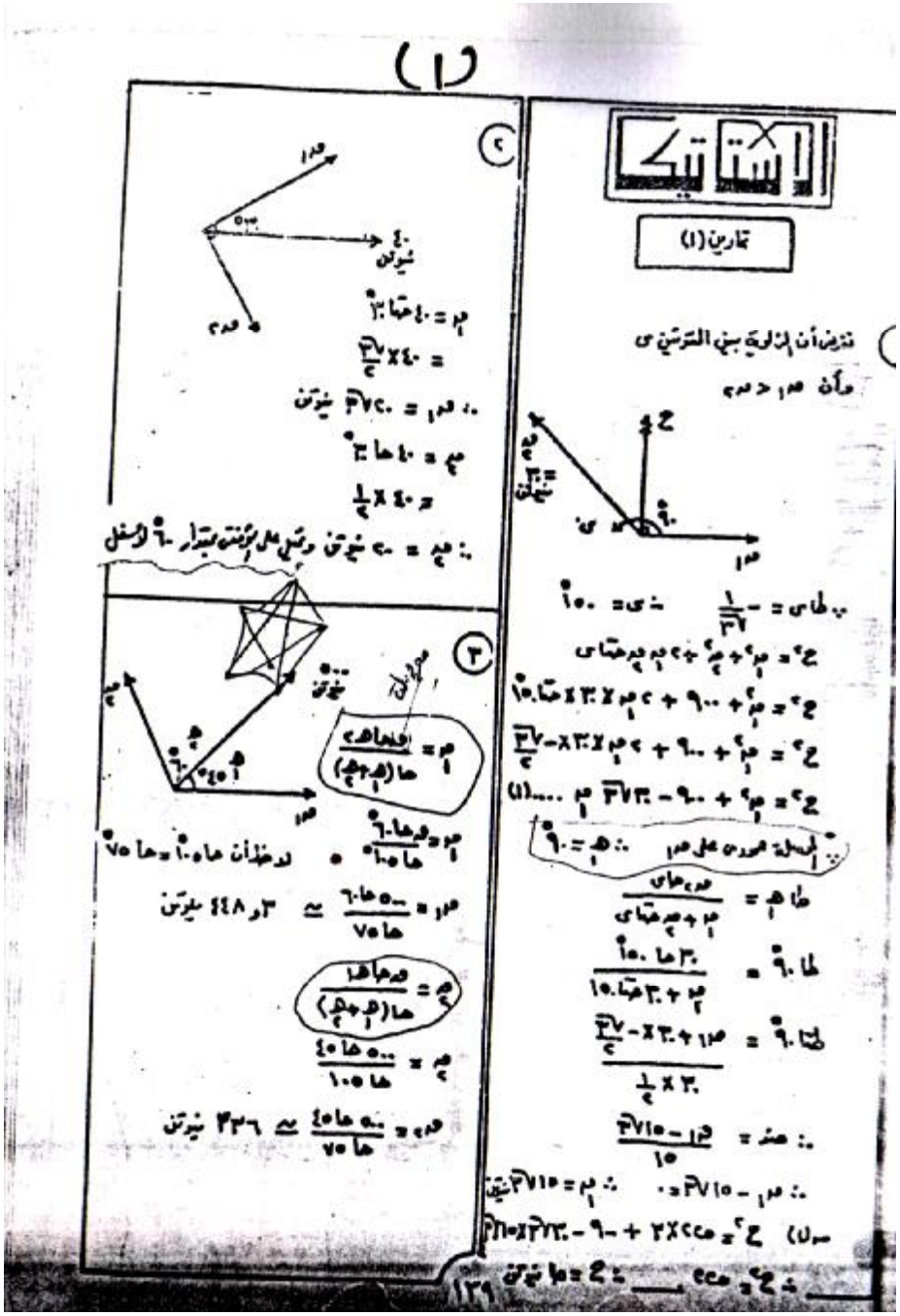
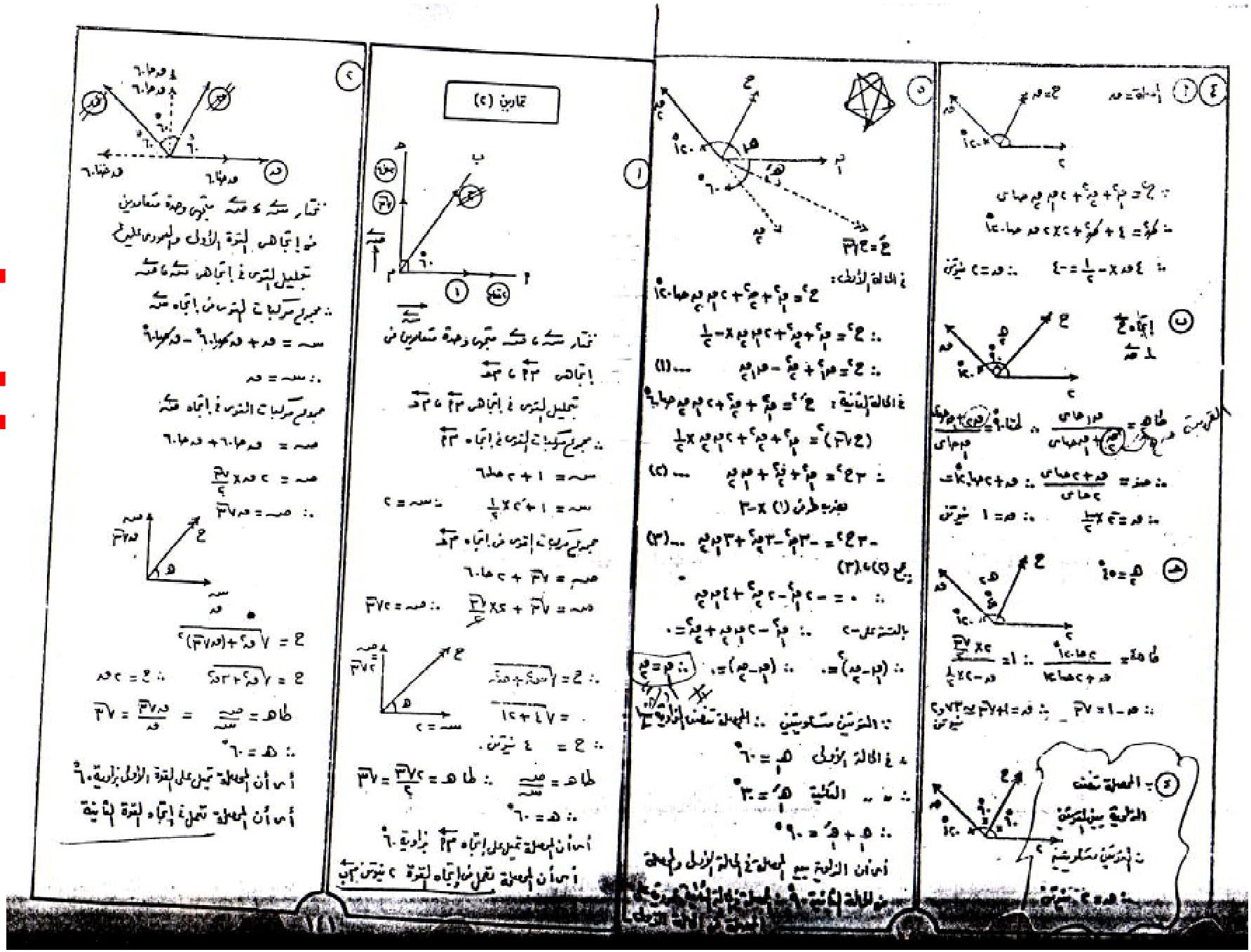


حلول تمارين الاستاتيكا

alyeldeen.com

alyeldeen.com
الموقع المتخصص فى رياضيات المرحلة الثانوية العامة



تمارين (٣)

(١)

(٢)

(٣)

(٤)

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية

alyeldeen.com
البوابة المتخصصة في رياضيات البكالوريا العالمية

٢

∴ الجسم يتزن تحت تأثير القوتين فقط

∴ محصلة أي قوتين منهما تساوي القوة الثالثة مقداراً وتضادها اتجاهاً.

∴ المطلوب إيجاد الزاوية بين القوتين ١٠، ١٢

∴ محصلة القوتين ١٠، ١٢ تساوي ٨

نفرض أن الزاوية بين القوتين ١٠، ١٢ هي ى

∴ ح٢ = ق١٢ + ق٢٢ + ٢ ق١ ق٢ جتا ى

(٨)٢ = (١٠)٢ + (١٢)٢ + ٢ × ١٠ × ١٢ جتا ى

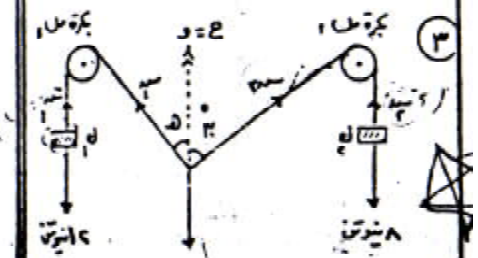
٦٤ = ١٠٠ + ١٤٤ + ٢٤٠ جتا ى

∴ ٢٤٠ جتا ى = ٦٤ − ٢٤٤ = − ١٨٠

∴ جتا ى = $\frac{-١٨٠}{٢٤٠}$ = − ٠,٧٥

∴ ى = ١٣٨° ٣٥′

٣



الكتلة ك تتزن تحت تأثير قوتين سم١، سم٢

∴ سم١ = ١٢ نيوتن

الكتلة ك تتزن تحت تأثير قوتين سم١، سم٢

∴ سم١ = ٨ نيوتن

لاحظ أنه عندما تكون البكرة ملساء وتتساوى الشدين فرضي الخيط الماران حول البكرة.

∴ الجسم يتزن تحت تأثير القوى الثلاث:

(i) الوزن و رأسي لأسفل.

(ii) الشد الخيط سم١ = ١٢ نيوتن

(iii) الشد الخيط سم٢ = ٨ نيوتن

بتطبيق قاعدة لامي

$\frac{\text{سم١}}{\text{جا ١٥٠}} = \frac{\text{سم٢}}{\text{جا (١٣٠ − ى)}} = \frac{\text{و}}{\text{جا (٣٠ + ى)}}$

$\frac{١٢}{\frac{١}{٢}} = \frac{٨}{\text{جتا ى}}$

∴ جتا ى = $\frac{٢}{٣}$

∴ ى = ٤٨° ١٩′

∴ ما ق = $\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ٤٨° ١٩′

$\frac{\text{و}}{\text{جا ١٥٠}} = \frac{\text{سم١}}{\text{جا (٣٠ + ى)}}$

$\frac{\text{و}}{\text{جا (٤٩° ٢٨′)}} = \frac{١٢}{\frac{١}{٢}}$

∴ و = $\frac{١٢ \text{ جا (٤٩° ٢٨′)}}{\frac{١}{٢}}$

∴ و = $\frac{١٢ \text{ جا}^{٢}(٤٩° ٢٨′)}{\frac{١}{٢}}$

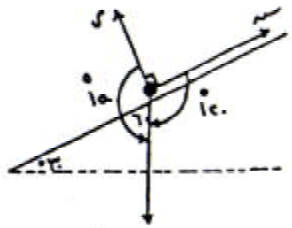
∴ و ≈ ١٨ نيوتن

الجواب غير موجود بالكتاب المقرر.

والإجابة المذكورة أمام رقم (٣) هي إجابة (٤)

٤

∴ المستوى أملس ∴ رد فعل المستوى عمودي عليه



الجسم يتزن تحت تأثير ثلاث قوى

(i) الوزن ٦٠ نيوتن رأسي لأسفل

(ii) سم ضد اتجاه خط أكبر ميل للمستوى

(iii) ⊥ المستوى

بتطبيق قاعدة لامي

∴ $\frac{\text{سم}}{\text{جا ١٥٠}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا ١٢٠}} = \frac{٦٠}{\text{جا ٩٠}}$

∴ $\frac{\text{سم}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦٠}{١}$

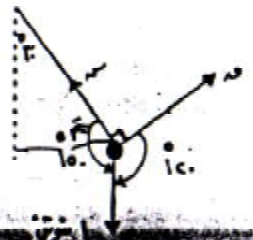
∴ سم = ٦٠ جا ٣٠ = ٦٠ × $\frac{١}{٢}$

∴ سم = ٣٠ نيوتن

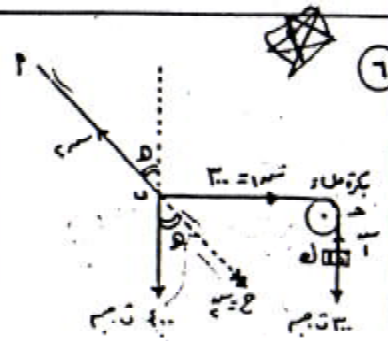
∴ ر = ٦٠ جتا ٣٠ = ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ر = ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٥



٦



الكتلة ك تتزن تحت تأثير القوتين ٣٠ ث.جم، سم٢

∴ سم٢ = ٣٠ ث.جم

∴ البكرة ملساء ∴ الشدان متساويان في الخيط ∴ الشد الخيط = سم١ = ٣٠ ث.جم

الجسم يتزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ محصلة أي قوتين = القوة الثالثة مقداراً وتضادها اتجاهاً.

∴ محصلة القوتين ٣٠، ٤٠ تساوي سم٢ وتضادها

الكرة تتزن تحت تأثير القوى:

(i) الوزن ١ نيوتن رأسي لأسفل

(ii) سم الشد الخيط

(iii) ر العمودي على اتجاه الخيط

بتطبيق قاعدة لامي

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جا ١٥٠}} = \frac{\text{سم}}{\text{جا ١٢٠}} = \frac{١}{\text{جا ٩٠}}$

∴ $\frac{\text{ر}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{سم}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{١}$

∴ ر = جا ٣٠ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ نيوتن

∴ سم = جا ٦٠ ∴ سم = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن

alyeldeen.com
الموقع التخصصي في رياضيات الثانوية العامة

نفرض أن الخط أب يميل على الرأسي بزاوية

∴ محصلة القوتين ٣٠٠ ، ٤٠٠ تميل على اتجاه القوة ٤٠٠ بزاوية هـ

∴ ظا هـ = ٣٠٠ / ٤٠٠ (المقابل / المجاور) لأن القوتين متعامدتين

∴ ظا هـ = ٣ / ٤

∴ الخيط أب يصنع مع الرأسي زاوية ظلها ٣/٤

∵ ح² = ق₁² + ق₂²

∴ ش² = (٣٠٠)² + (٤٠٠)²

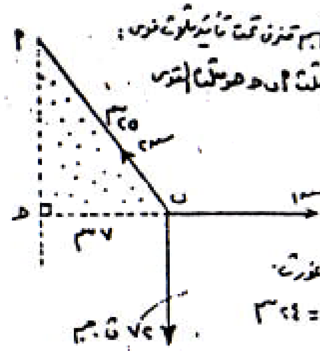
∴ ش² = ٩٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠٠

∴ ش² = ٢٥٠٠٠٠ ∴ ش = ٥٠٠ ث جم

أي أن الشد في الخيط أب = ٥٠٠ ث جم

(٧) الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى :

المثلث أ ب هـ مثلث القوى



من فيثاغورث :

أ هـ = ٢٤ سم

∴ ش١ / ٧ = ش٢ / ٢٥ = ٧٢ / أ هـ

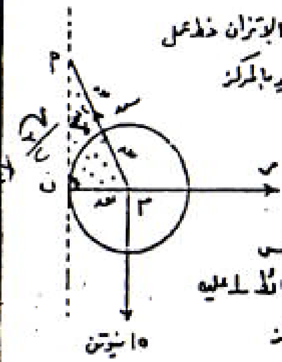
∴ ش١ / ٧ = ش٢ / ٢٥ = ٧٢ / ٢٤

∴ ش١ = (٧٢ × ٧) / ٢٤ = ٢١ ث جم

∴ ش٢ = (٧٢ × ٢٥) / ٢٤ = ٧٥ ث جم

تمارين (٤)

(١) في حالة الاتزان خط عمل الشد يمر بالمركز



∵ الحائط أملس

∴ رد فعل الحائط ⊥ عليه

أي يمر بالمركز

الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث :

(i) الوزن ١٥ نيوتن رأسياً لأسفل

(ii) الشد ش من الخيط أ م

(iii) ر رد فعل الحائط عمودي عليه

△ م أ ب هو مثلث القوى

∴ ١٥ / ب أ = ر / ب م = ش / أ م

ولكن أ م = ٢ نق ، م ب = نق

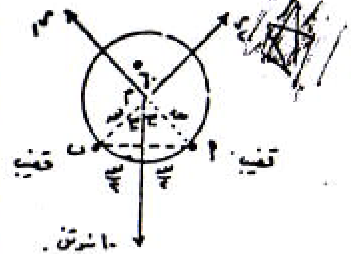
من فيثاغورث أ ب = ٣√ نق

∴ ١٥ / (٣√ نق) = ر / نق = ش / ٢ نق

∴ ش = ٢ × ١٥/٣√ × ٣√/٣√ = ٣√١٠ نيوتن

ر = ١ × ١٥/٣√ × ٣√/٣√ = ٣√٥ نيوتن .

(٢)



∵ المثلث أ ب مع خط أفقي وخط الوزن رأسي ∴ متعامدات .

∵ م أ = م ب = نق ∴ △ م أ ب متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ أ م ب) = ٦٠° ، خط الوزن ينصفها

رد فعل كل من القضيبين على الكرة يمر بمركزها

الكرة متزنة تحت تأثير القوى

الوزن ١٠ نيوتن رأسي لأسفل .

ر١ رد فعل القضيب أ

ر٢ " " " ب

بتطبيق قاعدة لامي

١٠ / جا ٦٠ = ر٢ / جا ١٥٠ = ر١ / جا ١٥٠

∴ ١٠ / جا ٦٠ = ر٢ / جا ٣٠ = ر١ / جا ٣٠

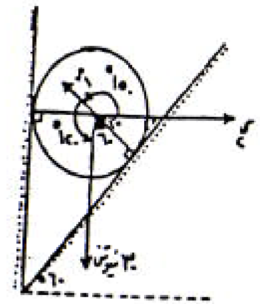
∴ ر١ = ر٢ = (١٠ جا ٣٠) / جا ٦٠ = (١٠ × ١/٢) / (٣√/٢)

= ١٠/٣√ × ٣√/٣√

∴ ر١ = ر٢ = ١٠/٣ ٣√

∴ الضغط على القضيب = ١٠/٣ ٣√ نيوتن

(٣)



∵ المستويين أملسين ∴ رد فعل كل منهما على الكرة عمودي عليه أي يمر بالمركز

الكرة متزنة تحت تأثير القوى

الوزن ٣٠ نيوتن رأسي لأسفل

ر١ ⊥ المستوى المائل .

ر٢ ⊥ المستوى الرأسي

بتطبيق قاعدة لامي

٣٠ / جا ١٥٠ = ر٢ / جا ١٢٠ = ر١ / جا ٩٠

∴ ٣٠ / جا ٣٠ = ر٢ / جا ٦٠ = ر١ / ١

∴ ر١ = ٣٠ / (١/٢) = ٦٠ نيوتن

∴ ض١ = ٦٠ نيوتن عمودي على المستوى المائل

ر٢ = ٣٠/(١/٢) × ٣√/٢ = ٣√٣٠

∴ ض٢ = ٣√٣٠ نيوتن عمودي على المستوى الرأسي

تمارين (٤)

(١) من حالة الاتزان خط عمل الثقل يمر بالمركز

∴ الخط الأفقي ⊥ عليه

∴ رد فعل الحائط ⊥ عليه

أي يمر بالمركز

الكرة متزنة تحت تأثير القوى المستوية:

(i) الوزن ١٥ نيوتن رأسي لأسفل

(ii) التوسعة من النقطة م

(iii) رد فعل الحائط عمودي عليه

∴ ق ق = ق ق = ق ق

∴ ق = ١٥ × ٣/٤ = ١١ نيوتن

ق = ١٥ × ٣/٤ = ٩ نيوتن

(٢) ∵ النقطة أ على خط أفقي

وخط الوتر رأسي ∴ هما متعامدان

∴ أب = ٥ سم ، ق(∠أ ب ج) = ٦٠°

∴ ق(∠ب أ ج) = ٣٠° ∴ خط الوتر يصنع

رد فعل كل وتر يتعين على الكرة يمر بمركزها

الكرة متزنة تحت تأثير القوى

الوزن ١٠ نيوتن رأسي لأسفل

ق ، ق عمودي على الحائط

ق ، ق ∠ ب

بتطبيق قاعدة لامي

ق / جا ١٥٠ = ق / جا ١٥٠ = ١٠ / جا ٦٠

∴ ق / جا ١٥٠ = ق / جا ٦٠

∴ ق / جا ١٥٠ = ١٠ / جا ٦٠

∴ ق = ١٠ جا ١٥٠ / جا ٦٠ = ١٠ × ١/٢ / √٣/٢

= ١٠ × ١/٢ × ٢/√٣

∴ ق = ١٠/√٣ = ٥√٣ نيوتن

∴ الضغط على الحائط = ٥√٣ نيوتن

(٣) ∵ الوتران متعامدان

∴ رد فعل كل منهما على الكرة

عمودي عليه أي يمر بالمركز

الكرة متزنة تحت تأثير القوى

الوزن ٣٠ نيوتن رأسي لأسفل

ق ⊥ الوتر المائل

ق ⊥ الوتر الرأسي

بتطبيق قاعدة لامي

ق / جا ١٥٠ = ق / جا ١٢٠ = ٣٠ / جا ٩٠

∴ ق / جا ١٥٠ = ق / جا ١٢٠ = ٣٠ / جا ٩٠

∴ ق / ١/٢ = ق / √٣/٢ = ٣٠ / ١

∴ ق = ٣٠ × ١/٢ = ١٥ نيوتن

∴ ق = ٣٠ × √٣/٢ = ١٥√٣ نيوتن

∴ ق = ١٥ نيوتن عمودي على الوتر المائل

ق = ١٥√٣ نيوتن عمودي على الوتر الرأسي

(٧) الجسم متزن تحت تأثير قوى:

الثقل ١٠ هـ عمودي الوتر

ق(∠ب أ ج) = ٣٧°

ق(∠ب ج أ) = ٥٣°

سم ، سم عموديتان

أ هـ = ٢٤ سم ، ٧٥ جم

∴ ١٣ / ٢٤ = سم / ٢٥ = سم / ٧

∴ سم = ٢٥ × ١٣ / ٢٤ = ١٣ × ٧٢ / ٢٤

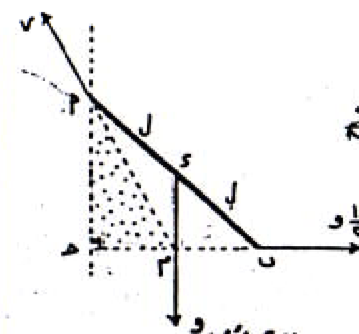
∴ ١٣ = ٧٢ × ٧٢ / ٢٤ = ٢١ جم

∴ سم = ٢٥ × ٧٢ / ٢٤ = ٧٥ جم

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات الثانوية العامة

alyeldeen.com
الموقع المتخصص فى رياضيات الثانوية العامة

(٤) نفرض أن طول القضيب = ٢ل



القضيب متزن تحت تأثير القوى :

(i) الوزن و رأسياً لأسفل ويؤثر فى منتصفه ء (أ ب منتظمة)

(ii) القوة الأفقية $\frac{1}{2}$ و وتتلاقيان فى نقطة م

∴ القوة الثالثة تمر بالنقطة م

(iii) ر رد الفعل عند الطرف أ فى اتجاه $\overleftarrow{أم}$

Δ م أ هـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ر}{أم} = \frac{\frac{1}{2}و}{م هـ} = \frac{و}{أ هـ}$

$\therefore \frac{و}{أ هـ} = \frac{\frac{1}{2}و}{م هـ}$ ∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ أ هـ

ولكن م منتصف ب هـ

∴ ب هـ = أ هـ ، ∴ أ ب هـ قائم الزاوية

∴ ق(ب أ هـ) = ٤٥°

أى أن أ ب يميل على الرأسى بزاوية ٤٥° (وضع التوازن)

فى Δ م أ هـ : $(أم)^2 = (أ هـ)^2 + (م هـ)^2$

$= (أ هـ)^2 + (\frac{1}{2} أ هـ)^2$

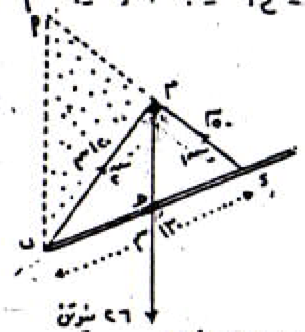
∴ أم = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ أ هـ

$\therefore \frac{ر}{أم} = \frac{و}{أ هـ}$

$\therefore \frac{ر}{\frac{\sqrt{5}}{2} أ هـ} = \frac{و}{أ هـ}$

∴ ر = $\frac{\sqrt{5}}{2}$ و

(٥) يعمم التمرين بالكتاب إلى قضيب منتظم



القضيب متزن تحت تأثير القوى :

$ش_1$ ، $ش_2$ وتتلاقيان فى م

∴ خط عمل الوزن لابد أن يمر بالنقطة م
والوزن ٢٦ نيوتن رأسى لأسفل ويمر بالنقطة م
أى أن الوضع الذى يكون فيه القضيب متزن
أنه يمر خط عمل الوزن بمنتصف القضيب

فى Δ م ء ب : ∵ م ء = ٥٠ سم ، ب م = ١٢٠ سم
، ء ب = ١٣٠ سم ⟸ ق(ء م ب) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ء ب ∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ الوتر ء ب

∴ م هـ = ٦٥ سم

فى Δ أ ء ب ∵ م هـ // أ ب ، هـ منتصف ء ب

∴ م منتصف أ ء ، ∴ أ م = ٥٠ سم

∴ أ ب = ١٢٠ سم ، ∴ أ ء = ١٠٠ سم

Δ م أ ب هو مثلث القوى

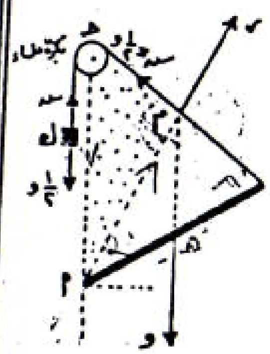
$\therefore \frac{ش_1}{أم} = \frac{ش_2}{م ب} = \frac{٢٦}{أ ب}$

$\therefore \frac{ش_1}{٥٠} = \frac{ش_2}{١٢٠} = \frac{٢٦}{١٣٠}$

∴ $ش_1 = \frac{٢٦ \times ٥٠}{١٣٠}$ = ١٠ نيوتن .

$ش_2 = \frac{٢٦ \times ١٢٠}{١٣٠}$ = ٢٤ نيوتن .

(٦)



الكتلة ل متزنة تحت تأثير الشد ش ، $\frac{1}{2}$ و

∴ ش = $\frac{1}{2}$ و

∵ البكرة ملساء ∴ الشد متساوٍ فى فرعى الخيط

∴ الشد فى الخيط م ب = ش

القضيب متزن تحت تأثير القوى :

(i) الوزن و رأسياً لأسفل ويؤثر فى منتصفه هـ

(ii) ش الشد فى الخيط ب ح ويساوى $\frac{1}{2}$ و
وتتلاقيان فى م

(iii) رد فعل المفصل عند أ ولابد أنه يمر بالنقطة
م أى ر فى الاتجاه $\overrightarrow{أم}$

المثلث م أ ح هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ر}{أم} = \frac{\frac{1}{2}و}{م ح} = \frac{و}{أ ح}$

$\therefore \frac{\frac{1}{2}و}{م ح} = \frac{و}{أ ح}$

∴ م ح = $\frac{1}{2}$ أ ح ... (١)

فى Δ أ ب ح ∵ هـ منتصف أ ب ، هـ م // أ ح

∴ م منتصف ب ح

∴ م ح = $\frac{1}{2}$ ب ح ... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ أ ح = ب ح

ولكن أ ح = أ ب (من التمرين)

∴ أ ب = ب ح = أ ح

∴ Δ أ ب ح متساوى الأضلاع ∴ ق(ب أ ح) = ٦٠°

∴ القضيب يميل على الأفقى فى وضع التوازن بزاوية ٣٠°

فى Δ م أ ح أم ⊥ م ح

$\therefore (أم)^2 = (أ ح)^2 - (م ح)^2$

$= (أ ح)^2 - (\frac{1}{2} أ ح)^2$

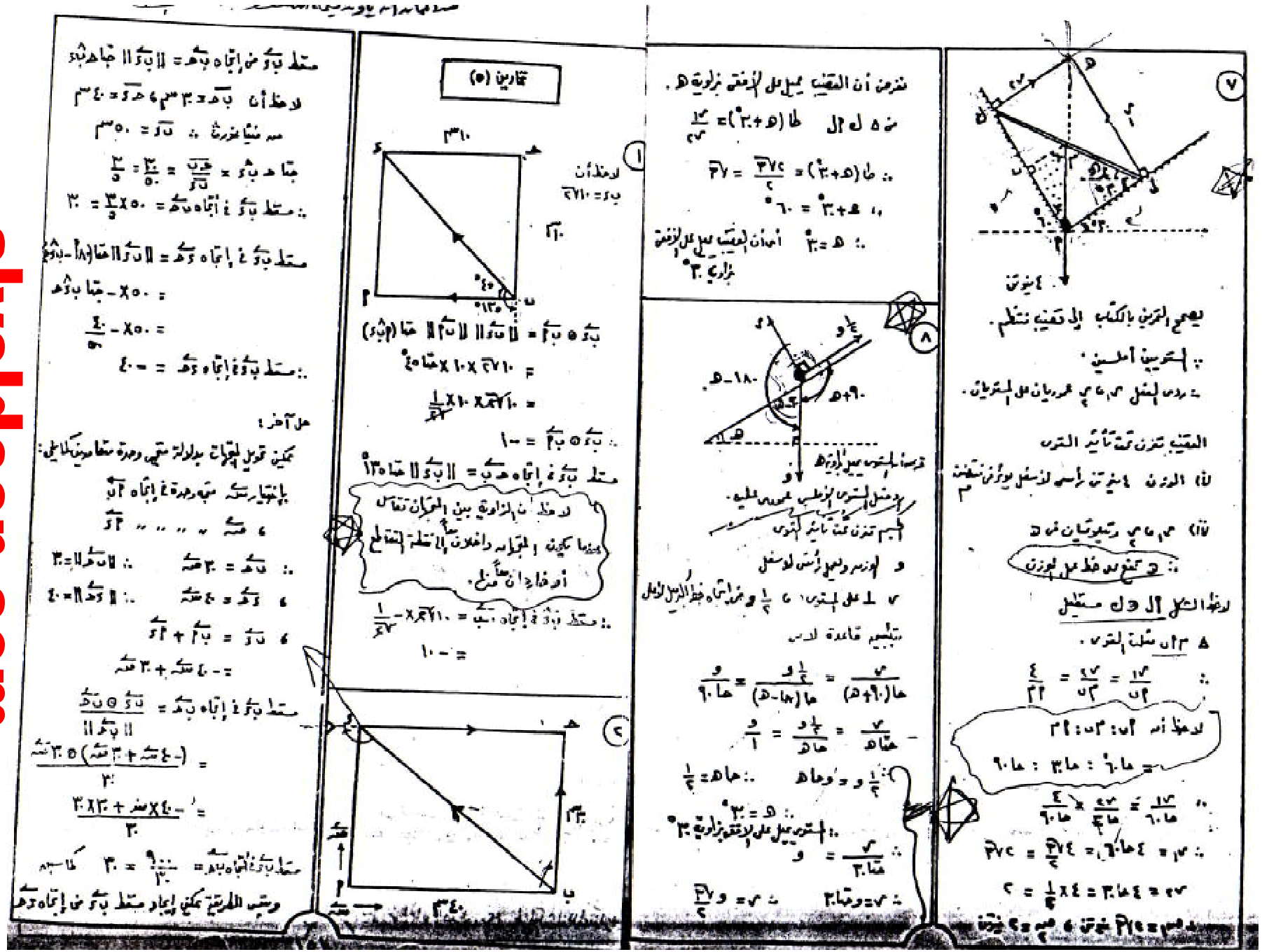
$(أم)^2 = \frac{3}{4}(أ ح)^2$

∴ أم = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ ح

$\therefore \frac{ر}{\frac{\sqrt{3}}{2} أ ح} = \frac{و}{أ ح}$

∴ ر = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

alyeldeen.com
البوابة المتخصصة في رياضيات المرحلة الثانوية



٧

٤ نيوتن

يصح التزن بالكتاب إذا كان الجسم متزن.

∴ التزين أملسين.

∴ رد فعل كل منهما عمودي على المستويان.

الجسم يتزن تحت تأثير القوى

(١) الوزن ٤ نيوتن رأسي لأسفل يؤثر في نقطة م

(٢) م ، ع يؤثران في ك

∴ ك تقع على خط عمل الوزن

لإيجاد الكل إذا كان مستقيل

ك م = ٣ سم نقطة القوى.

∴ $\frac{ك ع}{ك م} = \frac{ع}{٣} = \frac{٤}{٢٢}$

لاحظ أن ك ع : ك م : ع م = ٢ : ٣ : ٢

= جا ٩٠ : جا ٦٠ : جا ٣٠

∴ $\frac{ك ع}{جا ٩٠} = \frac{ك م}{جا ٦٠} = \frac{ع م}{جا ٣٠}$

∴ ع م = ٤ جا ٣٠ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢ سم

∴ ك م = ٢ جا ٦٠ = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ سم

٨

نفرض أن المقعب يميل على الأفقي بزاوية هـ.

من ك ل ∠ ط (هـ + ٣٠°) = $\frac{٣٧}{ع}$

∴ ط (هـ + ٣٠°) = $\frac{٣٧}{ع}$ = ٣٧

∴ هـ + ٣٠° = ٦٠°

∴ هـ = ٣٠° أمكن للمقعب الميل على الأفقي بزاوية ٣٠°

٨

نفرض أن المقعب يميل على الأفقي بزاوية هـ.

من ك ل ∠ ط (هـ + ٣٠°) = $\frac{٣٧}{ع}$

∴ ط (هـ + ٣٠°) = $\frac{٣٧}{ع}$ = ٣٧

∴ هـ + ٣٠° = ٦٠°

∴ هـ = ٣٠° أمكن للمقعب الميل على الأفقي بزاوية ٣٠°

٨

ق جسم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية هـ

و أثر على المستوى بقوة مقدارها $\frac{١}{٢}$ و في اتجاه خط أكبر ميل

بتطبيق قاعدة لامي

$\frac{و}{ط(٩٠ + هـ)} = \frac{و}{ط(١٨٠ - هـ)} = \frac{و}{ط ٩٠}$

$\frac{و}{جتا هـ} = \frac{و}{جا هـ} = \frac{و}{١}$

$\frac{١}{٢}$ و = و جا هـ ∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ المستوى يميل على الأفقي بزاوية ٣٠°

∴ $\frac{ك}{جتا ٣٠}$ = $\frac{و}{ع}$

∴ ك = و جتا ٣٠ ∴ ك = $\frac{و\sqrt{٣}}{ع}$

تمارين (٥)

١

لإيجاد أن ب د = ٢٧١٠

ب د = ب أ ∥ ب د ∥ جا (ب أ ، ب د)

= ٢٧١٠ × ١٠ × جا ٤٥°

= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١٠ × ٢٧١٠

∴ ب د = ١٠ −

∴ مقط ب د في إتجاه هـ ب = ∥ ب د ∥ جا ١٣٥°

لاحظ أن الزاوية بين المحورين تقاس عندما يكون المحوران داخلان في نقطة التقاطع أو خارجان عنها.

∴ مقط ب د في إتجاه ب ج = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١٠ × ٢٧١٠

= ١٠ −

٢

مقط ب د في إتجاه ب هـ = ∥ ب د ∥ جا هـ ب د

لاحظ أن ب هـ = ٣ سم ، هـ د = ٤ سم

∴ ب د = ٥ سم

∴ جا هـ ب د = $\frac{هـ د}{ب د}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ مقط ب د في إتجاه ب هـ = $\frac{٣}{٥}$ × ٥٠ = ٣٠

مقط ب د في إتجاه و ك = ∥ ب د ∥ جا (ب أ ، ب د) − جا ب د هـ

= ٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ − ٥٠ × جا ب د هـ

∴ مقط ب د في إتجاه و ك = ٤٠ −

حل آخر:

يمكن تحويل المتجهات بدلالة متجهين وحدة متعامدين كما يلي:

باختيار ك متجه وحدة في إتجاه ك أ

، ك هـ ، ، ، ، ك ج

∴ ك هـ = ٣ ك هـ ∴ ∥ ك هـ ∥ = ٣

، ك و = ٤ ك ج ∴ ∥ ك و ∥ = ٤

، ب د = ب أ + أ د

= − ٣ ك هـ + ٤ ك ج

مقط ب د في إتجاه ب ك = $\frac{ب د \cdot ب ك}{∥ ب ك ∥}$

= $\frac{(-٣ ك هـ + ٤ ك ج) \cdot ٣٠ ك هـ}{٣٠}$

= $\frac{-٣٠ \times ٠ + ٤ \times ٣٠ \times ٠}{٣٠}$

مقط ب د في إتجاه ب ك = $\frac{٠}{٣٠}$ = ٠ كما سبق

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مقط ب د في إتجاه و ك

٣

ك ل ∥ ب ج

ك ل = ب ج = ١٠ سم

ك ب = ل ج = ٦ سم

ك ب ∥ ل ج

ك ب ⊥ ب ج

ك ب ⊥ ك ل

ك ب ⊥ ل ج

ك ب ⊥ ب ج

ك ب ⊥ ك ل

ك ب ⊥ ل ج

ك ب ⊥ ب ج

ك ب ⊥ ك ل

ك ب ⊥ ل ج

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية

تمارين (١)

١
أ(-١، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(٠، ٤)
ب ج = ب - ج = (٢، ٣) - (٠، ٠) = (٢، ٣)
ج د = د - ج = (٠، ٤) - (٠، ٠) = (٠، ٤)
ب د = د - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ج د = (٢ × ٠) + (٣ × ٤) = ١٢
∴ ب ج ⊥ ج د
∴ ق(∠ ب ج د) = ٩٠°
∴ ب ج = √(٢^٢ + ٣^٢) = √١٣
ج د = √(٠^٢ + ٤^٢) = ٤
∴ مساحة ∆ ب ج د = ½ × ب ج × ج د = ½ × √١٣ × ٤ = ٢√١٣ وحدة مربعة

٢
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°

٣
أ(-١، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (-١، ٤) - (٢، ٣) = (-٣، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٣) + (-٣ × ١) = ٣
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٣ / √١٣ × √١٠) = جتا^-١ (٣ / √١٣٠)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٧٤,٩°

٤
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٥
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٦
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٧
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٨
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٩
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

١٠
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

١١
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

١٢
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

١٣
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

١٤
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

١٥
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

١٦
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

١٧
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

١٨
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

١٩
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٢٠
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٢١
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٢٢
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٢٣
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٢٤
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٢٥
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٢٦
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٢٧
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٢٨
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٢٩
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٣٠
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٣١
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٣٢
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٣٣
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٣٤
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٣٥
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٣٦
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٣٧
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٣٨
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٣٩
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٤٠
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٤١
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٤٢
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٤٣
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٨٢,٩°
ب د = د - ب = (-٤، ٠) - (٢، ٣) = (-٦، -٣)
∴ ب ج . ب د = (-٢ × -٦) + (-٣ × -٣) = ٢١
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢١ / √١٣ × √٤٥) = جتا^-١ (٧√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(∠ د ب ج) = ١٥,٩°

٤٤
أ(-٣، ٢)
ب(٠، ٥)
ج(٢، ٠)
د(٠، ٠)
ب ج = ج - ب = (٢، ٠) - (٠، ٥) = (٢، -٥)
ب أ = أ - ب = (-٣، ٢) - (٠، ٥) = (-٣، -٣)
∴ ب ج . ب أ = (٢ × -٣) + (-٥ × -٣) = ٩
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (٩ / √٢٩ × √١٨) = جتا^-١ (√٢ / ٢)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٤٥°
ب د = د - ب = (٠، ٠) - (٠، ٥) = (٠، -٥)
∴ ب ج . ب د = (٠ × ٢) + (-٥ × -٥) = ٢٥
∴ ق(∠ د ب ج) = جتا^-١ (٢٥ / √٢٩ × √٢٥) = جتا^-١ (√٢٩ / ٢٩)
∴ ق(∠ د ب ج) = ٦٨,٢°

٤٥
أ(٣، ٤)
ب(٠، ٠)
ج(٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٤، ٠) - (٠، ٠) = (٤، ٠)
ب أ = أ - ب = (٣، ٤) - (٠، ٠) = (٣، ٤)
∴ ب ج . ب أ = (٤ × ٣) + (٠ × ٤) = ١٢
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١٢ / ٤ × ٥) = جتا^-١ (٠,٦)
∴ ق(∠ أ ب ج) = ٥٣,١°

٤٦
أ(٠، ٤)
ب(٢، ٣)
ج(٠، ٠)
د(-٤، ٠)
ب ج = ج - ب = (٠، ٠) - (٢، ٣) = (-٢، -٣)
ب أ = أ - ب = (٠، ٤) - (٢، ٣) = (-٢، ١)
∴ ب ج . ب أ = (-٢ × -٢) + (-٣ × ١) = ١
∴ ق(∠ أ ب ج) = جتا^-١ (١ / √١٣ × √٥) = جتا^-١ (√٦٥ / ٦٥)
∴ ق(

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات الثانوية العامة

alyeldeen.com
البوابة المتخصصة في رياضيات المرحلة الثانوية

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية

تمارين (٧)

(١) أولاً : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متضادان في الاتجاه :

$\therefore$ ح = ٧٠ + ٤٠ = ١١٠ نيوتن .

وتعمل من نقطة هـ (بين خطي عمل القوتين) وتبعد عم بمقدار س

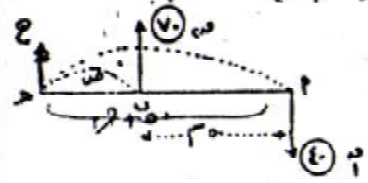
حيث ٤٠ × س = ٧٠ × (٣٥٠ - س)

٤ س = ٢٤٥٠ - ٧ س ⟸ ١١ س = ٢٤٥٠

$\therefore$ س = $\frac{٢٤٥٠}{١١}$ سم

أي أن المحصلة تبعد عن أ بمقدار $\frac{٢٤٥٠}{١١}$ سم وفي نفس اتجاه القوتين

ثانياً : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متضادان في اتجاه :



ح = ٧٠ - ٤٠ = ٣٠ نيوتن

وتعمل في اتجاه القوة الأكبر ٧٠ سم الخارج

وتؤثر في نقطة هـ التي تبعد عن ب بمقدار هـ ص

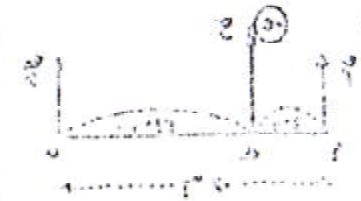
حيث ٧٠ × هـ ص = ٤٠ × (٣٥٠ + هـ ص)

٧ هـ ص = ٤ × ٣٥٠ + ٤ هـ ص

٣ هـ ص = ١٤٠٠ $\therefore$ هـ ص = $\frac{١٤٠٠}{٣}$ سم

أي أن المحصلة تبعد عن ب بمقدار $\frac{١٤٠٠}{٣}$ سم في اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ أي في اتجاه القوة الأكبر

(٢)



$\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متضادان في الاتجاه

$\therefore$ ح = ق١ + ق٢

$\therefore$ ق١ + ق٢ = ٥٠ ..... (١)

ق١ × ٤ = ق٢ × ١٢

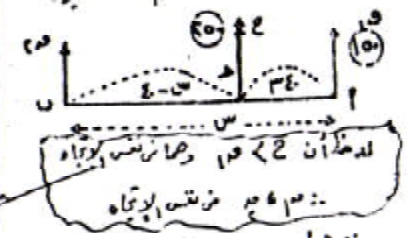
$\therefore$ ق١ = ٣ ق٢ بالتعويض في (١)

$\therefore$ ٤ ق٢ = ٥٠ $\therefore$ ق٢ = ١٠ نيوتن

$\therefore$ ق١ = ٤٠ نيوتن

(٣) أولاً : المحصلة والقوة المعلومة في اتجاه واحد :

نفرض أن القوة المجهولة ق١ = ١٥٠ نيوتن



لدعم أن ح < ق١ وفي نفس الاتجاه

$\therefore$ ق١ ، ق في نفس الاتجاه

نفرض أن البعدين هـ ، ل على التوالي من

ح = ق١ + ق

٥٠ = ١٥٠ + ق $\therefore$ ق = ١٠٠ نيوتن

ق١ × ٤ = ق (س - ٤)

$\therefore$ ١٥٠ × ٤ = ١٠٠ (س - ٤)

$\therefore$ ٦٠ = ٣ س - ١٢ $\therefore$ س = ٢٤ سم

أي أن البعدين هـ ، ل على التوالي ٢٤ ، ١٠٠ سم

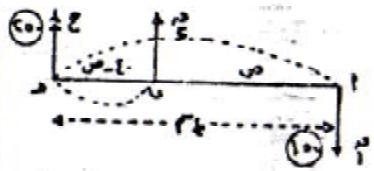
ثانياً : المحصلة والقوة المعلومة في اتجاهين متضادين :

نفرض أن القوة المجهولة ق١ = ١٥٠ نيوتن

المحصلة واحدة والقوتين في اتجاهين

القوتين في اتجاهين متضادين

وتكون المحصلة في اتجاه القوة الأكبر مقدارا



ح = ق١ - ق

٤٠ = ١٥٠ - ق

$\therefore$ ق = ١١٠ نيوتن

ق١ × أ هـ = ق × ب هـ

١٥٠ × (٤٠ - ص) = ١١٠ ص

٦٠٠ - ١٥ ص = ١١ ص

$\therefore$ ٢٦ ص = ٦٠٠ $\therefore$ ص = ٢٣ سم

أي أن المحصلة تعمل على بعد ٢٣ سم من أ

(٤) نفرض أن القوة المجهولة ق١ = ٥٠٠ نيوتن

أولاً : إذا كانت ق١ ، ق في اتجاه واحد :

ح = ٣٥٠ نيوتن

$\therefore$ ح < ق١

نعلم أنه إذا كانت المحصلة أحد مركبتين ح ، ق١ في اتجاه واحد

فإن القوة الثانية ق تكون في اتجاه المحصلة

نفرض أن البعدين هـ ، ل على التوالي من

ح = ق١ - ق

٣٥٠ = ٥٠٠ - ق $\therefore$ ق = ١٥٠ نيوتن

ق١ × أ هـ = ق × ب هـ

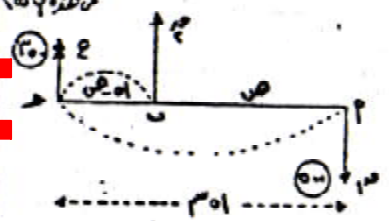
٥٠٠ × ١٥ = ١٥٠ (س + ١٥)

$\therefore$ ٧٥٠٠ = ١٥٠ س + ٢٢٥٠

$\therefore$ ١٥٠ س = ٤٧٥٠ $\therefore$ س = ٣١ $\frac{٦}{١٥}$ سم

ثانياً : إذا كانت ق١ ، ق في اتجاهين متضادين :

$\therefore$ ح في اتجاه ق (لدعم أن ح تقوس في اتجاه ق هذه الحالة)



ح = ق١ - ق

٣٥٠ = ٥٠٠ - ق $\therefore$ ق = ١٥٠ نيوتن

ق١ × أ هـ = ق × ب هـ

٥٠٠ × (١٥ - ص) = ١٥٠ ص

٧٥٠٠ = ٦٥٠ ص $\therefore$ ص = ١١ $\frac{٥}{٦}$ سم

(٥) نفرض أن القوة الصغرى ق١ = ٣٠ نيوتن

المحصلة ح = ١٠ نيوتن (أصغر من أحد القوتين)

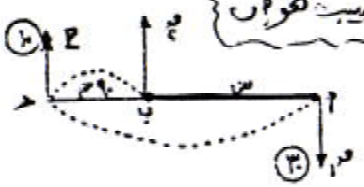
$\therefore$ القوتين في اتجاهين متضادين .

$\therefore$ القوة ق١ هي الصغرى $\therefore$ ح في اتجاه ق١

نفرض أن طول العقيب س

aleldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات الثانوية العامة

القضيب حوران



$ع = ص - ١٠$

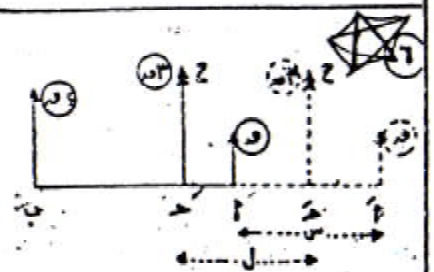
$١٠ = ص - ٣٠$ ∴ $ص = ٤٠$ سنتيمتر

$م(\overline{أب}) \times ب\overline{ح} = م(\overline{ب ح}) \times ب\overline{ح}$

$٣(ص + ٩٠) = ٦٠ \times ١٥$

$ص + ٩٠ = ١٢٠$ ∴ $ص = ٣٠$ سم

أى أن طول القضيب = ٣٠ سم



نفرض أن الحصلة تنزلق مسافة $(\overline{أح}) = ل$

من الحالة الأولى: $ك_١ \times أ\overline{ح} = ك_٢ \times ب\overline{ح}$

$\therefore ٨ل = ٢ك$ ... (١)

من الحالة الثانية: بعد تحرك البترة $ك$

$\therefore ك \times أ\overline{ح} = ٢ك \times ب\overline{ح}$

$\therefore أ\overline{ح} = ٢ ب\overline{ح}$ ... (٢)

ولكن $أ\overline{ح} = ص - أ\overline{ح}$

، $أ\overline{ح} = ل - أ\overline{ح}$

$\therefore أ\overline{ح} = ص - (ل - أ\overline{ح})$

$\therefore أ\overline{ح} = ص - ل + أ\overline{ح}$

كذلك $ب\overline{ح} = ب\overline{هـ} + هـ\overline{ح}$

$\therefore ب\overline{ح} = ب\overline{هـ} + ل$

بالتعويض عن $أ\overline{ح}$ ، $ب\overline{ح}$ من (٢)

$ص - ل + أ\overline{هـ} = ٢(ب\overline{هـ} + ل)$

$\therefore ص - ل + أ\overline{هـ} = ٢ب\overline{هـ} + ٢ل$

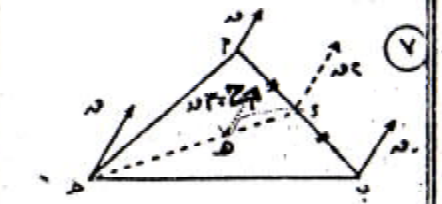
ولكن من (١) $أ\overline{هـ} = ٢ ب\overline{هـ}$

$\therefore ص - ل + ٢ب\overline{هـ} = ٢ب\overline{هـ} + ٢ل$

$\therefore ص - ل = ٢ل$

$٣ل = ص$ ∴ $ل = \frac{١}{٣} ص$

أى أن الحصلة تنزلق مسافة $\frac{١}{٣}$ ص



حصلة البترتين $ك_١$ ، $ك_٢$ والمقدار الأصغر لهما $ك_١$ تؤثر فى $أ ب$ وتقسمه من $ب$ بحيث $ب\overline{هـ} = ٢ أ\overline{هـ}$

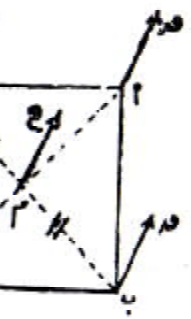
∴ مجموعة البترتين المتوازيتين تتحرك فى نفس الاتجاه.

∴ الحصلة تؤثر فى $هـ$ ولكن $ك$

حيث $٢ك \times ب\overline{هـ} = ك_١ \times أ\overline{هـ}$

∴ $\frac{ك_١}{ك} = \frac{ب\overline{هـ}}{أ\overline{هـ}} = \frac{٢}{١}$ ولكن هذه النسبة لا تتغير

∴ $ك$ تنزلق موازية لنفسها



مجموعة البترتان $ك_١$ ، $ك_٢$ عند $أ$ ، $ب$

تساوى $ك_٣$ عند $ج$ وتقسم $\overline{أب}$ من الداخل

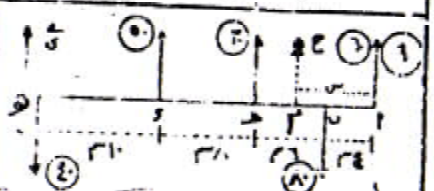
مجموعة البترتان $ك_٤$ ، $ك_٥$ عند $ب$ ، $ج$

تساوى $ك_٦$ عند $د$ وتقسم $\overline{ب ج}$ من الخارج

البترة الوسطى تتحول إلى بترتين $ك_٣$ ، $ك_٦$ عند $أ$ ، $د$

حيث

∴ مجموعة البترات الثلاث $= ٤$ عند $هـ$ تؤثر فى منتصف $\overline{أ د}$



تتغير كل متجه وحدة فى اتجاه البترة ٥٠ ، ٦٣٤٠٥

مجموع القياسات الجبرية للبترات $= ٥٠ + ٣٠ + ٦٠$

$= ٤ - ٨٠ -$

$= ٢٠ -$

أى أن الحصلة $= ٢٠$ كجم تتحرك فى اتجاه البترة الأصغر ٥٠ ، ٦٣٤٠٦

نفرض أن الحصلة تقطع $\overline{أ ب}$ فى $هـ$ حيث $أ\overline{هـ} = س$

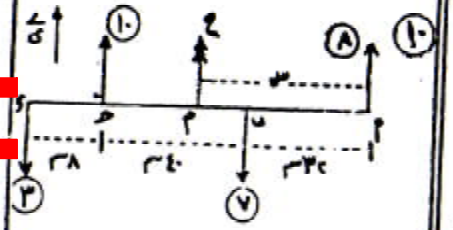
مجموع القياسات الجبرية لعزوم البترات بالنسبة إلى $أ$

$= ٤٠ \times ٨ - ٣٠ \times ٢ - ١٨٠ \times ٥ + ٤ \times ٨$

$= -٣٠ س$

∴ $-٣٠ س = -٤٠ \times ٣٠$ ∴ $س = ١٢$

أى أن الحصلة تقع على $\overline{أ ب}$ وتبعد عن $أ$ بمقدار ١٢ سم.



تتغير كل متجه وحدة فى اتجاه البترتان ٨ ، ١٠

مجموع القياسات الجبرية $= ٨ - ١٠ + ٣٠ - ٧ = ٨$

∴ الحصلة $= ٨$ نيوتن وتتحرك فى اتجاه البترتان ١٠ ، ٨

نفرض أن خط عمل الحصلة يقطع $\overline{أ ب}$ فى $هـ$

حيث $أ\overline{هـ} = س$

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة إلى $أ$

$= ٤٠ \times ٣ + ٧ \times ١٠ - ٢٤ \times ٢ = -٣٨ س$

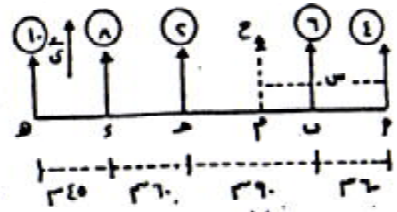
∴ $-٣٨ س = -٥٠٤$ ∴ $س = ٣٠$

أى أن الحصلة تبعد عن $أ$ بمقدار ٣٠ سم

∴ الحصلة تقطع $ب$

alyeldeen.com
البوابة المتخصصة في رياضيات المرحلة الثانوية

(١١)



نختار كي متجه وحدة في إتجاه المتجه

مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٤ + ٦ + ٢٠ + ١٠٨ = ١٣٨

= ٣٠

∴ محصلة القوى = ٣٠ نيوتن وتعمل رأسيا لأعلى وإيجاد المتجه

نفرض أن خط عمل المحصلة يقطع $\overrightarrow{أه}$ في نقطة م

حيث أم = س

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة أ

= عزم المحصلة بالنسبة لنقطة أ

∴ − ٦٠ × ٦ − ١٠ × ٢٠ − ٢١٠ × ٨ − ٢٠ × ٢١٠ = −٣٠ س

∴ ٣ س = ٤٨٩

∴ س = ١٦٣ سم

أي أن المحصلة = ٣٠ نيوتن وتعمل رأسيا إتجاه

القوى وتقطع $\overrightarrow{أه}$ في نقطة تبعد عن أ

مقدار ١٦٣ سم

ملحوظة : يمكن حل جواب ١٠ إلى ١١ بأكثر

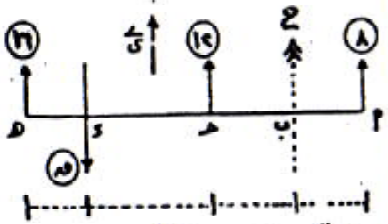
(١٢)

∴ ٣٠ = ٥ ب ∴ ٣٦ = ٥ أ

∴ ٣٠ = ٥ د ∴ ٣١٠ = ٥ د

∴ ٣٠ = ٥ د ∴ ٣٥ = ٥ هـ

٣٢ = ٥ ح



٣٦ ٣١٠ ٣٢ ٣٥

لاحظ في هذا التمرين أن المحصلة غير معلومة

ولا يمكن معرفة أي شيء . ولكن معلوم أن المحصلة تمر

بالنقطة ب

لذلك سنوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم

القوى بالنسبة إلى النقطة ب ، نفرض طول عمل ع

حتى تتلاشى عزم المحصلة المجهولة أيضا

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة إلى ب

= القياس الجبري لعزم المحصلة بالنسبة لـ ب

∴ − ٦ × ٨ − ١٠ × ١٢ + ٥ ع − ٤٠ × ١٦ = ٤٥ × ١٦

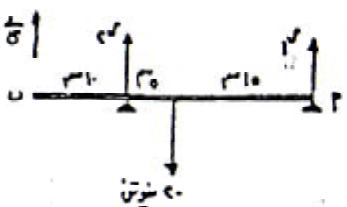
= ٥ ع

∴ ٥ ع = ٧٩٢

∴ ع = ١٥٨٫٤ نيوتن

تمارين (٨)

(١)



نختار كي متجه وحدة رأسي لأعلى .

∴ المجموعة متزنة .

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

أي أن ع = ٠

∴ ٣٠ + ٣٥ − ٣١٠ − ٣١٠ − ٢٠ − ص = ٠

∴ ص = ٢٠ نيوتن

∴ ص = ٢٠ نيوتن رأسي لأعلى .

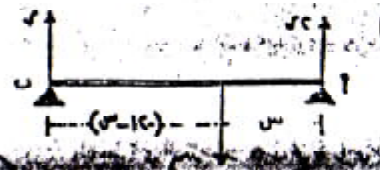
كذلك مجموع العزوم لكل القوى بالنسبة لأي نقطة = صفر

أي أن مجموع العزوم بالنسبة لـ أ = صفر

∴ ٢٠ × ٣٥ − ٢٠ × ٣١٠ − ٢٠ × ٣١٠ + ٢٠ × ب أ = ٠

∴ ب أ = ٣١٠ سم

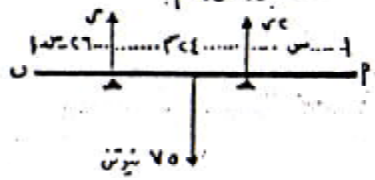
(٢)



(٣)

نفرض أن أحد الحاملين يبعد عن الطرف الأيسر

مقدار س سم .



∴ المجموعة متزنة

∴ ع = ٠

∴ ٧٥ + ٢٠ = ٢ ⇐ ٢ = ٩٥ نيوتن

كذلك مجموع العزوم = صفر

∴ − ٢٠ س + ٧٥ × ٢٠ − ٢ (س + ٢٢) = ٠

∴ − ٢٠ س + ١٥٠ − ٢ س − ٤٤ = ٠

∴ − ٢٢ س = − ١٠٦

∴ س = ١٧ سم

أي أن أحد الحاملين يبعد ١٧ سم عن الطرف الأيسر منه .

نفرض أن الثقل ١٢ ث كجم يبعد مقدار ص سم عن الطرف الأيسر

∴ المجموعة متزنة

∴ ع = ٠

∴ ٢٠ = ٢ + ٢٠ ⇐ ٢ = ٤ ث كجم

كذلك مجموع العزوم لكل القوى بالنسبة لأي نقطة = صفر

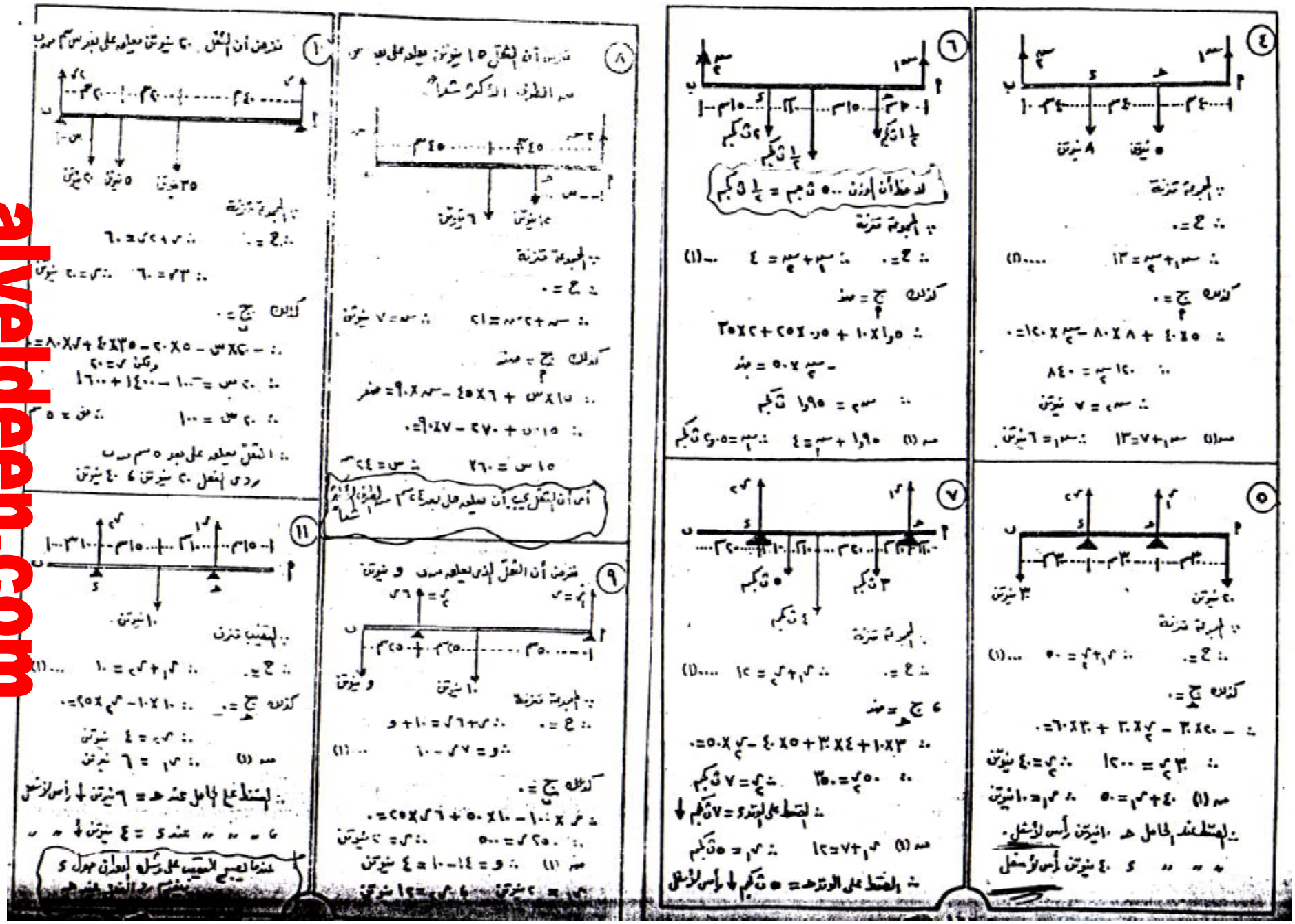
∴ ١٢ × ص − ٢٠ × ٤ = صفر

∴ ١٢ ص = ٨٠ ⇐ ص = ٤٠ سم

أي أن الثقل ١٢ ث كجم يجب أن يوضع على بعد ٤٠ سم من الطرف الأيسر

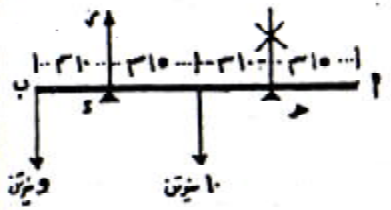
أو على بعد ٨٠ سم من الطرف الآخر .

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية



alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية

نفرض أن الثقل المراد تعليقه عند ب حتى يكون المتقيم على وشك الدوران حول و فيكون
(لاحظ خلو هذه الحالة أن رد الثقل عند ك تماثل عنه
من الحالة السابقة)



∴ المجموعة متزنة

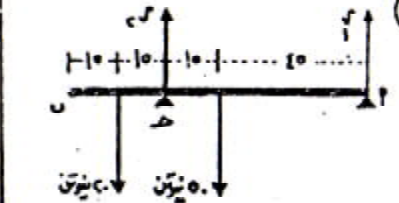
∴ ج = ٠ ∴ ك + ١٠ = و ... (١)

كذلك مج = ٠ ∴ − ١٠ × ١٠ + و × ١٠ = ٠

∴ و = ١٠ نيوتن

بالتعويض في (١) ∴ ك = ٢٠ نيوتن

أما أن المستقيم على الحامل ك = ٢٠ نيوتن ↓ رد الثقل



∴ المجموعة متزنة

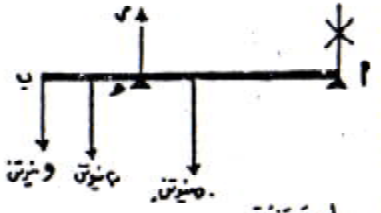
∴ ج = ٠ ∴ ك + و = ٥٠ ... (١)

كذلك مج = ٠ ∴ − ٢٥٠ + ٤٠ × ٥٠ − ٦٠ × و = ٠

∴ و = ٣٠ ∴ ك = ٢٠ نيوتن

أما أن المستقيم على الحامل ك = ٢٠ نيوتن ↓ رد الثقل

نفرض أن الثقل المراد تعليقه عند ب و نيوتن
من هذه الحالة يكون المتقيم على وشك الدوران حول ح
ورد الثقل عند أ
(لاحظ أن رد الثقل عند ك في هذه الحالة يختلف
عنه في الحالة السابقة).



∴ المجموعة متزنة

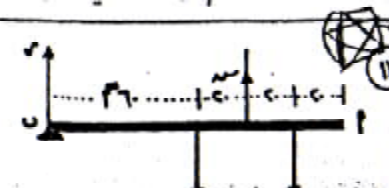
∴ ج = ٠ ∴ ك + و = ٧٠ ... (١)

كذلك مج = ٠ ∴ − ٣٠ × ٧٠ + و × ١٠ + ١٠ × ٥٠ = ٠

∴ و = ٤٠ ∴ و = ١٠ نيوتن

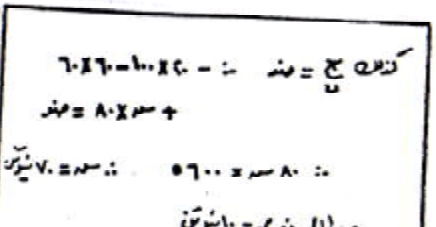
من (١) ∴ ك = ٧٠ − ١٠ = ٦٠ نيوتن

أما أن المستقيم على الحامل ك = ٦٠ نيوتن ↓ رد الثقل



∴ المجموعة متزنة

∴ ج = ٠ ∴ ك + ٢٠ = ٨٠ ... (١)



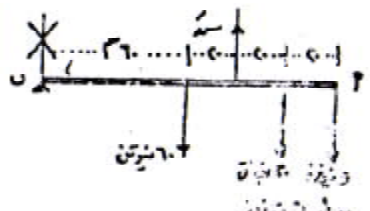
كذلك مج = ٠ ∴ − ٣٠ × ٦٠ + ٥٠ × و = ٠

∴ و = ٣٦ نيوتن

من (١) ∴ ك = ٨٠ − ٣٦ = ٤٤ نيوتن

نفرض أن الثقل الذي يجب تعليقه عند أ حتى يكون المتقيم
على وشك الدوران حول ح و نيوتن

ومن هذه الحالة نحسب رد الثقل عند ب
(لاحظ أن الثقل الذي يختلف عنه في الحالة السابقة)



∴ المجموعة متزنة

∴ ج = ٠ ∴ ك + و = ٨٠ ... (١)

كذلك مج = ٠ ∴ − ٣٠ × ٦٠ + ٥٠ × و = ٠

∴ و = ٣٦ نيوتن

من (١) ∴ ك = ٨٠ − ٣٦ = ٤٤ نيوتن

∴ ك = ٤٤ نيوتن رأسي لأعلى

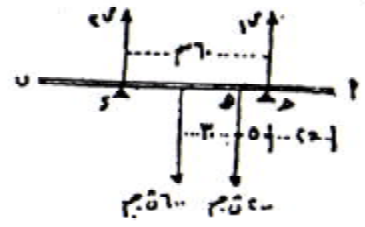
∴ ك = ١٠٠ نيوتن رأسي لأعلى

من (١) ∴ ك = ٨٠ − و

∴ و = ١٠٠ − ٨٠

∴ و = ٢٠ نيوتن

(١٤) أولاً: إذا كان الثقل عند ك = ٢٠٠ ث.جم



∴ المجموعة متزنة.

∴ ج = ٠ ∴ ك + ٥٦٠٠ = ٢٠٠ + ك ... (١)

كذلك مج = ٠ ∴ − ٣٠ × ٥٦٠٠ + ٥ × ٢٠٠ − ٦٠ × ك = ٠

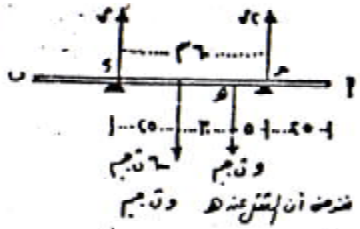
∴ ك = ٢٢٠٠

∴ ك = ٢٢٠٠ / ٦ = ٣٦٦ ٢/٣ ث.جم

(بعض الجواب بالكتاب)

من (١) ∴ ك = ٤٣٣ ١/٣ ث.جم

ثانياً: إذا كان الثقل عند ك ضعف رد الثقل عند ك



نفرض أن الثقل عند ك = ك ث.جم

∴ المجموعة متزنة ∴ ج = ٠ ∴ ك + ك = ٢ك + ٦٠

كذلك مج = ٠ ∴ − ٣٠ × ٢ك + ٢٠ × ك + ٥٠ × ٢٠ = ٠

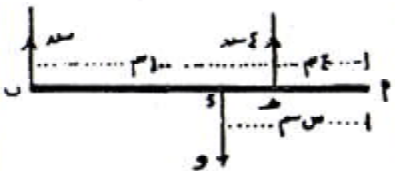
∴ ١٨٠٠ = ٤٠ ك ∴ ك = ٤٥ ث.جم

من (١) ∴ ك = ٢ك + ٦٠

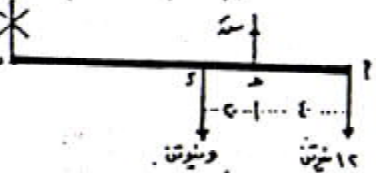
∴ ك = ٦٠ ث.جم

aleldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات الثانوية العامة

(١٥) نفرض أن نقطة تأثير وزن القضيب تبعد
س سم من أ. وأن وزنه و نيوتن

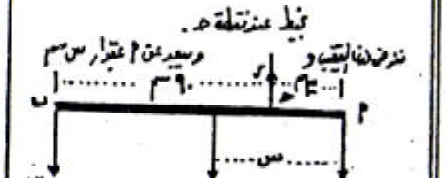


ونفرض أن المقدار = سـ ∴ المقدار = ٤سـ
∴ القضيب متزن
∴ ج = ٠
∴ ٤سـ + سـ = و
∴ و = ٥ سـ ... (١)
لكن ج = ٠
∴ ٤ سـ (س - ٤) - سـ (١٤ - س) = ٠
= صفر
بالقسمة على سـ :
∴ ٤(س - ٤) - (١٤ - س) = ٠
∴ ٥ س = ٣٠ ∴ س = ٦٠ سم
أي أن نقطة تأثير القضيب تبعد ٦٠ سم عن أ

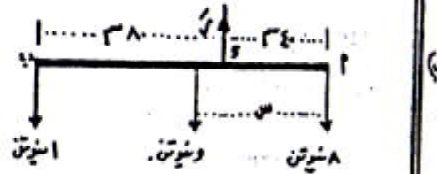


لاحظ عندما يكون أكبر تعلق يمكن تعليقه سم أو سم أو أقل
التوازن هو ١٢ نيوتن (نهمل المقدار عند هذه الحالة)
∴ المجموعة متزنة ∴ ج = ٠
لكن ج = ٠ ∴ ١٢ × ٤٠ + و × ٢٠ = ٠
∴ ٢٠ و = ١٢ × ٤٠ ∴ و = ٢٤ نيوتن

(١٦) حاولة : تتزن القضيب منتظمة ح
أي إذا أستند على حامل عند ح أو إذا علق
بخيط عند نقطة ح.



نفرض أن القضيب و وسيد عن أ بمقدار س سم
∴ المجموعة متزنة
∴ ج = ٠
∴ ١٦ × ٣٤ + و (س - ٣٠) + ٩٠ × ١ = ٠
∴ و (س - ٣٠) = ٣٩٠ ... (١)



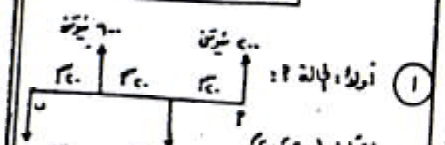
∴ المجموعة متزنة
∴ ج = ٠
∴ ٨ × ٤٠ + و (س - ٤) + ٨٠ × ١ = ٠
∴ و (س - ٤) = ٤٠ ... (٢)
بقسمة (١) على (٢)

$$\frac{و(س-٣٠)}{و(س-٤)} = \frac{٣٩٠}{٤٠}$$

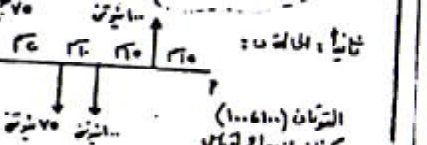
∴ ٤ (س - ٣٠) = ٣٩ (س - ٤)
∴ ٤ س - ٧٢٠ = ٣٩ س - ١٥٦٠
∴ ١٥ س = ٨٤٠
∴ س = ٥٦ سم
(٢) ∴ و (٥٦ - ٤) = ٤٠
∴ و = ٥٠ نيوتن

تمارين (٩)

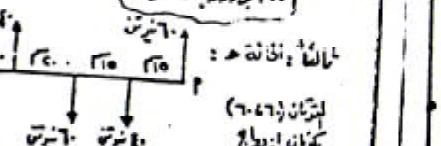
(١) أولاً : الحالة ١ :



المقدار (ب - ج - ء)
يكونان إزدواج قياس
المجهول لعزمه ج = + ٦٠ × ٢٠٠ = ١٢٠٠٠ سم نيوتن
المقدار (ب - ٦٠ - ج) يكونان إزدواج قياس المجهول
لعزمه ج = - ٦٠ × ٢٠٠ = - ١٢٠٠٠ سم نيوتن
∴ ج + ج = ١٢٠٠٠ - ١٢٠٠٠ = صفر.
∴ المزدوجان متزنان
ثانياً : الحالة ب :

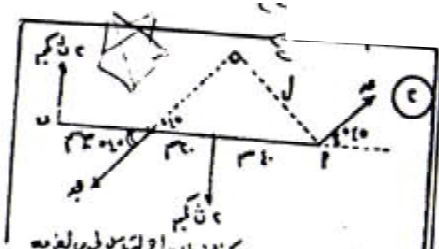


المقدار (ب ١٠٠ ج ١٠٠) يكونان إزدواج قياس المجهول
لعزمه ج = + ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠ سم نيوتن.
المقدار (ب ٧٥ ج ٧٥) يكونان إزدواج قياس المجهول
ج = - ٧٥ × ٢٠٠ = - ١٥٠٠٠ سم نيوتن.
∴ ج + ج = ١٠٠٠٠ - ١٥٠٠٠ = صفر.
∴ المزدوجان متزنان
حالة ٣ : الحالة ح :



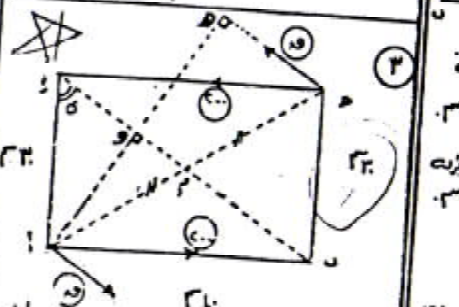
المقدار (ب ٦٠ ج ٦٠) يكونان إزدواج
المجهول لعزمه ج = + ٣٠ × ٦٠ = ١٨٠٠ سم نيوتن
المقدار (ج ٤٠ ء) يكونان إزدواج قياس المجهول لعزمه
ج = - ٤٠ × ٣٠ = - ١٢٠٠ سم نيوتن.
∴ ج + ج = ١٨٠٠ - ١٢٠٠ = ٦٠٠ ≠ صفر.
∴ المزدوجان لا متزنان

(٢)



المقدار (ء ج ، ء د) يكونان إزدواج قياس المجهول لعزمه
ج = ق × ل ونكون ل = ٦٠ جا ٣٠ = ٦٠ × ½ = ٣٠ سم
ج = ق × ٣٠
المقدار (ج ج) يكونان إزدواج القياس المجهول لعزمه
ج = - ٥٠ × ٢ = - ١٠٠ ث كجم.
∴ المزدوجان متزنان ∴ ج + ج = صفر.
∴ ق × ٣٠ - ١٠٠ = صفر.
∴ ق = ١٠٠ / ٣٠ ∴ ق = ١٠ / ٣ ث كجم

(٣)



المقدار (ب ٦٠ ج) يكونان إزدواج قياس المجهول لعزمه
ج = + ٣٠ × ٢٠٠ = ٦٠٠٠ نيوتن سم.
المقدار (ء ج ، ء د) يكونان إزدواج لكن قياس المجهول لعزمه ج
لكن يتلاشى المزدوجان ∴ ج = ٦٠٠٠ نيوتن سم.
∴ يجب أن تكون ق عند م في اتجاه ب ج وعندها إتجاه
∴ ج = ق × ٣٠ = ٦٠٠٠
ونكون ق = ٢٠٠ جا ٣٠ = ٢٠٠ × ½ = ١٠٠ نيوتن
∴ ق = ٦٠٠٠ / ٣٠ ∴ ق = ١٢٥ نيوتن

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات المرحلة الثانوية

(٤)

∵ المقيب متزن تحت تأثير القوتان ٤٠ ، ٣٠ ردفعل المفصل
و إزدواج ج القياس الجبري لعزمه ٤٠ × ٣٠ = ١٢٠٠ سم نيوتن.

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج.

∴ القوتان ٤٠ ، ٣٠ تكونان إزدواج القياس
الجبري لعزمه = − ٤٠ × ٣٠ = − ١٢٠٠ سم نيوتن.

∴ ر = ٣٠ نيوتن رأسي لأعلى

∴ − ٤٠ × ل = − ١٢٠٠ ⇐ ل = ٣٠ سم.

∴ $\frac{\text{ل}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ه}}$ ⇐ ه = ٣٠°

مقرن المقيب ١٨ نيوتن ، ر رد فعل المفصل ، ١٨ نيوتن
تكونان إزدواج القياس الجبري لعزمه ج = ١٨ × ل
وحيث ل = ١٥ جتا ٣٠ = $\frac{1}{2}$ × ٣٠ = ١٥ سم.

∴ ج = ١٨ × ١٥ = ٢٧٠ نيوتن سم.

لكي يتزن المقيب يجب أن تكون القوتان ر ، ١٨ نيوتن
إزدواج القياس الجبري لعزمه ج = − ج

∴ ج = − ٢٧٠ ∴ ر = ١٨ نيوتن

∴ − ر × ل = − ٢٧٠ ∴ ر × ١٥ جتا ٣٠ = ٢٧٠

∴ ر = $\frac{٢٧٠}{١٥ \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $\frac{٣٦}{\sqrt{3}}$ = ٢٠٧٨ نيوتن

(٦)

الصفيحة متزنة
تحت تأثير قوتين
الوزن
٣٠ ث جم إلى أسفل
ورد فعل المسمار عند أ

∴ رد فعل المسمار ر = ٣٠ ث جم
رأسي لأعلى

∴ المستقل على المسمار هـ = ٣٠ ث جم رأسي لأسفل

∴ الصفيحة متزنة تحت تأثير إزدواج القياس الجبري لعزمه
ج = ٧٥٠ ث جم سم.

والقوتان (٣٠ ث جم رأسي لأسفل ، ر عند أ)

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج

∴ القوتان ٣٠ ، ر تكونان إزدواج القياس الجبري
لعزمه = − ج = − ٧٥٠ ث جم سم.

∴ ر = ٣٠ ث جم رأسي لأعلى.

∴ هـ = ٣٠ ث جم رأسي لأسفل أي أن المستقل
المسمار لا يتغير

∴ − ٣٠ × ل = − ٧٥٠ ∴ ل = ٢٥ سم

$\frac{\text{ل}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ⇐ $\frac{\text{ل}}{\text{جا هـ}} = \frac{٢٥}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{٢٥}{٢٧}$

∴ ه = ٤٥°

أي أن أ هـ يميل على الرأسي ، وضع التوازن بزاوية ٤٥°

ويلاحظ أنه في هذه الحالة يكون أ ، ج رأسي
حيث أن جـ أ ، ج = ٤٥°
وبذلك يكون أ ب أفقي

(٧)

الصفيحة متزنة تحت
تأثير قوتين
الوزن ١٥٠ نيوتن
رأسي لأسفل
ورد فعل المسمار ر
عند ب

∴ رد فعل المسمار = ١٥٠ نيوتن رأسي لأعلى

∴ المستقل على المسمار = ١٥٠ نيوتن رأسي لأسفل

∴ الصفيحة متزنة تحت
تأثير إزدواج القياس الجبري لعزمه ج

والقوتان (١٥٠ نيوتن رأسي لأسفل ، ر عند ب)

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج.

∴ القوتان (١٥٠ ، ر) تكونان إزدواج القياس
الجبري لعزمه = − ج

∴ ر = ١٥٠ نيوتن رأسي لأعلى.

∴ − ج = − ١٥٠ × ل وحيث ل = ١٠ سم

∴ ج = − ١٥٠ × ١٠ = − ١٥٠٠ نيوتن سم

بمعيار عزوم الإزدواج إذن أثر على الصفيحة
= − ١٥٠٠ نيوتن سم

(٨)

∴ ج = ١٥٠ نيوتن سم

الصفيحة متزنة تحت تأثير إزدواج القياس الجبري لعزمه
ج = ١٥٠ نيوتن سم.

والقوتان (٢٠ نيوتن رأسي لأسفل ، ر عند د)

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج.

∴ القوتان (٢٠ ، ر) تكونان إزدواج القياس الجبري
لعزمه = − ج ∴ − ٢٠ × ل = − ١٥٠ نيوتن سم.

∴ ر = ٢٠ نيوتن رأسي لأعلى.

∴ − ٢٠ × ل = − ١٥٠٠ ∴ ل = ٧٥ سم

$\frac{\text{ل}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ⇐ $\frac{\text{ل}}{\text{جا هـ}} = \frac{٧٥}{\frac{٣}{5}} = \frac{٧٥}{١٠} = \frac{١}{2}$

∴ ه = ٣٠° ، ٩٠° ، ١٥٠°

(٩)

الصفيحة متزنة تحت تأثير إزدواج القياس الجبرى لعزمه
ج والمثلثان (٦ نيوتن رأسى لأسفل ، ٧ عند ب)
∴ الإزدواج لا تتزن إلا مع إزدواج
∴ المثلثان (٦ ، ٧) يكونان إزدواج لقياس جبرى
لعزمه = − ج
∴ ٧ = ٦ نيوتن رأسى لأعلى
∴ − ٦ ل = − ج ... (١)
ولكن Δ ب د ج ~ Δ ب أ هـ
∴ ل / ٤ = ب د / ب أ = ٢ / ٣
∴ ل = ٤/٣ ب د
∴ ل = ٤/٣ × ١٥/٢ = ٥ سم
من (١)
∴ − ٦ × ٥ = − ج
∴ ج = ٣٠ نيوتن . سم .

(١٠)

الصفيحة متزنة تحت تأثير إزدواج لقياس جبرى لعزمه
ج = ٢٥٠ ث.جم .سم
والمثلثان (٥٠ ث.جم رأسى لأسفل ، ٧ عند ب)
∴ الإزدواج لا تتزن إلا مع إزدواج .
∴ المثلثان (٥٠ ، ٧) يكونان إزدواج لقياس جبرى
لعزمه = − ٢٥٠ ث.جم .سم .
∴ ٧ = ٥٠ ث.جم رأسى لأعلى
∴ − ٢٥٠ = − ل × ٥٠
∴ ل = ٥ سم .
∴ إرتفاع المثلث = ١٥ سم .
∴ ب د = ٤/٣ × ١٥ = ١٠ سم .
حيث تتقاطع المتوسطات .
∴ ط هـ = ل / ب د = ٥/١٠ = ١/٢
∴ هـ = ٣٠° ، ق(∠ ب) = ١٥٠°
ولكن ق(∠ ب أ ج) = ٩٠° ∴ أ ب رأسى .
∴ أ ب يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٦٠°

(١)

تمارين (١٠)

المثلثان (٣ ، ٤) يكونان إزدواج القياس الجبرى لعزمه
ج = + ٤ × ٣٠ = ٦٠ ث.جم .سم
المثلثان (٥ ، ٥) يكونان إزدواج القياس الجبرى لعزمه
ج = − ٥٠ × ٢ = − ١٠٠ ث.جم .سم
المثلثان (٢٤ ، ٢٤) يكونان إزدواج لقياس جبرى لعزمه
ج = + ٢٤ × ٢٤٠ = ٥٧٦٠ ث.جم .سم .
لاحظ أن ∥ قوى المثلثان (٢٤ ، ٢٤) ⊥ ضلع المربع = ٢٤٠ سم .
∴ محصلة إزدواجات هذا الإزدواج تعمل
∴ القياس الجبرى لعزمه = ج١ + ج٢ + ج٣
= − ٦٠ + ١٠٠ + ١٦٠
= ١٥٠ ث.جم .سم

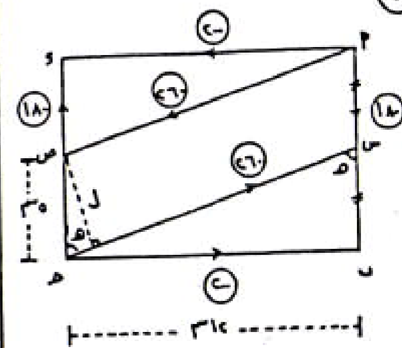
(٢)

المثلثان (−٦ ، ١٠٠) يكونان إزدواج لقياس جبرى
لعزمه ج١ = + ١٠٠ × ل
المثلثان (١٠٠ ، −١٥٠) يكونان إزدواج لقياس جبرى
لعزمه ج٢ = − ١٥٠ × س
ولكن س = ب هـ حاهـ .
∴ حاهـ = ل / ب هـ = ١/٢
∴ هـ = ٣٠° ، ق(∠ ب) = ٦٠°
∴ س = ب هـ × حاهـ
= ٤/٣ ب هـ
∴ س = ٤/٣ × ٤/٣ (ل − ١/٢ ل) = ٨/٩ ل
∴ ج٢ = − ١٥٠ (١ − ١/٢) × ٨/٩ ل
= − ٧٥ ل + ٨٣,٣ ل
∴ مزدوج الإزدواج المحصل = ج١ + ج٢
= ١٠٠ ل − ٧٥ ل + ٨٣,٣ ل
= ١٠٨,٣ ل
= ٤٥ ل

alyeldeen.com
الموقع المتخصص فى رياضيات الثانوية العامة

alyeldeen.com
الموقع المتخصص في رياضيات الثانوية العامة

٣



التوتان (١٨٠، ١٨٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج١ = - ١٨٠ × ١٢ = - ٢١٦٠ ث جم.سم

التوتان (٢٠٠، ٢٠٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٢ = + ٢٠٠ × ١٠ = ٢٠٠٠ ث جم.سم

التوتان (٢٦٠، ٢٦٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٣ = + ٢٦٠ × ل

ولكن ل = ٥ جا هـ.

في ∆ هـ ن س : س هـ = ١٣ سم (فيثاغورث)

∵ جا هـ = ١٢/١٣

∴ ل = ٥ × ١٢/١٣

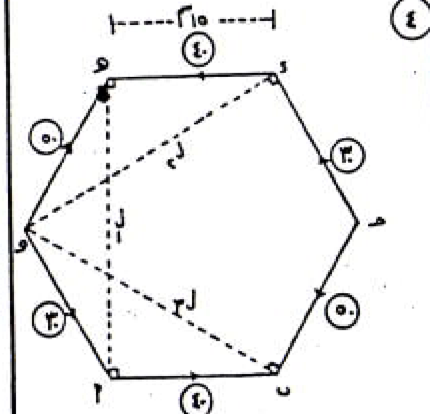
ج٣ = ٢٦٠ × ٥ × ١٢/١٣ = ١٢٠٠ ث جم.سم

∴ القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل = ج١ + ج٢ + ج٣

= - ٢١٦٠ + ٢٠٠٠ + ١٢٠٠

= ١٠٤٠ ث جم.سم.

٤



لدينا أن :

ل١ = ل٢ = ل٣ = ١٥ $\sqrt{٣}$

التوتان (٤٠، ٤٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج١ = + ٤٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$

التوتان (٥٠، ٥٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٢ = - ٥٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$

التوتان (٣٠، ٣٠) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٣ = + ٣٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$

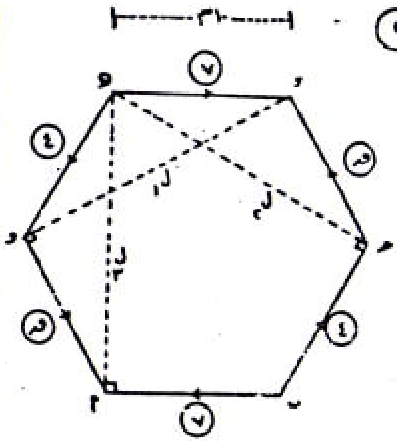
∴ عزم الازدواج المحصل = ج١ + ج٢ + ج٣

= ١٥ $\sqrt{٣}$ (٤٠ - ٥٠ + ٣٠)

= ١٥ $\sqrt{٣}$ × ٢٠

= ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.سم

٥



لدينا أن ل١ = ل٢ = ل٣ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

التوتان (ق، ق) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج١ = ق × ١٠ $\sqrt{٣}$

التوتان (٤، ٤) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٢ = ٤ × ١٠ $\sqrt{٣}$

التوتان (٧، ٧) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٣ = - ٧ × ١٠ $\sqrt{٣}$

∵ المجموعة متزنة (متوازنة)

∴ عزم الازدواج المحصل = صفر

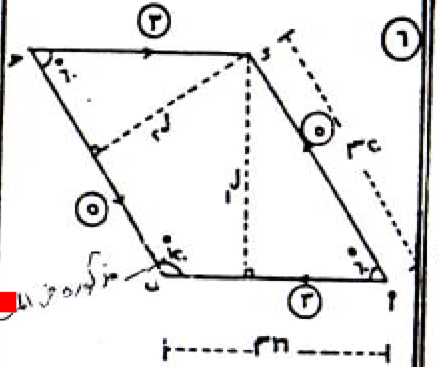
∴ ج١ + ج٢ + ج٣ = صفر

∴ ١٠ $\sqrt{٣}$ (ق + ٤ - ٧) = صفر.

∴ ق + ٤ - ٧ = صفر.

∴ ق = ٣ ث جم.

٦



التوتان (٣، ٣) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج١ = - ٣ × ل١

ولكن ل١ = ٢٠ جا ٦٠ = ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ج١ = - ٣ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = - ٣٠ $\sqrt{٣}$

التوتان (٥، ٥) يكونان ازدواج القياس الجبري لعزمه

ج٢ = + ٥ × ل٢

ولكن ل٢ = ١٦ جا ٦٠ = ١٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$

∴ ج٢ = ٥ × ٨ $\sqrt{٣}$ = ٤٠ $\sqrt{٣}$

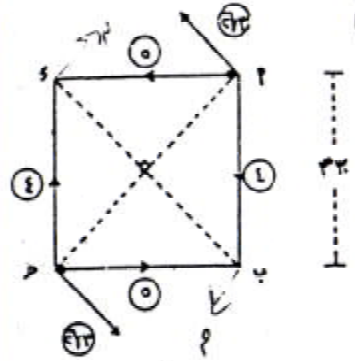
∴ القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل = ج١ + ج٢

= - ٣٠ $\sqrt{٣}$ + ٤٠ $\sqrt{٣}$

= ١٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم.سم

alyeldeen.com
موقع يقدم حلول مناهج الدول العربية

(٧)



أولاً:

المثلث (٥٤٥) يكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق(\overset{\frown}{أب}) = ٢ \times ٥٠ = ١٠٠$ درجة

المثلث (٤٤٤) يكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق(\overset{\frown}{أء}) = ٢ \times ٤٠ = ٨٠$ درجة

المثلث (٣٤٣، ٣٤٣) يكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق(\overset{\frown}{أء}) = ٢ \times ٩٠ = ١٨٠$ درجة

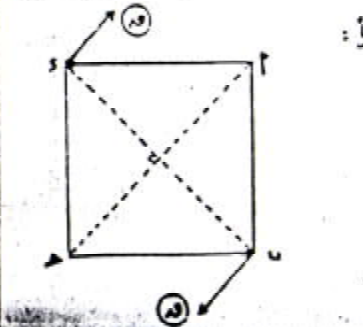
∴ مجموع قياسات زوايا المضلع = $ق(\overset{\frown}{أء}) + ق(\overset{\frown}{أء}) + ق(\overset{\frown}{أء})$

$= ١٨٠ + ١٢٠ + ١٥٠$

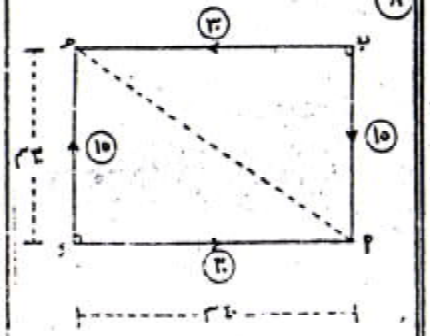
$= ٤٥٠$ درجة

∴ $ق(\overset{\frown}{أء}) = ٣٦٠ - ٤٥٠ = ٩٠$ درجة

ثانياً:



(٨)



المثلث (١٥، ١٥) يكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق(\overset{\frown}{أء}) = ٢ \times ٤٠ = ٨٠$ درجة

المثلث (٣٠، ٣٠) يكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق(\overset{\frown}{أء}) = ٢ \times ٣٠ = ٦٠$ درجة

∴ المجموعة تكون إزدواج لقياس الزاوية المحيطة $= ق(\overset{\frown}{أء}) + ق(\overset{\frown}{أء})$

∴ $ق(\overset{\frown}{أء}) = ٦٠ + ٨٠ = ١٤٠$ درجة

نفرض أن المثلثان عند ن، ٥ و $\overline{هـ}$ هـ، هـ هـ

ولكي تكون المجموعة في حالة توازن

∴ يجب أن تكون المثلثان (هـ، هـ هـ) إزدواج لقياس

الزاوية المحيطة $= ٢ \times ٥١٠ = ١٠٢٠$ درجة

نبعد ن هـ عند ب في إتجاه $\overleftarrow{هـ}$

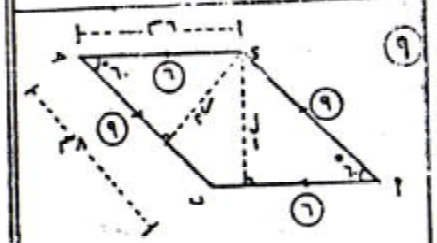
٥ هـ عند ٥ " " $\overleftarrow{هـ}$

∴ $-$ هـ $\times ٢٧٣ = -٥١٠$

∴ هـ $= \frac{٥١٠}{٥١٣} = \frac{٧}{٢٧} \times \frac{٢٧}{٢٧}$

∴ هـ $= \frac{٧}{٢٧}$ سنتيمتر

(٩)



المثلثان (٦، ٦) يكونان إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق_١ = ٢ \times ل_١$

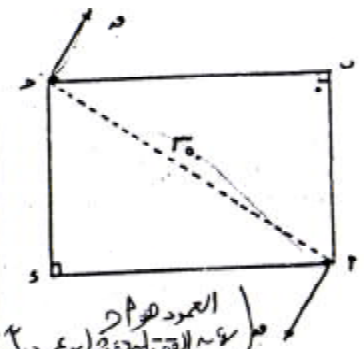
المثلثان (٩، ٩) يكونان إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

نفرض أن المثلثان عند $\overline{هـ}$ هـ، هـ هـ وكي تتزن المجموعة

لها ($\overline{هـ}$ هـ، $\overline{هـ}$ هـ) محوريتان على $\overline{أب}$

∴ المثلثان (هـ، هـ هـ) يكونان إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$= ٢ \times ١٥ = ٣٠$ سنتيمتر.



∴ المثلثة هـ هـ أ، هـ هـ ب متطابقتان

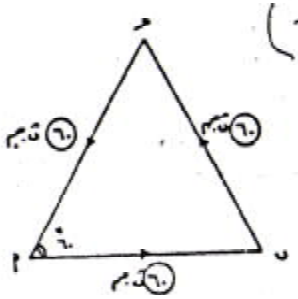
∴ $\overline{هـ}$ هـ $= \frac{١}{٢}$ $\overline{أب}$ $= \frac{١}{٢} \times ٣٠ = ١٥$ سنتيمتر

∴ المثلثة هـ هـ أ قائمة الزاوية في هـ

∴ هـ هـ $= \sqrt{٣٠^٢ - ١٥^٢} = \sqrt{٩٠٠ - ٢٢٥} = \sqrt{٦٧٥}$

$= ١٥\sqrt{٣}$ سنتيمتر

(١٠)



∴ قياس الزاوية أ هـ ب $= ٦٠$ درجة

∴ طول ضلع المثلث $= ٣٠$ سم.

∴ المثلثة أ هـ ب الزاوية أ هـ ب $= ٦٠$ درجة

هـ أ $= ٦$ سم، هـ ب $= ٦$ سم، أ ب $= ٦$ سم.

∴ المثلثة أ هـ ب متطابقة الأضلاع

∴ المثلثة أ هـ ب متطابقة الزوايا

∴ مقاييس الزوايا متساوية وتصل بإتجاه دوراني واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواج لقياس الزاوية المحيطة

$ق = ق_١ + ق_٢$

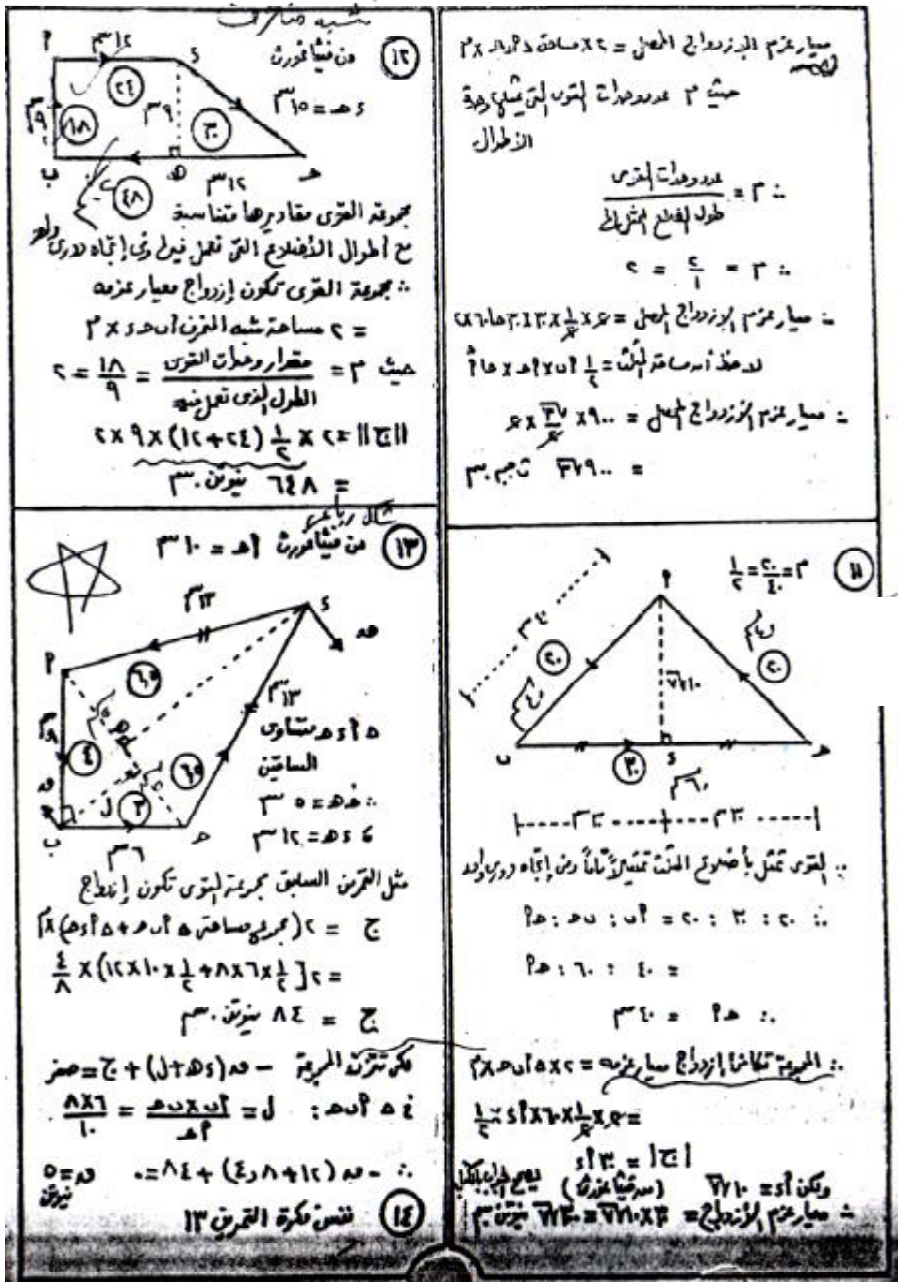
$ل_١ = ٨ هـ هـ = \frac{٢٧}{٢} \times ٨ = ١٠٨$ سم

$ل_٢ = ٦ هـ هـ = \frac{٢٧}{٢} \times ٦ = ٨١$ سم

∴ $ق = ٢٧ \times ٩ + ٢٧ \times ٦$

$= ٢٧ \times ١٥$

$= ٤٠٥$

∴ $ق = ٢٧\sqrt{٣}$ سنتيمتر.

alyeldeen.com
الموقع التخصصى فى رياضيات الثانوية العامة