (٢)

∴ $\overline{\text{س ع}}$ $\perp$ مستويهما ل ل/ ص ∴ $\overline{\text{ل/ ص}}$ $\perp$ $\overline{\text{س ع}}$ برهان (١)

∵ (ص ل)^2 = (ص ع)^2 + (ل ع)^2

= (١٠ $\sqrt{٢}$)^2 + (١٠ $\sqrt{٢}$)^2 = ٢٠٠ + ٢٠٠ = ٤٠٠

∴ ص ل = ٢٠ سم

، طول قطر متوازى المستطيلات = $\sqrt{(\text{س ل})^2 + (\text{ل ع})^2 + (\text{ل ل/})^2}$

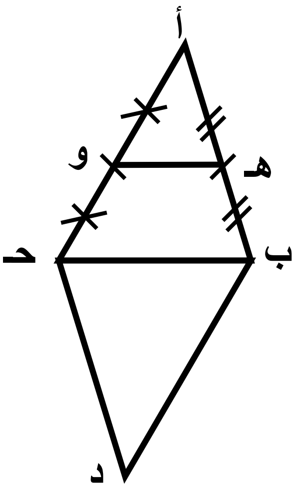
∴ ص ل/ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم ، ظا (ل/ ص ل) = $\frac{٢٠}{٢٠}$

∴ ق (< ل/ ص ل) = ٤٥°

أمثـــــــــــــلة

(٤) أ ب حـ ، د ب حـ مثلثان فى مستويان مختلفان ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازى المستوى د ب حـ .

الحـــــــــــــل



∵ هـ ، و منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ $\subset$ المستوى د ب حـ

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // المستوى د ب حـ

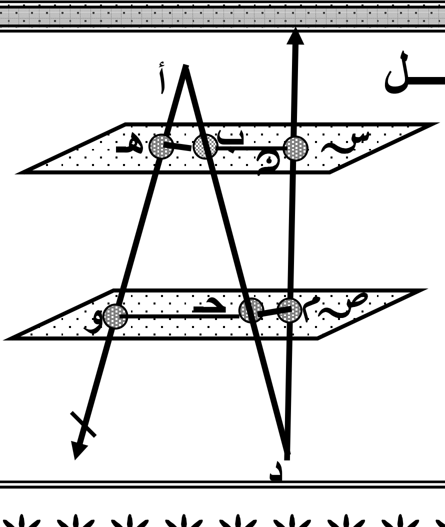
∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // المستوى د ب حـ

أمثـــــــــــــلة

(٥) س ، ص مستويان متوازيان قطعهما المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ فى ب ، حـ على الترتيب بحيث كان : أ ب : ب حـ : حـ د = ١ : ٢ : ٣ رسم $\overleftrightarrow{\text{أ هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د م ن}}$ يقطعان س فى هـ ، ن وتقطعان ص فى و ، م

أثبت أن : $\frac{\text{حـ و}}{\text{حـ م}} = ٥ \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب ن}}$

الحـــــــــــــل



∵ $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{أ و}}$ يكونان المستوى أ د و

ويقطع المستويان س ، ص المتوازيان

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{حـ و}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ و}} = \frac{١}{٣}$ (١)

وبالمثل

∵ $\overline{أد}$ ، $\overline{أ م}$ يكونان المستوى أ م د ،

ويقطع المستويان س ، ص المتوازيان

∴ $\overline{م حـ} // \overline{م ب}$ ∴ $\frac{م حـ}{م ب} = \frac{د حـ}{د ب} = \frac{د م}{د م} = \frac{٣}{٥}$ (٢)

من (١) ، (٢)

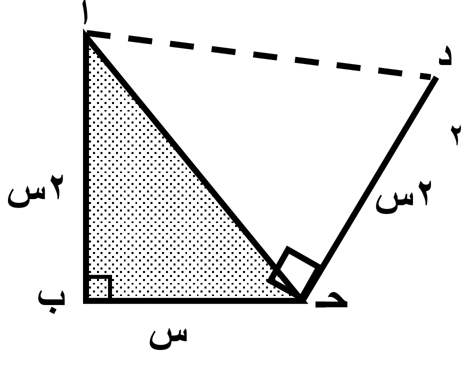
∴ $\frac{ب هـ}{حـ و} \times \frac{م حـ}{م ب} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٥}$

∴ $\frac{حـ و}{حـ م} = ٥ \times \frac{ب هـ}{ب م}$

أمثـــــــــــلة

(٦) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسم $\overline{حـ د}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب حـ فإذا كان : أ ب = حـ د = ٢ س ، ب حـ = س ، أثبت أن : أ د = ٣ س وأحسب قياس (ب ـ $\overleftrightarrow{د حـ}$ ـ أ)

الحـــــــــــل



∵ المثلث أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

∴ $(أ حـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢$

∴ أ حـ = س $\sqrt{٥}$

، ∵ $\overline{د حـ}$ ⊥ المستوى أ ب حـ

∴ د حـ عمودى على أي مستقيم فيه

∴ المثلث أ حـ د قائم فى حـ

$(أ د)^٢ = (د حـ)^٢ + (أ حـ)^٢ = (٢ س)^٢ + (س\sqrt{٥})^٢$

∴ $(أ د)^٢ = ٤ س^٢ + ٥ س^٢ = ٩ س^٢$

∴ أ د = ٣ س برهـــــــــان (١)

∵ $\overline{د حـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ حـ}$ ⊥ $\overline{حـ د}$ ∴ < أ حـ ب هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب ـ $\overleftrightarrow{د حـ}$ ـ أ)

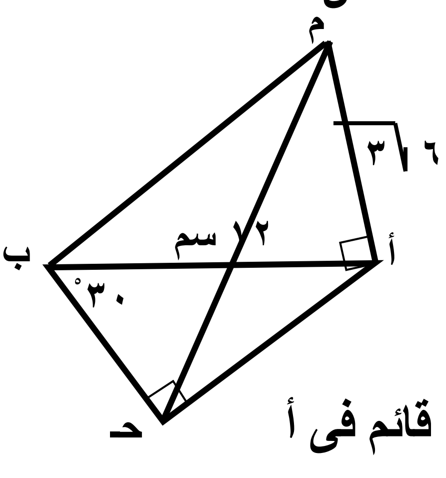
∴ ظـا (< أ حـ ب) = $\frac{٢\ س}{س}$ = ٢

∴ ق (< أ حـ ب) = ٢٦′ ٦٣°

أمثـــــــــــــــلة

(٧) م أ ب حـ هرم ثلاثى قاعدته المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ ، وقياس الزاوية ب = ٣٠° وطول أ ب = ١٢ سم ، فإذا كان $\overline{م أ}$ ⊥ مستوى القاعدة وكان طوله ٦ $\sqrt{٣}$ سم ، أوجد طول $\overline{م حـ}$ ، ثم أثبت أن : $\overline{ب حـ}$ عمودى على المستوى م أ حـ وأحسب مساحة سطح المثلث م ب حـ

الحـــــــــــل



∵ $\overline{أ م}$ ⊥ مستوى القاعدة

∴ $\overline{أ م}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

، ∵ $\overline{أ حـ}$ مقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ حـ = ٦ سم ، ∵ المثلث م أ حـ قائم فى أ

∴ $(م حـ)^٢ = (أ م)^٢ + (أ حـ)^٢ = (٦)^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢$

∴ م حـ = ١٢ سم برهـــــــان (١)

، ∵ $\overline{ب حـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب حـ}$ ⊥ $\overline{أ م}$ ∴ ب حـ ⊥ مستويهما

∴ $\overline{ب حـ}$ ⊥ المستوى م أ حـ

∴ المثلث م ب حـ قائم الزاوية

∵ مساحة المثلث م ب حـ $= \frac{١}{٢} \times$ حـ ب × م حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٦\sqrt{٣} \times ١٢ = ٣٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

اللهم لك الحمد كله ولك الشكر كله اللهم لك الحمد حتى ترضى

مســـــــــــــتر // محمد فـــــــــــواز

موبايل / ٠١١ ٩٩ ٠٥ ٣٦٩

ثانيا : الجــــــــبر

التبـــــاديل والتوافـــــــيق

(١) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-١} = {}^{ن}ل_{ر}$ ، $^{س}ق_{٥} = ١$ ، ن = ر + س
فما قيمة $\underline{|\,ن - ٣}$

الحـــــــــــل

∵ $^{ن}ق_{٥} = ١$ ∴ س = ٥

∵ $^{ن}ق_{ن-١} = {}^{ن}ل_{ر}$ ∴ $^{ن}ق_{١} = {}^{ن}ل_{ر}$ وذلك من قانون التبسيط

∴ $^{ن}ل_{١} = {}^{ن}ل_{ر}$ ∴ ر = ١ ، ∵ ن = ر + س

∴ ن = ١ + ٥ = ٦ ∴ $\underline{|\,ن - ٣}$ = $\underline{|\,٣}$ = ٦

---

(٢) إذا كان : $^{س}ل_{٣}$ = س × ص × ع ، حيث س > ص > ع
وكان : ٢ س + ص – ع = ٩ فأوجد
أولا : قيم س ، ص ، ع ثانيا : قيمة $^{س+ص}ق_{ع}$

الحـــــــــــــل

∵ $^{س}ل_{٣}$ = س × ص × ع

∴ ~~س~~ (س − ١)(س − ٢) = ~~س~~ × ص × ع

∴ ص = س − ١ ، ع = س − ٢

∵ ٢ س + ص − ع = ٩ ∴ ٢ س + س − ١ − س + ٢ = ٩

∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤ ، ص = ٣ ، ع = ٢

∴ $^{س+ص}ق_{ع}$ = $^{٧}ق_{٢}$ = $\frac{٧ \times ٦}{٢}$ = ٢١

---

(٣) إذا كان : $^{م}ل_{٣}$ = ١٣٢٠ ، $^{ن}ق_{٣}$ = ٥٦ أوجد قيمة

|م − ن

الحـــــــــــــل

∵ $^{م}ل_{٣}$ = ١٣٢٠ = ١٢ × ١١ × ١٠

∴ م = ١٢ ، $^{ن}ق_{٣}$ = ٥٦

ن (ن − ١)(ن − ٢) = ١٦٨ = ٨ × ٧ × ٦

∴ ∴ ن = ٨ ∴ |م − ن = |١٢ − ٨ = |٤ = ٢٤

(٤) إذا كان : ${}^{ن}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\lfloor ر + ١ = ٢٤$ أوجد قيمة ${}^{٢ن}ق_{ر - ١}$

الحـــــــــــــل

∵ ${}^{ن}ل_{٤} = ٣٦٠ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣$ ∴ $ن = ٦$

∵ $\lfloor ر + ١ = ٢٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ ∴ $ر = ٣$

∴ ${}^{٢ن}ق_{ر - ١} = {}^{١٢}ق_{٢} = \frac{١٢ \times ١١}{٢} = ٦٦$

---

(٥) إذا كان : ${}^{ن + ١}ل_{ر + ١} : {}^{ن + ١}ق_{ر + ١} = ٢٤$

${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن + ١}ق_{ر - ١} = ٥ : ٣$ فأوجد قيمة $\lfloor ن - ٢ر$

الحـــــــــــــل

∵ ${}^{ن + ١}ل_{ر + ١} : {}^{ن + ١}ق_{ر + ١} = ٢٤$

∴ ${}^{ن + ١}ل_{ر + ١} \div \frac{{}^{ن + ١}ل_{ر + ١}}{\lfloor ر + ١} = ٢٤$

∴ $\lfloor ر + ١ = ٢٤ = \lfloor ٤$ ∴ $ر = ٣$

الحـــــــــل

$\because \ \text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}+1} : \text{ق}_{\text{ر}-1}^{\text{ن}+1} = ٥ : ٣$

$\therefore \ \dfrac{\text{ن} + \cancel{1} - \text{ر} + \cancel{1}}{\text{ر}} = ٥ : ٣$

$\therefore \ \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + ٢}{\text{ر}} = \dfrac{٥}{٣}$

$\therefore \ \dfrac{\text{ن} - ١}{\cancel{٣}} = \dfrac{٥}{\cancel{٣}}$

$\therefore \ \text{ن} = ٦ \qquad \therefore \ \underline{\left|\text{ن} - ٢\text{ر}\right.} = \underline{\left|٦ - ٣\right.} = ١$

نظرية ذات الحدين ــ الأعداد المركبة

(١) إذا كانت : $\left(\text{س}^{٢} + \dfrac{١}{\text{س}} \right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية ،
إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس $= \dfrac{٢}{٣}$
فأوجد قيمة س الحقيقية .

الحـــــــــل

نفرض أن الحد الخالى من س هو الحد العام

$\therefore \ \text{ح}_{\text{ر}+1} = \text{ق}_{\text{ر}}^{٩} \left(\dfrac{١}{\text{س}} \right)^{\text{ر}} \times \left(\text{س}^{٢} \right)^{٩-\text{ر}}$

$= \text{س}^{-\text{ر}} \times \text{س}^{١٨ - ٢\text{ر}} = \text{س}^{١٨ - ٣\text{ر}}$

∴ $س^{18 - 3ر} = س^{0}$ ∴ $18 - 3ر = 0$

∴ $ر = 6$ ∴ **الحد الخالى من س هو الحد السابع**

∵ $\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الثانى بإشارته}}{\text{الأول بإشارته}}$

∴ $\frac{9 - 6 + 1}{6} \times س^{-1} \times س^{2} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{4}{6} \times س = \frac{2}{3}$ ∴ $س = 1$

---

(٢) إذا كانت : $(2س + \frac{1}{س})^{11}$

أوجد : (١) معامل $س^{5}$

(٢) قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين فى المفكوك متساويين

الحـــــــــــل

نفرض أن الحد المشتمل على $س^{5}$ هو الحد العام

∵ $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الحد الثانى)^{ر} × (الحد الأول)$^{ن-ر}$

$= {}^{11}ق_{ر} \left(\frac{1}{س}\right)^{ر} \times (2س)^{11-ر}$

∴ $س^{-ر} \times س^{11-ر} = س^{5}$

∴ $س^{11-2ر} = س^{5}$ ∴ $11 - 2ر = 5$ ∴ $ر = 3$

∴ الحد المشتمل على س^{٥} هو الحد الرابع

، ∵ $ح_٤ = {}^{١١}ق_٣ \left(\frac{١}{س}\right)^٣ \times (٢ س)^٨$

∴ المعامل = $\frac{١١ \times ١٠ \times ٩}{٦} \times ٢^٨ = ٤٢٢٤٠$

∵ الحدين الأوسطين هما $ح_٦$ ، $ح_٧$

∴ $^{١١}ق_٥ \left(\frac{١}{س}\right)^٥ \times (٢ س)^٦ = {}^{١١}ق_٦ \left(\frac{١}{س}\right)^٦ \times (٢ س)^٥$

$٢^٦ س = ٢^٥ \times س^{-١}$ ∴ $س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

(١) إذا كان العدد ع = $\frac{-٤}{١ - \sqrt{٣} ت}$ حيث ع ∋ ك ، أوجد الصورة المثلثية وكذلك الأسية لهذا العدد ثم اوجد قيمة ع^{٦} العدديه

الحـــــــــل

∵ ع = $\frac{-٤}{١ - \sqrt{٣} ت} \times \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ + \sqrt{٣} ت} = -(١ + \sqrt{٣} ت)$

، ∵ ل = $\sqrt{١ + ٣} = ٢$ ∴ طا هـ = $\left|\frac{-\sqrt{٣}}{-١}\right| = \sqrt{٣}$

∴ ق (< هـ) = ٦٠° ، (- ١ ، - $\sqrt{٣}$) تقع فى الربع الثالث

∴ $\theta = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠° = \frac{٢٤٠° \times ط}{١٨٠°} = \frac{٤}{٣}$ ط

الصورة المثلثية :

$ع = ل\,(\text{حتا}\,\theta + \text{حا}\,\theta)$

$\therefore\ ع^{م} = ل^{م}\,(\text{حتا}\,م\,\theta + \text{ت حا}\,م\,\theta)$

$\therefore\ ع = ٢\,(\text{حتا}\,\frac{٤}{٣}ط + \text{ت حا}\,\frac{٤}{٣}ط)$

الصورة الأسية هى : $ع = ٢\,هـ^{\frac{٤}{٣}ط\,ت}$

$ع^{٦} = ٢^{٦}\,(\text{حتا}\,\frac{٤}{٣} \times ٦\,ط + \text{ت حا}\,\frac{٤}{٣} \times ٦\,ط)$

$ع^{٦} = ٦٤$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(١) إذا كانت : ١، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن

$$\frac{٩ + ١١\,\omega + ١٣\,\omega^{٢}}{٣ + ٤\,\omega + ٥\,\omega^{٢}} = ٢$$

الحـــــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\cancel{٩} + \cancel{٩\,\omega} + ٢\,\omega + \cancel{٩\,\omega^{٢}} + ٤\,\omega^{٢}}{\cancel{٣} + \cancel{٣\,\omega} + \omega + \cancel{٣\,\omega^{٢}} + ٢\,\omega^{٢}}$$

$$= \frac{٢\,\omega + ٤\,\omega^{٢}}{\omega + ٢\,\omega^{٢}} = \frac{٢\,\cancel{(\omega + ٢\,\omega^{٢})}}{\cancel{\omega + ٢\,\omega^{٢}}} = ٢$$

(١) إذا كانت : ١، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left[\,(\text{أ}+١)\,\omega^{٢} + (\text{أ}-١)\,\omega + \text{أ}\,\right]^{٦}$$

الحـــــــــــــــل

$$\because \left[\,(\text{أ}+١)\,\omega^{٢} + (\text{أ}-١)\,\omega + \text{أ}\,\right]^{٦}$$

$$= \left[\,\cancel{\text{أ}}\,\omega^{٢} + \omega^{٢} + \cancel{\text{أ}}\,\omega - \omega + \cancel{\text{أ}}\,\right]^{٦}$$

$$= \left[\,\omega^{٢} - \omega\,\right]^{٦} = \left[\,(\omega^{٢} - \omega)^{٢}\,\right]^{٣} = (-٣)^{٣} = -٢٧$$

المحـــــــــــــــددات

(١) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س} & -\text{ص} & -\text{ع} \\ \text{ص} & ١ & ٠ \\ \text{ع}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{س} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٣}$$

اللهم لك الحمد كله ولك الشكر كله اللهم لك الحمد حتى ترضى

مســــــــــــــــتر // محمد فـــــــــــواز

موبايل / ٠١١ ٩٩ ٠٥ ٣٦٩

الحـــــــــل

بضرب $ع_2 \times (-ص)$ ، $ع_3 \times (-ع^2)$ وجمعهما على $ع_1$

$$= \begin{vmatrix} -ع & -ص & س + ص^{٢} + ع^{٣} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = س + ص^{٢} + ع^{٣}$$

---

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل (س – ١) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} ٢ & س - ٣ & ٢ \\ س - ٢ & ١ & ١ \\ س + ك & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

الحـــــــــل

بوضع س = ١ ∴ قيمة المحدد = ٠

، بجمع $ع_1 + ع_2$ ، $ع_2 + ع_3$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٠ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ك + ٢ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ \, (ك + ٢) = ٠$$

∴ ك = - ٢

اللهم لك الحمد كله ولك الشكر كله اللهم لك الحمد حتى ترضى

مســــــــــــــتر // محمد فـــــــــواز

موبايل / ٠١١ ٩٩ ٠٥ ٣٦٩