القـــــوى

القـــوة :

هى : تأثير أحد الأجسام الطبيعية على جسم طبيعي آخر

هى : متجه يتميز بأنه يمر بنقطة معلومة أو أنه يعمل فى خط مستقيم معلوم

أنواع القوى :

قوى الضغط ، قوى الشد ، قوى الجذب و التنافر ، قوى رد الفعل ، قوى التثاقل (الوزن)

خواص القوة :

يتوقف تأثير القوة على :

١ ـ مقدار القوة

٢ ـ إتجاه القوة

٣ ـ نقطة تأثير القوة و بالتالى خط عملها

وحدات قياس مقدار القوة :

١ ـ **تثاقلية :**

١ ثقل كيلوجرام = ١٠٠٠ ثقل جرام " ١ ث كجم = $١٠^{٣}$ ث جم "

٢ ـ **مطلقة :**

١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين " $١٠^{٥}$ داين "

العلاقة بين الوحدات التثاقلية و الوحدات المطلقة :

١ ثقل كيلوجرام = ٩.٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

توازن جسم تحت تأثير قوتين :

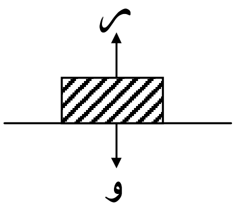
قاعدة (١) : " إتزان جسم تحت تأثير قوتين "

إذا أتزن جسم تحت تأثير قوتين فقط كانت :

١ ـ القوتان متساويتان فى المقدار

٢ ـ القوتان متضادتان فى الإتجاه

٣ ـ خط عمل القوتان على إستقامة واحدة



مثال : إذا وضع جسم وزنه " و " على نضد أملس فإنه يتزن بتأثير القوتين " و " و يؤثر رأسياً لأسفل ، " ر " رد فعل النضد على الجسم و بالتالى :

و = ر ، ر يؤثر رأسياً لأعلى

نتـــــائج :

١ ـ إذا أثرت على جسم متماسك قوتان متساويتان فى المقدار و متضادتان فى الإتجاه و فى نفس الخط المستقيم فلا يكون لهما أى تأثير على الجسم سواء من ناحية السكون أو الحركة

٢ ـ القوى المتبادلة الناشئة عن تأثير جسم على آخر تكون دائماً متساوية فى المقدار و متضادة فى الإتجاه " قانون نيوتن الثالث (لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار و مضاد له فى الإتجاه) "

قاعدة (٢) : " نقل نقطة تأثير القوة (مبدأ نفاذ القوة) "

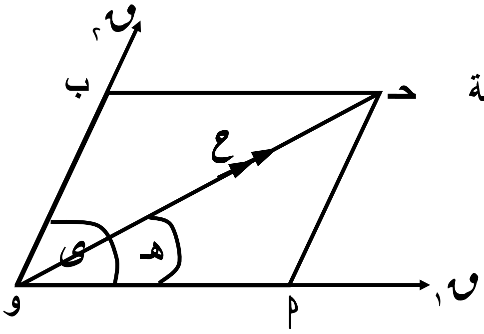
إذا أثرت قوة فى نقطة ما من جسم متماسك فإنه يمكن نقل نقطة التأثير إلى أى نقطة أخرى على خط عمل القوة دون أن يغير ذلك من تأثير القوة على الجسم

أى أن : أية نقطة على خط عمل قوة يمكن إعتبارها نقطة تأثير لهذه القوة

قاعدة (٣) : " ثبوت الشد فى الخيوط المشدودة "

الشد فى جميع أجزاء الخيط المشدود متساو فى المقدار مهما كان وضع الخيط

محصلة قوتين جبرياً :



فى الشكل المقابل : قوتان مقدارهما ق١ ، ق٢ تؤثران فى نقطة

، ى قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين ، هـ قياس الزاوية بين إتجاهى القوة الأولى و المحصلة فيكون :

$$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ق_١ \, ق_٢ \text{ حتا } ى}$$

$$\text{، طا هـ} = \frac{ق_٢ \text{ حا } ى}{ق_١ + ق_٢ \text{ حتا } ى}$$

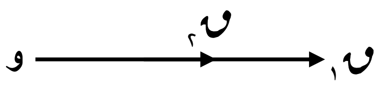
ملاحظة :

إذا كان : خط عمل المحصلة عمودى على خط عمل القوة الأولى

فإن : $ق_١ + ق_٢ \text{ حتا } ى = ٠$

حالات خاصة :

١ ـ القوتان لهما نفس خط العمل و فى نفس الإتجاه :



$ى = ٠^\circ$

$ع = ق_١ + ق_٢$

المحصلة لها نفس خط عمل القوتين و فى نفس الإتجاه " أكبر قيمة للمحصلة "

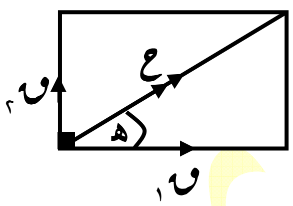
٢ ـ القوتان لهما نفس خط العمل و فى إتجاهين متضادين :

$ى = ١٨٠^\circ$

$ع = |ق_١ - ق_٢|$

المحصلة لها نفس خط عمل و فى نفس الإتجاه القوة الأكبر مقداراً " أصغر قيمة للمحصلة "

٣ ـ القوتان متعامدتان :

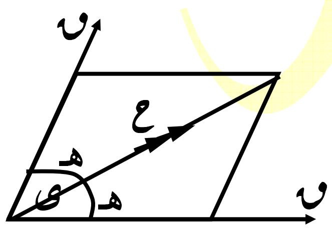


$ى = ٩٠^\circ$

$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

$\text{، طا هـ} = \frac{ق_٢}{ق_١}$

٤ ـ القوتان متساويتان فى المقدار :



$ق_١ = ق_٢ = ق$

$ع = ٢ \, ق \text{ حتا } \frac{ى}{٢}$

$\text{، هـ} = \frac{ى}{٢}$ أى أن : خط عمل المحصلة ينصف الزاوية بين القوتين

أمثـــــلة :

١ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ، ٥ ث جم أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين خط عمليهما ٦٠°

الحل

$$\text{ع}^{٢} = ٩ + ٢٥ + ٢ \times ٣ \times ٥ \times \text{حتا } ٦٠^\circ = ٩ + ٢٥ + ٢ \times ٣ \times ٥ \times \tfrac{١}{٢} = ٤٩$$

∴ ع = ٧ ث جم

$$\text{، ظا هـ} = \frac{٥ \text{ حا } ٦٠^\circ}{٣ + ٥ \text{ حتا } ٦٠^\circ} = \frac{٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٣ + ٥ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{١١}$$

∴ هـ = ١٢′ ٣٨°

٢ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقدارهما $٢\sqrt{٣}$ ، ٥ نيوتن و مقدار محصلتهما $\sqrt{٦٧}$ نيوتن أوجد قياس الزاوية بينهما

الحل

$$\because \text{ع}^{٢} = \text{ق}_١^{٢} + \text{ق}_٢^{٢} + ٢ \text{ ق}_١ \text{ ق}_٢ \text{ حتا ى}$$

$$\therefore ٦٧ = ١٢ + ٢٥ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} \times ٥ \times \text{حتا ى} \qquad \therefore \text{حتا ى} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

∴ ى = ٣٠°

٣ ـ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان أكبر قيمة لمحصلتهما = ١٧ ث كجم ، كانت أصغر قيمة لمحصلتهما = ٧ ث كجم أوجد مقدار كل من القوتين

الحل

$\because \text{ق}_١ + \text{ق}_٢ = ١٧$ (١) ، $\text{ق}_١ - \text{ق}_٢ = ٧$ (٢)

بالجمع ينتج : $٢ \text{ ق}_١ = ٢٤$ ∴ $\text{ق}_١ = ١٢$ ث كجم

بالتعويض فى (١) ينتج : $\text{ق}_٢ = ٥$ ث كجم

٤ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٤ ، ق نيوتن و قياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٤٥° أوجد قيمة ق و مقدار المحصلة

الحل

∵ هـ = ٤٥°

$$\therefore ١ = \frac{\text{ق} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{٤ + \text{ق} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} \qquad \therefore \text{ق} = ٢\sqrt{٢} \text{ نيوتن}$$

$$\text{، ع}^{٢} = ١٦ + ٨ + ٢ \times ٤ \times ٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٨$$

∴ ع = $٢\sqrt{٢}$ نيوتن

٥ – قوتان متساويتان و تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ، و إذا تضاعفت القوتان و أصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ وحدة عن الحالة الأولى أثبت أن :
مقدار كل من القوتين = ٢ $\sqrt{٣}$ + ١ وحدة

الحل

بفرض أن مقدار كل من القوتين = ق وحدة

فى الحالة الأولى :

ح = ٢ ق حتا ٦٠° = ٢ ق × $\frac{١}{٢}$ = ق

∴ ح = ق (١)

فى الحالة الثانية :

ح + ١١ = ٢ × ٢ ق حتا ٣٠° = = ٢ × ٢ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ح + ١١ = ٢ $\sqrt{٣}$ ق (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح ينتج : ١١ = (٢ $\sqrt{٣}$ – ١) ق

∴ ق = $\frac{١١}{٢\sqrt{٣} - ١} \times \frac{٢\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٣} + ١}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ + ١ وحدة

٦ – الفرق بين مقدارى قوتين مؤثرتين فى نقطة مادية هو ٤ ث كجم ، و مقدار محصلتهما هو ٦ $\sqrt{٢}$ ث كجم فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الصغرى أوجد مقدار كل من القوتين و قياس الزاوية بينهما

الحل

نفرض أن مقدارى القوتين هما ق ، ق + ٤ ث كجم ، قياس الزاوية بينهما = ى

∵ ح ⊥ ق

∴ ق + (ق + ٤) حتا ى = ٠

∴ (ق + ٤) حتا ى = – ق (١)

، ∵ $(٦\sqrt{٢})^{٢}$ = ق^{٢} + (ق + ٤)^{٢} + ٢ ق × (ق + ٤) حتا ى = ٠

بالتعويض من (١) ينتج :

٧٢ = ق^{٢} + ق^{٢} + ٨ ق + ١٦ + ٢ ق × (– ق)

∴ ٧٢ = ق^{٢} + ق^{٢} + ٨ ق + ١٦ – ٢ ق^{٢}

∴ ٧٢ = ٨ ق + ١٦

∴ ق = ٧ ث كجم

بالتعويض فى (١) ينتج :

حتا ى = – $\frac{٧}{١١}$

∴ ى = ١٢٩° ٣١′

تمـــــــــارين

١ ـ قوتان مقدارهما ٣ ، ٣ $\sqrt{٢}$ ث جم تؤثران فى نقطة مادية و قياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما

٢ ـ قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية و قياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما

٣ ـ قوتان مقدارهما ق ، ق $\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية و قياس الزاوية بينهما ١٣٥° اثبت أن مقدار محصلتهما = ق نيوتن ثم أوجد قياس الزاوية بين المحصلة و القوة الأولى

٤ ـ قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث كجم أوجد قياس الزاوية بين القوتين

٥ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٤ ، ق نيوتن و قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل عمودية على القوة الأولى أوجد قيمة ق و مقدار المحصلة

٦ ـ قوتان متساويتان فى المقدار مقدار محصلتهما ١٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن و قياس الزاوية بين المحصلة و إحداهما ٣٠° أوجد مقدار كل من القوتين

٧ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدار محصلتهما $\sqrt{١٠}$ ث جم إذا كانتا متعامدتين ، و مقدار محصلتهما $\sqrt{١٣}$ ث جم إذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار كل منهما

٨ ـ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدار محصلتهما ح نيوتن ، و إذا عكس إتجاه خط عمل القوة الثانية أصبح مقدار محصلتهما ح $\sqrt{٣}$ نيوتن و فى إتجاه عمودى على المحصلة الأولى أوجد قياس الزاوية بين القوتين

٩ ـ قوتان متعامدتان تؤثران فى نقطة مادية و مقدار محصلتهما = ٤٠ نيوتن فإذا كانت محصلتهما تميل بزاوية قياسها ٣٠° على القوة الأولى أوجد مقدار كلاً من القوتين

١٠ ـ قوتان متعامدتان تؤثران فى نقطة مادية و مقدار إحداهما $\frac{٢}{٣}$ مقدار الأخرى ، و مقدار محصلتهما ٥ $\sqrt{١٣}$ ث جم أوجد مقدار كلاً من منهما و إتجاه محصلتهما

١١ ـ قوتان متساويتان فى المقدار تؤثران فى نقطة مادية و مربع مقدار محصلتهما = ثلاثة أمثال مربع مقدار أى منهما أوجد قياس الزاوية بين إتجاهى القوتين

١٢ ـ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان أكبر قيمة لمحصلتهما = ٧٠ ث جم ، كانت أصغر قيمة لمحصلتهما = ٢٤ ث جم أوجد مقدار كل من القوتين

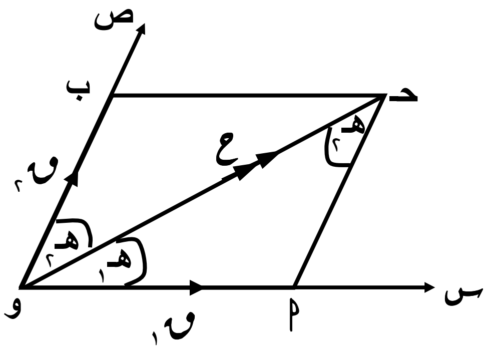
١٣ ـ قوتان مقدارهما ١٦ ، ١٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية ، مقدار محصلتهما = ١٤ ث جم أوجد قياس الزاوية بين القوتين ثم أوجد الإتجاه الذى تعمل فيه قوة ثالثة فى نفس النقطة مقدارها ٦ ث جم حتى يكون مقدار محصلة القوى الثلاثة :
* أصغر ما يمكن ** أكبر ما يمكن مع تعيين مقدار المحصلة فى كل حالة

١٤ ـ قوتان مقدارهما ٨٠ ، ٧٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار و إتجاه محصلتهما ، و إذا أثرت قوة مقدارها ٥٠ ث جم فى نفس النقطة أوجد مقدار و إتجاه محصلة القوى الثلاثة

١٥ ـ قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، قياس الزاوية بينهما ١٢٠° و مقدار محصلتهما ٧ ث كجم فإذا كان ظل قياس الزاوية بين محصلتهما و القوة الأولى = ٤ $\sqrt{٣}$ أوجد مقدار كل من القوتين

١٦ ـ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان أكبر مقدار لمحصلتهما هو ٧ ث جم ، و إذا كانت الزاوية بينهما قائمة فإن مقدار محصلتهما = ٥ ث جم أوجد مقدار كل من القوتين

تحليل القوة إلى مركبتين



مركبتا قوة معلومة فى إتجاهين معلومين :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : قوة مقدارها ع تؤثر فى نقطة مادية و

فإنه : يمكن تحليل هذه القوة إلى قوتين مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$

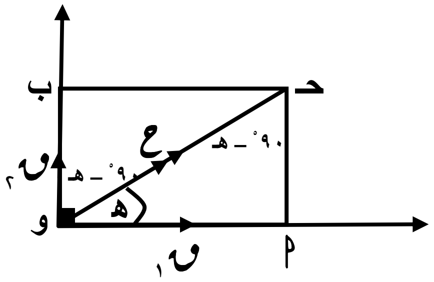
حيث إتجاه $ق_١$ يميل على إتجاه ع بزاوية قياسها $هـ_١$

، إتجاه $ق_٢$ يميل على إتجاه ع بزاوية قياسها $هـ_٢$

من Δ و ا حـ و بتطبيق قانون الجيب يكون :

$$ق_١ = \frac{ع \text{ حا } هـ_٢}{\text{حا } (هـ_١ + هـ_٢)} \quad ، \quad ق_٢ = \frac{ع \text{ حا } هـ_١}{\text{حا } (هـ_١ + هـ_٢)}$$

مركبتا قوة معلومة فى إتجاهين متعامدين :



فى الشكل المقابل :

يمكن تحليل القوة ع إلى قوتين مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$

فى إتجاهين متعامدين حيث هـ قياس الزاوية بين خطى عمل ع ، $ق_١$

من Δ و ا حـ و بتطبيق قانون الجيب و ملاحظة أن حا (٩٠° − هـ) = حتا هـ يكون :

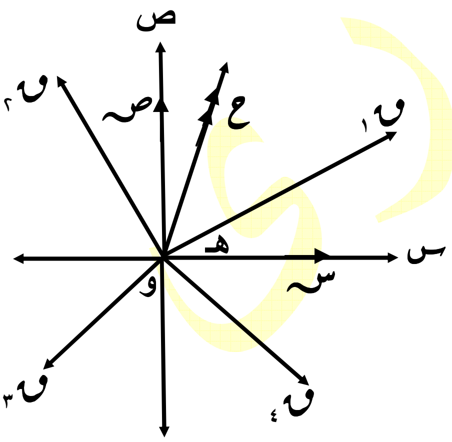
$ق_١$ = (مقدار المركبة فى الإتجاه المعلوم) = ع حتا هـ

" مسقط ع فى إتجاه $ق_١$ "

$ق_٢$ = (مقدار المركبة فى الإتجاه العمودى على الإتجاه المعلوم) = ع حتا هـ

" مسقط ع فى إتجاه $ق_٢$ "

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة :



لإيجاد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة نوجد :

* $\tilde{س}$ = المجموع الجبرى للمركبات فى إتجاه معلوم و $\overleftarrow{س}$
* $\tilde{ص}$ = المجموع الجبرى للمركبات فى إتجاه عمودى على الإتجاه المعلوم و $\overleftarrow{ص}$

$$\therefore ع = \sqrt{\tilde{س}^٢ + \tilde{ص}^٢}$$

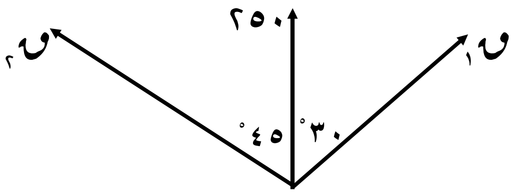
$$، \text{ طا } هـ = \frac{\tilde{ص}}{\tilde{س}}$$

حيث : هـ قياس الزاوية بين إتجاه ع ، إتجاه و $\overleftarrow{س}$

أمثـــــلة :

١ – حلل قوة مقدارها ٢٥٠ نيوتن و تؤثر رأسياً لأعلى إلى مركبتين فى جهتين مختلفتين منها و تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° على الترتيب

الحل

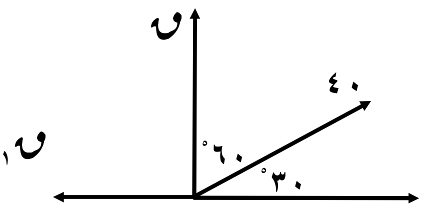


$ق_١ = \frac{\text{٢٥٠ حا ٣٠°}}{\text{حا ٧٥}} = \text{١٨٣ نيوتن}$

$ق_٢ = \frac{\text{٢٥٠ حا ٤٥°}}{\text{حا ٧٥}} = \text{١٢٩ نيوتن}$

٢ – حللت قوة مقدارها ق نيوتن فى إتجاه الشمال إلى مركبتين الأولى فى إتجاه ٣٠° شمال الشرق و مقدارها ٤٠ نيوتن و الأخرى فى إتجاه الغرب أوجد مقدار ق و مقدار المركبة الثانية

الحل



$٤٠ = \frac{\text{ق حا ٩٠°}}{\text{حا ١٥٠}} \qquad \therefore \text{ق} = \text{٢٠ نيوتن}$

$ق_١ = \frac{\text{٢٠ حا ٦٠°}}{\text{حا ١٥٠}} = \text{٣٥ نيوتن}$

٣ – أثرت القوى ٢ ، ٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ٥ ث جم فى نقطة مادية و كانت قياسات الزوايا بين كل قوتين متتاليتين كما يأتى على الترتيب ٦٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° أوجد محصلة هذه القوى

الحل

من الشكل المقابل :

$\text{س} = \text{٢ حتا ٠° + ٣ حتا ٦٠° + ٥ حتا ٢٤٠° + } \sqrt{٣}\text{ حتا ٩٠°}$

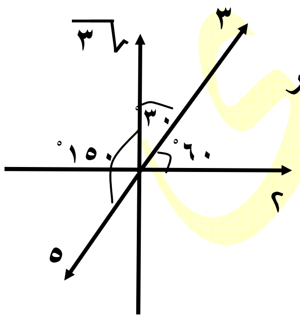
$= \text{٢ حتا ٠° + ٣ حتا ٦٠° – ٥ حتا ٦٠° + } \sqrt{٣}\text{ حتا ٩٠}$

$= ٢ \times ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} – ٥ \times \frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times ٠ = ١$

$\text{ص} = \text{٢ حا ٠° + ٣ حا ٦٠° + ٥ حا ٢٤٠° + } \sqrt{٣}\text{ حا ٩٠°}$

$= \text{٢ حا ٠° + ٣ حا ٦٠° – ٥ حا ٦٠° + } \sqrt{٣}\text{ حا ٩٠}$

$= ٢ \times ٠ + ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} – ٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \sqrt{٣} \times ١ = \text{صفر}$



$\therefore \text{ع} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{١ + ٠} = ١$

، $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٠}{١} \qquad \therefore \text{هـ} = ٠°$

∴ المحصلة = ١ ث جم و تعمل فى إتجاه القوة الأولى

ملاحظة : " بأخذ قياسات الزوايا بين إتجاهات القوى و محور السينات و ملاحظة إشارات الدوال المثلثية لها "
لذا يمكن إختصار المجموع الجبر لمركبات القوى كالآتى :

$\text{س} = \text{٢ + ٣ حتا ٦٠° – ٥ حتا ٦٠° = ٢ – ٢ حتا ٦٠° = ١}$

، $\text{ص} = \text{٣ حا ٦٠° – ٥ حا ٦٠° + } \sqrt{٣} = \text{– ٢ حا ٦٠° + } \sqrt{٣} = \text{صفر}$

٤ ـ أثرت القوى ق ، ٤ √٣ ، ١٢ √٣ ، ٣٦ ث كجم فى نقطة مادية و كانت الثلاثة الأخيرة فى إتجاهات الشمال ، ٦٠° غرب الشمال ، ٦٠° جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة هذه القوى = ٨ ث كجم فى إتجاه الشرق عين ق و إتجاه عملها

الحل

من الشكل المقابل :

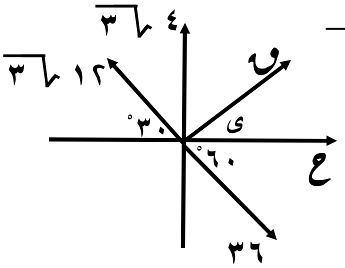
س = ق حتا ى + ٤ √٣ حتا ٩٠° + ١٢ √٣ حتا ١٥٠° + ٣٦ حتا ٣٠٠°

= ق حتا ى + ٤ √٣ × ٠ − ١٢ √٣ × (√٣ / ٢) + ٣٦ × (١ / ٢) = ق حتا ى

ص = ق حا ى + ٤ √٣ حا ٩٠° + ١٢ √٣ حا ١٥٠° + ٣٦ حا ٣٠٠°

= ق حا ى + ٤ √٣ × ١ + ١٢ √٣ × (١ / ٢) + ٣٦ × (√٣ / ٢)

= ق حا ى − ٨ √٣



∵ ح = ٨

∴ ٦٤ = ق٢ حتا٢ ى + ق٢ حا٢ ى − ١٦ √٣ ق حا ى + ١٩٢

∴ ق٢ − ١٦ √٣ ق حا ى + ١٢٨ = ٠   (١)

، ∵ ح تعمل فى إتجاه الشرق   ∴ هـ = ٠

∴ ص = ٠   ∴ ق حا ى = ٨ √٣   (٢)

بالتعويض فى (١) ينتج : ق = ١٦ ث كجم   ، بالتعويض فى (٢) ينتج : ى = ٦٠°

أى أن : ق = ١٦ ث كجم و تعمل فى إتجاه ٦٠° شمال الشرق

٥ ـ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه م أثرت القوى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن فى نقطة م فى إتجاهات م أ ، م ب ، م حـ ، م ء ، م هـ ، م و على الترتيب أوجد محصلة القوى

الحل

من الشكل المقابل و ملاحظة خواص السداسى المنتظم :

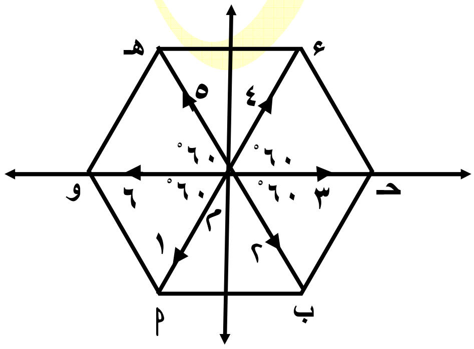
س = ٣ حتا ٠° + ٤ حتا ٦٠° + ٥ حتا ١٢٠° + ٦ حتا ١٨٠° + ١ حتا ٢٤٠° + ٢ حتا ٣٠٠°

= ٣ + ٤ حتا ٦٠° − ٥ حتا ٦٠° − ٦ − ١ حتا ٦٠° + ٢ حتا ٦٠°

= ٣ + ٤ × (١ / ٢) − ٥ × (١ / ٢) − ٦ − ١ × (١ / ٢) + ٢ × (١ / ٢) = − ٣

ص = ٣ حا ٠° + ٤ حا ٦٠° + ٥ حا ١٢٠° + ٦ حا ١٨٠° + ١ حا ٢٤٠° + ٢ حا ٣٠٠°

= ٣ × ٠ + ٤ حا ٦٠° + ٥ حا ١٢٠° + ٦ × ٠ − ١ حا ٦٠° − ٢ حا ٦٠°



= ٦ حا ٦٠° = ٦ × (√٣ / ٢) = ٣ √٣

∴ ح = √(٩ + ٢٧) = ٦ نيوتن

، ظا هـ = ٣ √٣ / (− ٣) = − √٣

∴ المحصلة = ٦ نيوتن و تعمل فى إتجاه م هـ

تمـــــــــارين

١ ــ حلل قوة مقدارها ٤٠ ث جم تؤثر أفقياً إلى مركبتين يميلان على إتجاه القوة بزاويتين قياسهما ٣٠° ، ٥٠° و فى جهتين مختلفتين منها

٢ ــ حلل قوة مقدارها ١٤ ث كجم تؤثر فى إتجاه يميل بزاوية قياسها ٣٠ شمال الشرق إلى مركبتين متعامدتين إحداهما تؤثر فى الشرق

٣ ــ قوتان مقدارها ق تؤثر فى إتجاه زاوية قياسها هـ شمال الغرب حيث طا هـ = $\frac{٣}{٤}$ فإذا حللت هذه القوة إلى مركبتين متعامدتين إحداهما تؤثر نحو الغرب و مقدارها ١٦ نيوتن أوجد ق و مقدار المركبة الأخرى

٤ ــ جسم وزنه ٥٤ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مركبتى الوزن فى إتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الإتجاه العمودى عليه

٥ ــ ثلاث قوى مستوية مقدارها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ث جم تؤثر فى نقطة مادية فى الإتجاهات ٣٠° شمال الشرق ، ٦٠° شمال الغرب ، الجنوب على الترتيب أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

٦ ــ أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٣ ، ٦ ، ٩ $\sqrt{٣}$ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية و كان قياس الزاوية بين الأولى و الثانية ٦٠° ، بين الثانية و الثالثة ٩٠° ، بين الثالثة و الرابعة ١٥٠° أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

٧ ــ أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٢ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ ث جم فى نقطة مادية بحيث كانت الأولى تعمل نحو الشرق ، و قياس الزاوية بين الأولى و الثانية هـ حيث حتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، هـ حادة موجبة ، و القوة الثالثة تقع بين الشمال و الغرب و عمودية على القوة الثانية و الرابعة فى إتجاه الجنوب أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

٨ ــ Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع أثرت القوى التى مقاديرها ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ث جم فى نقطة و فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ا}}$ على الترتيب أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

٩ ــ Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ا ب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ا حـ}}$ بحيث ب ء = ء حـ أثرت القوى التى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٠ نيوتن فى نقطة و فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ على الترتيب أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

١٠ ــ ا ب حـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه م أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ نيوتن فى نقطة ا فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا و}}$ على الترتيب أوجد محصلة القوى

١١ ــ ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٧ سم ، ب حـ = ٣ سم ، و ∈ $\overline{\text{ا ب}}$ بحيث ا و = ٣ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ٣ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ث كجم فى نقطة و فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ء}}$ أوجد مقدار محصلة هذه القوى و أثبت أنها توازى $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

١٢ ــ ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٤ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$ أثرت القوى التى مقاديرها ١ ، ٦ $\sqrt{٥}$ ، ٣ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٥}$ ، ٢ نيوتن فى نقطة ا فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ على الترتيب أوجد مقدار و إتجاه محصلة هذه القوى

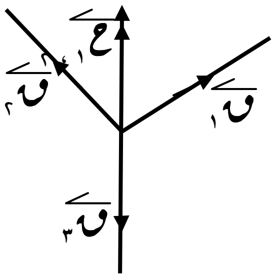
١٣ ــ ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، حـ هـ = ٦ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٧ ، ٢ $\sqrt{٢}$ ، ق ، ٥ ث جم فى نقطة ب فى الإتجاهات $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ على الترتيب فإذا كان مقدار محصلة هذه القوى ١٠ ث جم أوجد ق و إتجاه محصلة هذه القوى

١٤ ــ تؤثر قوى مقاديرها ق ، ١٧ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ $\sqrt{٣}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى إتجاهات الشرق ، الشمال ، شمال الغرب بزاوية قياسها ٣٠° ، جنوب الشرق بزاوية قياسها ٦٠° على الترتيب و كانت محصلة هذه القوى مقدارها ١٥ نيوتن و تؤثر فى إتجاه ٦٠° شمال الشرق أوجد مقدارى ق ، ك

توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

* إذا أتزن جسم تحت تأثير قوتين فقط تكون القوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و يكون خط عملهما واحد

* إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تكون مساوية فى المقدار لمقدار القوة الثالثة و مضادة لها فى الإتجـــــــاه و لهما نفس خط العمل
لا حظ الشكل المقابل

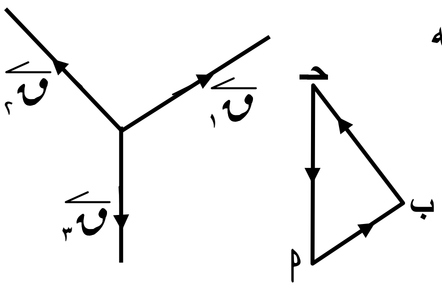


* إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

* لكى تتزن ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث

قاعدة مثلث القوى :

إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث و فى إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة



من الشكل المقابل :

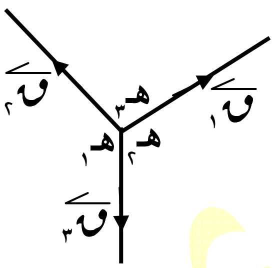
$$\frac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ق}_3}{\text{جـ أ}}$$

ملاحظات :

* من الممكن رسم مثلث القوى بحيث يكون ضلعان من أضلاعه محمولان على خطى عمل قوتين و الضلع الثالث يوازى خط عمل القوة الثالثة
* إذا مقادير ثلاث قوى متزنة و رسم مثلث أطوال أضلاعه تتناسب مع مقادير هذه القوى فإن قياسات زوايا المثلث تكون هى مكملات لقياسات الزوايا بين خطوط عمل القوى الثلاث

قاعدة لامى :

إذا أتزنت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين



من الشكل المقابل :

$$\frac{\text{ق}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{حا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_3}{\text{حا هـ}_3}$$

تلاقى خطوط عمل القوى الثلاث المتزنة :

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية بحيث إلتقى خطا عمل إثنين منها فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالث لابد و أن يمر بهذه النقطة

توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة :

إذا إتزنت مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة فإن المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى كل من إتجاهين متعامدين يتلاشى

أى أن : إذا إتزنت مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة

فإن : $\text{سـ} = 0$ ، $\text{صـ} = 0$

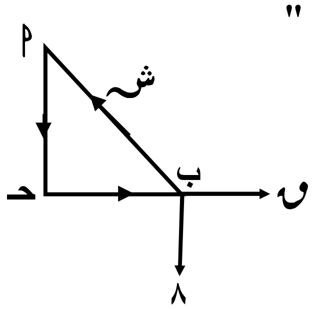
و بالتالى : إذا إتزنت مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة فإن محصلة هذه القوى = صفر

أمثـلة :

١ – جسم وزنه ٨ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ٥٠ سم و الطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسى جذب الجسم بقوة أفقية حتى أتزن على بعد ٣٠ سم من الحائط أوجد مقدار القوة و مقدار الشد فى الخيط

الحل

من الشكل المقابل : Δ أ ب حـ هو مثلث القوى حيث : أ حـ = ٤٠ سم " فيثاغورث "



$$\frac{\text{ق}}{\text{٣٠}} = \frac{\text{٨}}{\text{٤٠}} = \frac{\text{ش}}{\text{٣٠}}$$

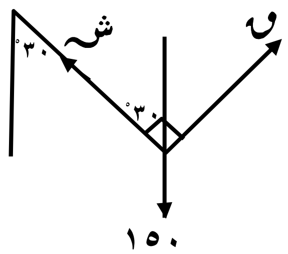
$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{٨} \times \text{٣٠}}{\text{٤٠}} = \text{٦٠ نيوتن}$$

$$\text{، ش} = \frac{\text{٨} \times \text{٥٠}}{\text{٤٠}} = \text{١٠ نيوتن}$$

٢ – جسم وزنه ١٥٠ ث جم معلق فى أحد طرفى خيط خفيف طرفه الآخر مثبت فى نقطة من سقف حجرة أثرت عليه قوة فأتزن عندما كان الخيط يصنع مع الرأسى زاوية قياسها ٣٠° و كانت القوة عمودية على الخيط أوجد مقدار القوة و مقدار الشد فى الخيط

الحل

من الشكل المقابل : بتطبيق قاعدة لامى



$$\frac{\text{ق}}{\text{حا ١٥٠}} = \frac{\text{ش}}{\text{حا ١٢٠}} = \frac{\text{١٥٠}}{\text{حا ٩٠}}$$

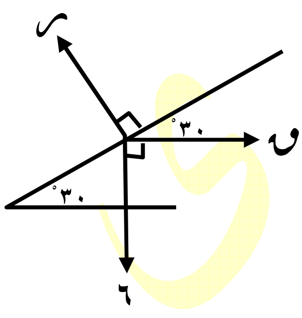
$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{١٥٠ حا ١٥٠}}{\text{حا ٩٠}} = \text{١٥٠} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{٧٥ ث جم}$$

$$\text{، ش} = \frac{\text{١٥٠ حا ١٢٠}}{\text{حا ٩٠}} = \text{١٥٠} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} = \text{٧٥} \sqrt{\text{٣}} \text{ ث جم}$$

٣ – وضع جسم وزنه ٦ ث كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و حفظ توازنه بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار القوة و رد فعل المستوى

الحل

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هى : وزنه ، و القوة الأفقية ، قوة رد فعل المستوى و هى عمودية على المستوى
من الشكل المقابل : بتطبيق قاعدة لامى



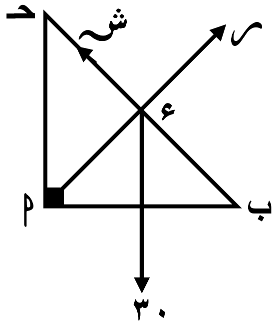
$$\frac{\text{ق}}{\text{حا ١٥٠}} = \frac{\text{٦}}{\text{حا ١٢٠}} = \frac{\text{ر}}{\text{حا ٩٠}}$$

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{٦ حا ١٥٠}}{\text{حا ١٢٠}} = \text{٤} \sqrt{\text{٣}} \text{ ث جم}$$

$$\text{، ر} = \frac{\text{٦ حا ٩٠}}{\text{حا ١٢٠}} = \text{٢} \sqrt{\text{٣}} \text{ ث جم}$$

٤ ــ ؟ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم و وزنه ٣٠ ث جم يتصل بطرفه ؟ بمفصل فى حائط رأسى حفظ فى حالة توازن فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بالطرف ب و بنقطة حـ على الحائط رأسياً فوق ؟ بحيث ؟ حـ = ٥٠ سم أوجد كل من مقدار قوتى الشد فى الخيط و رد فعل المفصل

الحل



∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

، ألتقى خطا عمل كل من وزنه و الشد فى الخيط فى نقطة ء

∴ خط عمل رد فعل المفصل لابد أن يمر بنقطة ء

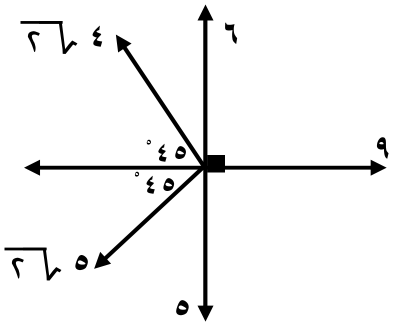
من هندسة الشكل : ب حـ = ١٣٠ سم ، ؟ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٦٥ سم

Δ ؟ ء حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{٣٠}{٥٠} = \frac{\text{شـ}}{٦٥} = \frac{\text{ر}}{٦٥}$ و منها شـ = ر = ٣٩ ث جم

٥ ــ أثرت القوى ٩ ، ٦ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ نيوتن فى نقطة واحدة و تحصر بين إتجاهاتها بين كل قوتين متتاليتين زوايا قياسها ٩٠° ، ٤٥° ، ٩٠° ، ٤٥° على الترتيب لأثبت أن هذه القوى متزنة

الحل



من الشكل :

س = ٩ ــ ٤ $\sqrt{٢}$ حتا ٤٥° ــ ٥ $\sqrt{٢}$ حتا ٤٥° = صفر

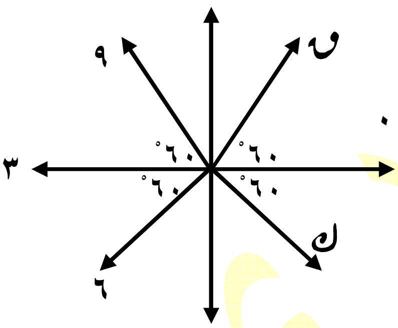
ص = ٦ + ٤ $\sqrt{٢}$ حا ٤٥° ــ ٥ $\sqrt{٢}$ حا ٤٥° ــ ٥ = صفر

∴ ح = صفر

∴ القوى متزنة

٦ ــ أثرت القوى ٥ ، ق ، ٩ ، ٣ ، ٦ ، ك نيوتن فى نقطة واحدة ، قياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين ٦٠° فإذا كانت القوى متزنة أوجد ق ، ك

الحل



∵ القوى متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٥ + ق حتا ٦٠° + ك حتا ٦٠° ــ ٩ حتا ٦٠° ــ ٦ حتا ٦٠ ــ ٣ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ ق + $\frac{١}{٢}$ ك + ٢ ــ ١٥ × $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ق + ك = ١١ (١)

، ق حا ٦٠° ــ ك حتا ٦٠° + ٩ حا ٦٠° ــ ٦ حا ٦٠ = ٠

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق ــ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك + ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ق ــ ك = ــ ٣ (٢)

بحل (١) ، (٢) معاً ينتج : ق = ٤ نيوتن ، ك = ٧ نيوتن

تمـــــــــارين

١ – جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم و طرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى أثرت قوة أفقية عليه فأتزن أوجد مقدار قوة الشد فى الخيط عندما :
ﺃ – يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط
ب – عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠ ْ

٢ – كرة مصمتة وزنها ١٥ ث كجم و طول نصف قطرها ٣٠ سم علقت بواسطة خيط طوله ٢٠ سم من نقطة على سطحها و ثبت الطرف الآخر فى نقطة فى حائط رأسى أعلى نقطة التماس لسطح الكرة مع الحائط أوجد فى وضع التوازن مقدار قوة الشد فى الخيط و الضغط على الحائط

٣ – علق جسم وزنه ٦٨ نيوتن بواسطة خيطين طولاهما ٨ سم ، ١٥ سم و ثبت الطرف الآخر لهما فى نقطتين فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما ١٧ سم أوجد فى وضع التوازن مقدار قوة الشد فى كل من الخيطين

٤ – جسم وزنه ٦ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ ْ فأتزن تحت تأثير قوة شد فى إتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى أوجد مقدار هذه القوة و مقدار رد فعل المستوى على الجسم

٥ – مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{3}{5}$ وضع جسم وزنه ١٢ ث جم و حفظ من الإنزلاق " إتزن " بتأثير قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة و مقدار رد فعل المستوى على الجسم

٦ – ﺃ ب قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن يستند فى حالة توازن بطرفه ﺃ على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على مستوى أملس يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥ ْ أوجد مقدار رد فعل الحائط و رد فعل المفصل على طرفى القضيب

٧ – ﺃ ب قضيب منتظم طوله ٢٥٠ و وزنه ٧٥٠ ث جم ربط طرفيه بخيطين خفيفين طولاهما ٧٠ سم ، ٢٤٠ سم و ثبت الطرفان الآخران للخيطين فى نقطة ﺣ فى سقف حجرة أوجد فى وضع التوازن مقدار قوة الشد فى كل من الخيطين

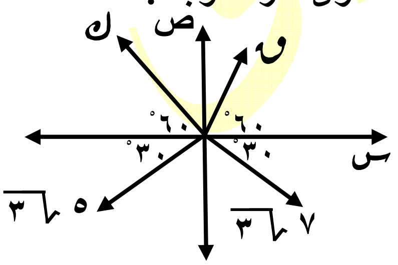
٨ – سلم منتظم وزنه ٢٤ ث كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس عند نقطة على إرتفاع ٢.٤ م من سطح الأرض و يرتكز بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنه تبعد عن الحائط ٢ م أوجد مقدار قوتى رد فعل كل من الحائط و الأرض على السلم

٩ – أثرت قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٣ ، ١٧ ث جم فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين إتجاهى كل قوتين متتاليتين ٦٠ ْ أثبت أن النقطة متزنة

١٠ – أثرت القوى المستوية ق ، ٨ ، ك ، ٢ √٢ ث جم فى نقطة مادية و كان قياس الزوايا بين كل قوتين متتاليتين كالآتى ١٣٥ ْ ، ٩٠ ْ ، ٤٥ ْ على الترتيب فإذا كانت القوى متزنة أوجد كلاً من ق ، ك

١١ – ﺃ ب ﺣ ء مربع ، ﻫ ∈ ﺃ ء أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ٤ √٣ ، ١٠ √٢ ث جم فى نقطة ب فى الإتجاهات ب ﺃ ، ب ﻫ ، ء ب ، ب ﺣ على الترتيب فإذا كانت هذه القوى متزنة أوجد ق (∠ ﺃ ب ﻫ) و قيمة ق

١٢ – فى الشكل المقابل : قوى مقاديرها ق ، ك ، ٥ √٣ ، ٧ √٣ نيوتن تؤثر فى نقطة و تصنع مع محور السينات زوايا قياساتها كما بالشكل فإذا كانت القوى متزنة أوجد كل من ق ، ك



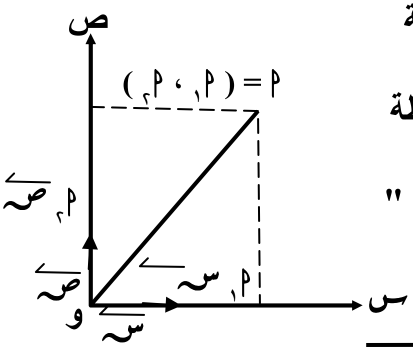
١٣ – خيط خفيف طوله ٢٥ سم مثبت من نهايتيه فى مسمارين ب ، ﺣ يقعان على خط أفقى واحد ، ب ﺣ = ١٥ سم لضمت حلقة صغيرة ملساء وزنها ١٢٥ ث جم فى الخيط ثم جذبت بقوة أفقية حتى أتزنت رأسياً أسف نقطة ﺣ أوجد مقدار الشد فى كل من فرعى الخيط عندئذ و مقدار القوة الأفقية

العـــــــزوم

مفاهيم أساسية :

* الكمية المتجهة : هى الكمية التى تتعين بمعرفة مقدارها و إتجاهها مثل : الإزاحة ، السرعة ، العجلة ، القوة
* الكمية القياسية : هى الكمية التى تتعين بمعرفة مقدارها مثل : الزمن ، الكتلة ، الحجم
* معيار المتجه : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ متجه فإن مقداره يسمى معيار المتجه و يرمز بالرمز أ أو $\| \overleftarrow{أ} \|$
* يمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة موجهة بحيث يكون طولها ممثلاً لمعيار المتجه " وفق مقياس رسم مناسب " و إتجاهها هو إتجاه المتجه
* متجه الموضع لنقطة معلومة :

إذا كانت أ = ($أ_١$ ، $أ_٢$) وفق نظام إحداثى متعامد فيه :



$\overleftarrow{س}$ متجه وحدة أساسى " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة الأصل " و " لنظام إحداثى متعامد و معياره الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{و س}$

، $\overleftarrow{ص}$ متجه وحدة أساسى " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة الأصل " و " لنظام إحداثى متعامد و معياره الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{و ص}$

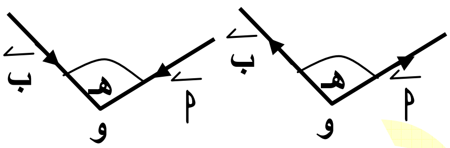
فإن : $\overleftarrow{و أ}$ " $\overleftarrow{أ}$ " يسمى متجه الموضع لنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل " و "

، يسمى $أ_١$ المركبة الجبرية للمتجه و أ فى إتجاه $\overleftarrow{س}$

، يسمى $أ_٢$ المركبة الجبرية للمتجه و أ فى إتجاه $\overleftarrow{ص}$

* إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = ($أ_١$ ، $أ_٢$) = $أ_١$ $\overleftarrow{س}$ + $أ_٢$ $\overleftarrow{ص}$ فإن : أ = $\sqrt{أ_١^٢ + أ_٢^٢}$
* إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = $أ_١$ $\overleftarrow{س}$ + $أ_٢$ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = $ب_١$ $\overleftarrow{س}$ + $ب_٢$ $\overleftarrow{ص}$ و كان :
  * $\overleftarrow{أ ب}$ = $\overleftarrow{ب}$ − $\overleftarrow{أ}$ = ($ب_١$ − $أ_١$) $\overleftarrow{س}$ + ($ب_٢$ − $أ_٢$) $\overleftarrow{ص}$
  * $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ فإن : $أ_١$ $ب_٢$ − $أ_٢$ $ب_١$ = صفر
  * $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ فإن : $أ_١$ $ب_١$ + $أ_٢$ $ب_٢$ = صفر

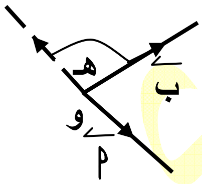
* **الزاوية بين متجهين :**



هى الزاوية الصغرى المحصورة قطعتين مستقيمتين موجهتين لهما نفس نقطة البداية أو النهاية " خارجتين من (داخلتين فى) نفس النقطة "

* إذا كان هـ قياس الزاوية الصغرى بين متجهين فإن ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°

ملاحظة :



فى الشكل المقابل : إذا كانت القطعتان المستقيمتان الموجهتان لمتجهين إحداهما خارجة من نقطة " و " ، و الأخرى خارجة من نقطة " و " فإن : الزاوية الصغرى بين المتجهين تكون هى الزاوية المحصورة بين إحدى القطعتين الموجهتين و إمتداد القطعة الموجهة الأخرى من جهة " و "

* **حاصل الضرب القياسى لمتجهين :**

هو الكمية القياسية المساوية لحاصل ضرب معيار المتجه الأول فى معيار المتجه الثانى فى جيب تمام الزاوية الصغرى المحصورة بينهما

أى أن : $\overleftarrow{أ}$ ⊙ $\overleftarrow{ب}$ = أ ب حتا هـ

حيث : $\overleftarrow{أ}$ ⊙ $\overleftarrow{ب}$ حاصل الضرب القياسى ، أ ، ب معيارى المتجهين

* إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = $أ_١$ $\overleftarrow{س}$ + $أ_٢$ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = $ب_١$ $\overleftarrow{س}$ + $ب_٢$ $\overleftarrow{ص}$

فإن : $\overleftarrow{أ}$ ⊙ $\overleftarrow{ب}$ = $أ_١$ $ب_١$ + $أ_٢$ $ب_٢$

* نتائج :

* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{0} =$ صفر   حيث : $\overleftarrow{0}$ هو المتجه الصفرى
* $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}$
* حاصل الضرب القياسى لأى متجه فى نفسه يساوى مربع معياره

أى أن : لأى متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ يكون : $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}^2$

* حاصل الضرب القياسى لمتجهين غير صفريين يكون :
  * موجباً إذا كانت الزاوية الصغرى حادة
  * سالباً إذا كانت الزاوية الصغرى منفرجة
  * صفراً إذا كانت الزاوية الصغرى قائمة

* المسقط الجبرى لمتجه فى إتجاه متجه آخر :

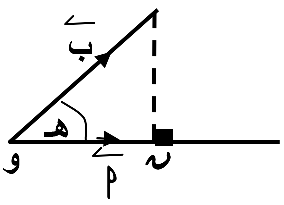
المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو الكمية القياسية ب حتا هـ

حيث : هـ هو قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين ،

و يكون موجباً أو سالباً أو صفراً حسب نوع الزاوية هـ حادة أو منفرجة أو قائمة

فى الشكل المقابل :

و ن هى مسقط $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$



ملاحظة :

$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times$ المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

$= \overleftarrow{\text{ب}} \times$ المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$

* نتيجة :

$\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = 1$ ، $\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{س}} =$ صفر

* متجه الوحدة فى إتجاه متجه معلوم :

متجه الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو المتجه $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

* المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

$= \overleftarrow{\text{ق}} \odot \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$ " المسقط الجبرى "

* حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين فإن حاصل الضرب الإتجاهى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$

" يرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ " يعرف كالآتى : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب حا هـ})\, \overleftarrow{\text{ى}}$

حيث هـ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين ، ى متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يقع فيه المتجهين

* إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \text{ب}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ فإن :

$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\, \overleftarrow{\text{ع}}$

حيث : $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجه وحدة عمودى على الذى يجمع $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ " $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية "

* ملاحظات و نتائج :

* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ هو متجه ، معياره $= \|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\| =$ أ ب حا هـ
* متجه الوحدة فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ هو المتجه $\overleftarrow{\text{ى}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}}{\text{أ ب حا هـ}}$
* $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{0} \times \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0}$
* $\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = -(\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$
* إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \,//\, \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} =$ صفر

* $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص}$
* $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} = - \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = - \overleftarrow{ع}$
، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص} = - \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = - \overleftarrow{س}$
، $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} = - \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = - \overleftarrow{ص}$
* المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :
معيار حاصل الضرب الإتجاهى لأى متجهين يمثله هندسياً مساحة سطح متوازى الأضلاع الذى فيه القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين المتجهين ضلعين متجاورين فيه أو يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

أمثلة :

١ – أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{م} = ٤ \overleftarrow{س} + ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = (٠ ، ٤)$
ثم عين المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{م}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{ب}$

الحل

$\overleftarrow{م} \odot \overleftarrow{ب} = ٤ \times ٠ + ٣ \times ٤ = ١٢$

$م = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ ، $ب = \sqrt{١٦ + ٠} = ٤$

$\because \overleftarrow{م} \odot \overleftarrow{ب} = م \, ب$ حتا هـ $\therefore ١٢ = ٥ \times ٤$ حتا هـ $\therefore$ حتا هـ $= \frac{٣}{٥}$

$\therefore$ هـ $= ٥٣° \; ٧'$

، المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{م}$ فى إتجاه المتجه $\overleftarrow{ب}$ = م حتا هـ $= ٥ \times \frac{٣}{٥} = ٣$

٢ – إذا كان $\overleftarrow{م} = - ٤ \overleftarrow{س} + ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = - ٨ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$ أوجد :
$\overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب}$ و فسر المعنى الهندسى لمعياره ثم أوجد متجه وحدة عمودى على كل من هذين المتجهين

الحل

$\overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب} = (م_١ ب_٢ - م_٢ ب_١) \overleftarrow{ع} = (- ٤ \times ٥ + ٣ \times ٨) \overleftarrow{ع} = ٤ \overleftarrow{ع}$

$\therefore \| \overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب} \| = ٤$ وحدة مساحة

أى أن : مساحة سطح متوازى الأضلاع الذى فيه ضلعان متجاوران يمثلان هذين المتجهين = ٤ وحدة مساحة
متجه الوحدة العمودى على كل من هذين المتجهين $= \frac{١}{٤} (\overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب})$

٣ – إذا كانت م = (٢ ، ١) ، ب = (– ٣ ، ٢) ، حـ = (٣ ، ٦) أثبت أن $\overleftarrow{م ب} \perp \overleftarrow{م حـ}$ ثم أوجد
المركبة الجبرية للقوة $\overleftarrow{ق} = ٦ \overleftarrow{س} + ٤ \overleftarrow{ص}$ فى إتجاه $\overleftarrow{م حـ}$
، إذا كانت ء = (ك ، ٣) أوجد قيمة ك التى تجعل م // ء

الحل

$\overleftarrow{م ب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{م} = - ٥ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{م حـ} = \overleftarrow{حـ} - \overleftarrow{م} = \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$

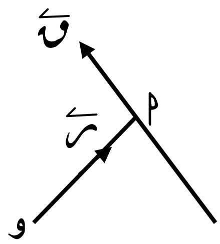
$\therefore \overleftarrow{م ب} \odot \overleftarrow{م حـ} = - ٥ + ٥ = ٠$ $\therefore \overleftarrow{م ب} \perp \overleftarrow{م حـ}$

المركبة الجبرية للقوة ق فى إتجاه $\overleftarrow{م حـ} = \overleftarrow{ق} \odot \frac{\overleftarrow{م حـ}}{\| \overleftarrow{م حـ} \|} = \frac{٢٦}{\sqrt{٢٦}} = \sqrt{٢٦}$

$\because \overleftarrow{م} // \overleftarrow{ء}$

$\therefore ك \times ١ - ٣ \times ٢ = ٠$ و منها : ك = ٦

عزم قوة بالنسبة لنقطة :



* **تعريف :**

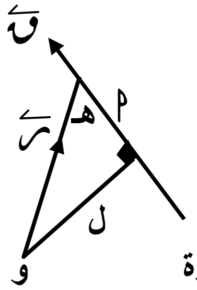
يعرف عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة " و "

و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ا}_{و}$ على أنه الكمية المتجهة $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

أى أن : $\overleftarrow{ا}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

حيث : $\overleftarrow{ر}$ متجه الموضع لأى نقطة " م مثلاً " على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة " و "

ملاحظات :



١ – $\| \overleftarrow{ا}_{و} \|$ = ر ق حا هـ = ل ق

حيث : هـ قياس الزاوية الصغرى بين $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{ق}$

، ل = ر حا هـ

، ل هو ذراع القوة (طول العمود الساقط على خط عمل القوة من النقطة " و ")

٢ – وحدة قياس معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة = وحدة قياس طول × وحدة قياس معيار قوة

٣ – عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لأى نقطة على خط عمل القوة

٤ – عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى

" معيار عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها = صفر "

أو يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

أمثلة :

١ – القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ – ٣ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ = (٥ ، ٨) أوجد عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (٣ ، ٥) ثم أوجد طول العمود المرسوم من ب على خط عمل هذه القوة

الحل

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ب حـ}$ = $\overleftarrow{حـ}$ – $\overleftarrow{ب}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ا}_{ب}$ = $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ = (٢ $\overleftarrow{س}$ – ٣ $\overleftarrow{ص}$) × (٤ $\overleftarrow{س}$ – ٣ $\overleftarrow{ص}$) = – ١٨ $\overleftarrow{ع}$

∴ $\| \overleftarrow{ا}_{ب} \|$ = ١٨ ، $\| \overleftarrow{ق} \|$ = ق = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥

∴ طول العمود المرسوم من ب على خط عمل القوة = $\frac{\| \overleftarrow{ا}_{ب} \|}{ق} = \frac{١٨}{٥}$ = ٣.٥

٢ – قوة $\overleftarrow{ق}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة حـ (١ ، – ٣) ، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة للنقطة ب (– ٥ ، ١) يساوى – ٢١ وحدة عزم ، و ينعدم عزمها بالنسبة للنقطة ء (٢ ، – ٧)
أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ و معادلة خط عملها

الحل

$\overleftarrow{ر}_{١}$ = (١ ، – ٣) – (– ٥ ، ١) = (٦ ، – ٣)

∴ $\overleftarrow{ا}_{ب}$ = (٣ ل + ٦ م) $\overleftarrow{ع}$ = – ٢١ $\overleftarrow{ع}$ ∴ ل + ٢ م = – ٧ (١)

، $\overleftarrow{ر}_{٢}$ = (١ ، – ٣) – (٢ ، – ٧) = (– ١ ، ٤)

∴ $\overleftarrow{ا}_{حـ}$ = (– ٤ ل – م) $\overleftarrow{ع}$ = $\overleftarrow{٠}$ ∴ – ٤ ل – م = ٠ (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج : ل = ١ ، م = – ٤ ∴ ق = $\sqrt{١٦ + ١}$ = $\sqrt{١٧}$

∴ ميل $\overleftarrow{ق}$ = – $\frac{٤}{١}$ ∴ معادلة خط عملها هى : ص + ٣ = – ٤ (س – ١)

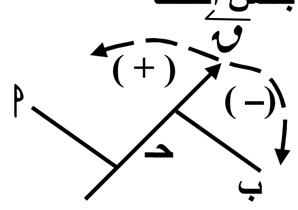
عزوم القوى المستوية :

جميع متجهات عزوم القوى المستوية " التى تقع خطوط عملها فى مستو واحد " بالنسبة لنقطة واقعة فى نفس المستوى تكون متوازية و عمودية على مستوى هذه القوى و معيار كل منها يساوى حاصل ضرب معيار القوة فى طول العمود الساقط من النقطة على خط عملها

قاعدة الإشارة لعزم قوة حول نقطة :

عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون صفراً إذا كان خط عمل القوة يمر بنفس النقطة

ففى الشكل المقابل :



عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ موجب

عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب سالب

عزم $\overleftarrow{ق}$ حول حـ = صفر

نتائج :

* إذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ = عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب

فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$

* إذا كان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ = – (عزم $\overleftarrow{ق}$ حول ب)

فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{أب}$

نظرية العزوم :

مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

أمثلة :

١ – أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط على مستقيم واحد حيث أ ب = ٢ ب حـ = ٣ حـ ء = ٢ ء هـ = ١٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٣٠ ، ٢٠ ، ١٥ ، ١٠ ، ٢٥ نيوتن أ ، حـ ، هـ ، ب ، ء على الترتيب فى إتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{أهـ}$ بحيث كانت القوتين عند ب ، ء فى إتجاه مضاد للقوى عند أ ، حـ ، هـ أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ ، ء ، أ

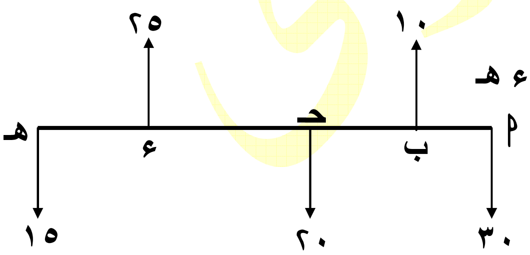
الحل

المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول حـ =

= – ٣٠ × أ حـ + ١٠ × ب حـ + ٢٠ × ٠ – ٢٥ × ء حـ + ١٥ × حـ هـ

= – ٣٠ × ٣٠ + ١٠ × ٢٠ – ٢٥ × ٣٠ + ١٥ × ٥٠

= – ٧٠٠ نيوتن ٠ سم



المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول ء =

= – ٣٠ × أ ء + ١٠ × ب ء – ٢٠ × حـ ء – ٢٥ × ٠ + ١٥ × ء هـ

= – ٣٠ × ٦٠ + ١٠ × ٥٠ – ٢٠ × ٣٠ + ١٥ × ٢٠

= – ١٦٠٠ نيوتن ٠ سم

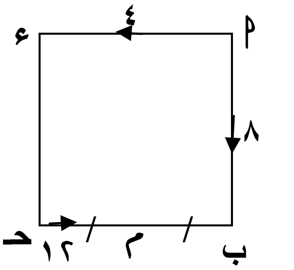
المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول أ =

= ٣٠ × ٠ – ١٠ × أ ب + ٢٠ × أ حـ – ٢٥ × أ ء + ١٥ × أ هـ

= – ١٠ × ١٠ + ٢٠ × ٣٠ – ٢٥ × ٦٠ + ١٥ × ٨٠

= – ٢٠٠ نيوتن ٠ سم

٢ – أ ب حـ ء مربع طول ضلعه أثرت القوى ٨ ، ٤ ، ١٢ نيوتن فى أب ، أء ، حـب على الترتيب
أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول كل من : ء ، منتصف ب حـ



الحل

مجموع عزوم هذه القوى حول كل من ء =

= ١٢ × ١٠ + ٤ × ٠ – ٨ × ١٠ = ٤٠ نيوتن . سم

مجموع عزوم هذه القوى حول كل من منتصف م " ب حـ " =

= ١٢ × ٠ + ٤ × ١٠ – ٨ × ٥ = صفر

٣ – تؤثر القوة ق = ٣ س – ٢ ص فى النقطة هـ (– ٤ ، ١) فإذا كانت ب = (– ١ ، ٢) ، حـ = (٢ ، ٠) ، ء = (– ٤ ، – ٢) أثبت أن خط عمل ق يوازى ب حـ و يمر بمنتصف حـ ء

الحل

ر١ = (– ٤ ، ١) – (– ١ ، ٢) = – ٣ س – ص

∴ $ع_ب$ = (٦ + ٣) ع = ٩ ع

، ر٢ = (– ٤ ، ١) – (٢ ، ٠) = – ٦ س + ص

∴ $ع_{حـ}$ = (١٢ – ٣) ع = ٩ ع

ر٣ = (– ٤ ، ١) – (– ٤ ، – ٢) = ٣ ص

∴ $ع_ء$ = (٠ – ٩) ع = – ٩ ع

∵ $ع_ب$ = $ع_{حـ}$ ∴ خط عمل ق // ب حـ

∵ $ع_{حـ}$ = – $ع_ء$ ∴ خط عمل ق ينصف ب حـ

٤ – تؤثر القوى ق١ = س + ص ، ق٢ = – ٥ س + ٢ ص ، ق٣ = ٢ س
فى نقطة حـ (٢ ، – ٣) اثبت أن خط عمل المحصلة لهذه القوى يمر بنقطة الأصل " و " ،
ثم أوجد طول العمود الساقط من نقطة ب (١ ، ١) على خط عمل المحصلة

الحل

ر = ٢ س – ٣ ص

مجموع عزوم القوى حول " و " = ر × ق١ + ر × ق٢ + ر × ق٣

= ر × (ق١ + ق٢ + ق٣) = (٢ س – ٣ ص) × (– ٢ س + ٣ ص)

= ٠ ، ∵ ح ≠ ٠ ∴ ر = ٠

∴ خط عمل المحصلة لهذه القوى يمر بنقطة الأصل " و "

ر١ = (٢ ، – ٣) – (١ ، ١) = س – ٤ ص

∵ عزم المحصلة حول ب = مجموع عزوم القوى حول ب

∴ ر × ح = (س – ٤ ص) × (– ٢ س + ٣ ص) = – ٥ ع

طول العمود الساقط من ب على خط عمل المحصلة = $\frac{\|ر \times ح\|}{\|ح\|} = \frac{٥}{\sqrt{١٣}}$

تمـــــــــارين

١ ــ إذا كانت ﺃ = (١ ، ١) ، ب = (٥ ، ــ ٢) ، حـ = (٣ ، ٦) أوجد قيمة ﺃ ب × ﺃ حـ
ثم أحسب مساحة سطح المثلث ﺃ ب حـ

٢ ــ إذا كانت ﺃ ، ب ، حـ متجهات وحدة بحيث كان قياس الزاوية بين ﺃ ، ب = قياس الزاوية بين (ﺃ × ب) ، حـ = هـ أثبت أن (ﺃ × ب) ⊙ حـ = ½ حا ٢ هـ

٣ ــ إذا كانت ق = ٢ س ــ ٣ ص تؤثر في نقطة ﺃ = (٣ ، ــ ١) و كانت ب = (ــ ١ ، ٢) أوجد المركبة الجبرية للقوة ق لإى إتجاه ﺃ ب

٤ ــ إذا كان ﺃ = ٨ ، ب = ٥ أثبت أن (ﺃ ⊙ ب)٢ + ‖ ﺃ × ب ‖٢ = ١٦٠٠

٥ ــ إذا كانت ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث متجهات يمثلها تمثيلاً تاماً أضلاع المثلث ﺃ ب حـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد أثبت أن ق١ × ق٢ = ق٢ × ق٣ = ق٣ × ق١

٦ ــ إذا كانت ق = م س ــ ٣ ص تؤثر في نقطة ﺃ = (٥ ، ٣) و كان عزمها بالنسبة لنقطة ب = (٧ ، ــ ٤) يساوى ٢٠ ع أوجد قيمة م

٧ ــ تؤثر القوى ق١ = ٢ س ــ ٣ ص ، ق٢ = ٥ س ــ ٣ ص ، ق٣ = ــ ٣ س + ٢ ص فى نقطة ﺃ = (ــ ٣ ، ٥) أوجد متجه عزم محصلة هذه القوى حول النقطة ب = (١ ، ٧) ثم أوجد البعد بين خط عمل المحصلة و نقطة ب و أثبت أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة حـ = (٥ ، ــ ١)

٨ ــ إذا كانت ب = (١ ، ٢) ، حـ = (ــ ٩ ، ٤) و كان متجه عزم القوة ق هو المتجه الصفرى ، و متجه عزمها حول ب = ــ عزمها حول حـ = ــ ٥.٥ ع عين معيار القوة و بعد خط عملها عن ب

٩ ــ ∆ ﺃ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه ﺃ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٦ سم أثرت قوة فى مستوى المثلث و كان عزمها حول ﺃ = عزمها حول حـ = ــ ٧٢ ث جم ٠ سم ، عزمها حول ب = ٧٢ ث جم ٠ سم عين مقدار و إتجاه و خط عمل هذه القوة

١٠ ــ تؤثر القوة ق = ٢ س + ٣ ص فى النقطة ﺃ = (١ ، ١) فإذا كانت ب = (٢ ، ٤) ، حـ = (٤ ، ٧) ، ء = (٠ ، ــ ٢) ، هـ = (ــ ١ ، ــ ٢) أثبت أن خط عمل هذه القوة :
* يوازى ب حـ ، * ينصف حـ ء ، * يمر بنقط هـ

١١ ــ ﺃ ، ب ، حـ ، ء ، هـ نقط على مستقيم واحد حيث ﺃ ب = ب حـ = حـ ء = ء هـ = ٢٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ٥ ، ق ، ٦ ، ٨ ، ٧ نيوتن ﺃ ، حـ ، هـ ، ب ، ء على الترتيب فى إتجاه عمودى على ﺃ هـ بحيث كانت القوتين عند ب ، ء فى إتجاه مضاد للقوى عند ﺃ ، حـ ، هـ فإذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ب = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول حـ أوجد ق ، و أوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول هـ

١٢ ــ ﺃ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ١٠ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ نيوتن فى ﺃ ب ، ب حـ ، حـ ء ، هـ ء ، و هـ ، ﺃ و على الترتيب أوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول : نقطة ﺃ ، مركز المسدس

١٣ ــ ﺃ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﺃ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ ب حـ ء) = ٦٠° أثرت القوى ٧ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ث كجم فى ﺃ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﺃ ء على الترتيب أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من ﺃ ، حـ

١٤ ــ ﺃ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوى ٨ ، ق ، ك ث جم فى ﺃ ب ، ﺃ ء ، حـ ب على الترتيب فإذا أنعدم مجموع عزوم هذه القوى حول كل من منتصفى ب حـ ، حـ ء أوجد ق ، ك

القوى المتوازية المستوية

نعلم أن :

لتعيين محصلة مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة يلزم معرفة :

١ ــ معيارها ٢ ــ الإتجاه الذى تعمل فيه إذ أن خط عملها يمر بنقطة تلاقى مجموعة القوى

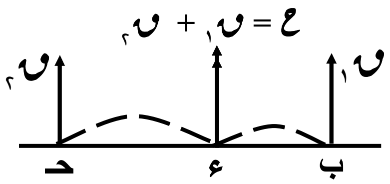
أما : لتعيين محصلة مجموعة القوى غير المتلاقية فى نقطة و التى تؤثر فى جسم متماسك يلزم معرفة :

١ ــ معيارها ٢ ــ الإتجاه الذى تعمل فيه

٣ ــ خط عملها أى معرفة نقطة من الجسم يمر بها خط عمل المحصلة

*** محصلة قوتين متوازيتين :**

١ ــ القوتان متحدا الإتجاه :



محصلة قوتين متوازيتين و متحدى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = مجموع معيارى القوتين أى : $\text{ع} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$

(٢) إتجاهها هو نفس إتجاه القوتين

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية لمعياريهما

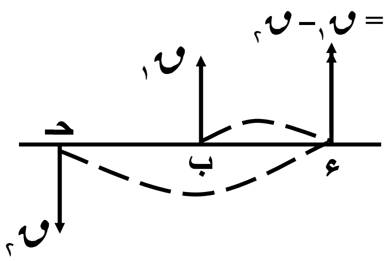
أى من الشكل المقابل يكون : $\text{ق}_1 \times \text{ب ء} = \text{ق}_2 \times \text{ء حـ}$

نتائج :

١ ــ محصلة قوتين متوازيتين و متساويتين فى المعيار و متحدى الإتجاه هى قوة معيارها ضعف معيار إحدى القوتين و فى إتجاههما و خط عملها ينصف المسافة بين القوتين

٢ ــ إذا كان : $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$ فإن : ء حـ > ب ء

٢ ــ القوتان متضادتان فى الإتجاه :



محصلة قوتين متوازيتين و متضادتين فى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = الفرق بين معيارى القوتين

أى : $\text{ع} = \text{ق}_1 - \text{ق}_2$ حيث : $\text{ق}_1 > \text{ق}_2$

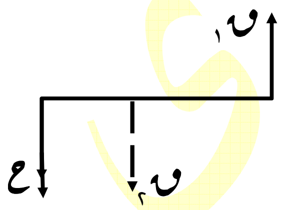
(٢) إتجاهها هو إتجاه القوة ذات المعيار الأكبر

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج ناحية القوة الأكبر بنسبة عكسية لمعياريهما أى من الشكل المقابل يكون : $\text{ق}_1 \times \text{ب ء} = \text{ق}_2 \times \text{ء حـ}$

ملاحظة :

إذا علم معيار إحدى قوتين متوازيتين ق_1 و معيار محصلتيهما ع فلتعيين معيار القوة الثانية ق_2 يراعى :

١ ــ إذا كانت ق_1 ، ع فى إتجاهين متضادتين :



فإن : $\text{ق}_2 = \text{ع} + \text{ق}_1$

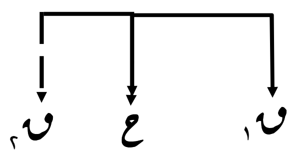
و خط عمل ق_2 يقع بين خطى عمل ق_1 ، ع

و فى إتجاه ع كما بالشكل المقابل

٢ ــ إذا كانت ق_1 ، ع فى إتجاه واحد :

(١) إذا كان : $\text{ع} > \text{ق}_1$

فإن : $\text{ق}_2 = \text{ع} - \text{ق}_1$



خط عمل ق_2 يقع خارج خطى عمل ق_1 ، ع ناحية ع

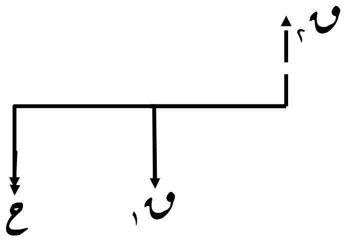
و فى إتجاه ع كما بالشكل المقابل

(٢) إذا كان : ع > ق١

فإن : ق٢ = ق١ – ع

خط عمل ق٢ يقع خارج خطى عمل ق١ ، ع ناحية ق١

و فى إتجاه ع كما بالشكل المقابل



*** محصلة عدة قوى متوازية و مستوية :**

الخطوات :

١ – نفرض متجه وحدة فى إتجاه إحدى القوى و يكون :
القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى

٢ – القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة

*** توازن أكثر من ثلاث قوى متوازية مستوية :**

إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :

١ – مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

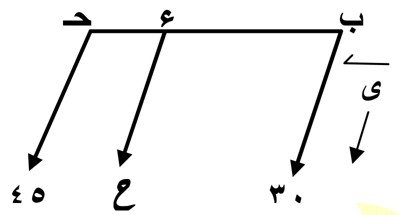
٢ – مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر

أمثلة :

١ – قوتان متوازيتان مقدارهما ٣٠ ، ٤٥ ث جم تؤثران فى النقطتين ب ، حـ على الترتيب من جسم متماسك حيث ب حـ = ١٦ سم عين محصلتهما إذا كانت القوتان :

أولاً : فى إتجاه واحد ثانياً : فى إتجاهين متضادين

الحل



أولاً : نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه القوتين

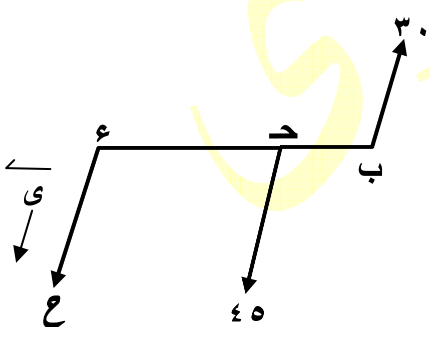
∴ $\overleftarrow{ع}$ = ٣٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٤٥ $\overleftarrow{ى}$ = ٧٥ $\overleftarrow{ى}$ ∴ ع = ٧٥ ث جم

بفرض ء ∈ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ و تقع على خط عمل $\overleftarrow{ع}$ ،

∴ ٣٠ × ب ء = ٤٥ × (١٦ – ب ء)

و منها ينتج : ب ء = $\frac{٤٨}{٥}$ = ٩.٦ سم

ثانياً : نفرض أن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه القوة الأكبر معياراً :



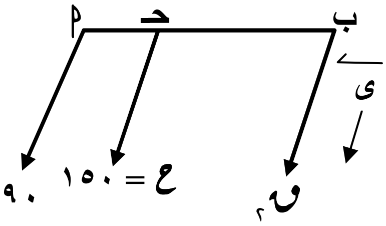
∴ $\overleftarrow{ع}$ = ٤٥ $\overleftarrow{ى}$ – ٣٠ $\overleftarrow{ى}$ = ١٥ $\overleftarrow{ى}$ ∴ ع = ١٥ ث جم

∴ ٤٥ × حـ ء = ٣٠ × (١٦ + حـ ء)

و منها ينتج : حـ ء = ٣٢ سم

٢ – قوتان متوازيتان متحدا الإتجاه الأولى مقدارها ٩٠ نيوتن و تؤثر فى نقطة أ من جسم متماسك و الأخرى فى نقطة ب من نفس الجسم فإذا كان مقدار محصلتهما ١٥٠ نيوتن و تؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ب حـ = ٢٤ سم أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

الحل



∵ ح > $ق_1$ ∴ $ق_2$ فى نفس إتجاه $ق_1$

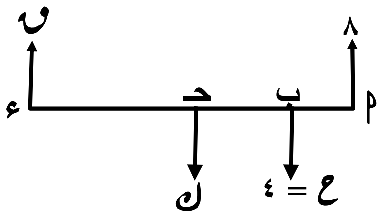
∴ $ق_2$ = ١٥٠ – ٩٠ = ٦٠ نيوتن

∴ ٣٦ × ٥٠ = ٦٠ × ب حـ

و منها : ب حـ = ٣٠ سم   ∴ أ ب = ٤٠ سم

٣ – أ ، ب ، حـ ، ء نقط تقع على مستقيم واحد حيث أ ب = ١٠سم ، ب حـ = ٣٠ سم ، حـ ء = ٤٠ سم أثرت القوتين ٨ ، ق نيوتن فى أ ، ء على الترتيب رأسياً لأعلى ، القوة ك نيوتن فى حـ رأسياً لأسفل فإذا كانت محصلة هذه القوى مقدارها ٤ نيوتن و تعمل رأسياً لأسفل أوجد ق ، ك

الحل



نعتبر $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$

∴ ٤ = ك – ٨ – ق   ∴ ك – ق = ١٢   (١)

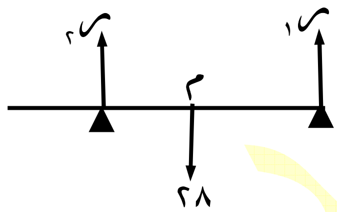
∵ القياس الجبرى لعزم المحصلة حول ء = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ء

∴ – ٤ × ٧٠ = ٨ × ٨٠ – ق × ٤٠

∴ ق = ٢٣ نيوتن   بالتعويض فى (١) ينتج : ك = ١١ نيوتن

٤ – قضيب منتظم طوله ٣ متر و وزنه ٢٨ ث جم يؤثر فى منتصفه فإذا أرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند أحد طرفيه و الآخر على بعد متر واحد من الطرف الآخر أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين

الحل



بفرض أن مركز القضيب هو م

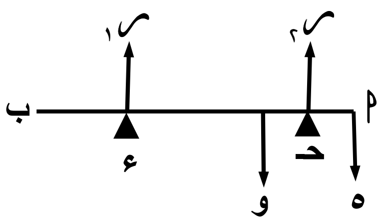
∵ القضيب متزن   ∴ $ر_1$ + $ر_2$ = ٢٨   (١)

، $ع_م$ = ٠   ∴ $ر_2$ × ١.٥ – $ر_1$ × ٠.٥   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $ر_1$ = ٢١ ث جم ، $ر_2$ = ٧ ث جم وهما يساويان الضغط على الحاملين

٥ – أ ب قضيب غير منتظم طوله متر واحد يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث أ حـ = ٢٠ سم ، ب ء = ١٠ سم فإذا كان أكبر ثقل يعلق من الطرف أ لحفظ التوازن هو ٥ ث كجم و أكبر ثقل يعلق من الطرف ب لحفظ التوازن هو ٤ ث كجم أوجد وزن القضيب و نقطة تأثيره

الحل



بفرض أن وزن القضيب = و ث كجم

و أنه يؤثر فى نقطة م حيث أ م = س سم

فى الحالة الأولى فى وضع الإتزان :

$ر_1$ = ٠

∴ $ر_2$ = ٥ + و   (١)

، |أ = ٠

∴ و س = ٢٠ ر٢ (٢)

∴ و (س − ٢٠) = ١٠٠ (٣)

فى الحالة الثانية :

ر٢ = ٠

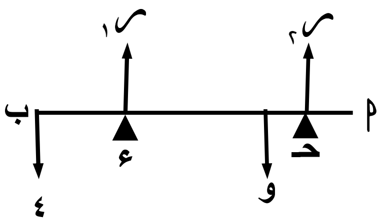
∴ ر١ = ٤ + و (٤)

، |أ = ٠

∴ و س + ٤ × ١٠٠ = ٩٠ ر١ (٥)

∴ و (س − ٩٠) = ٣٦٠ − ٤٠٠

∴ و (س − ٩٠) = − ٤٠ (٦)



بقسمة (٣) على (٦) ينتج : س = ٧٠ ، بالتعويض فى (٣) ينتج : و = ٢

∴ وزن القضيب ٢ ث كجم ، و نقطة تأثيره تبعد عن الطرف أ مسافة ٧٠ سم

٦ − أ ب قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن و طوله ١٦٠ سم معلق بواسطة خيطين رأسيين عند حـ ، ء حيث أ حـ = ب ء = ٤٠ سم فإذا علق من الطرف ثقل وزنه ١٠ نيوتن أوجد الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف أ ليتزن القضيب فى وضع أفقى و يكون الشد فى الخيط عند حـ ضعف الشد فى الخيط عند ء

الحل

بفرض أن الشد فى الخيط عند ء = ش

∴ الشد فى الخيط عند حـ = ٢ ش

و بفرض أن الثقل عند أ = و

فى وضع الإتزان :

٣ ش = و + ٦٠ (١)

، |أ = ٠

∴ ٥٠ × ٨٠ + ١٠ × ١٦٠ = ٢ ش × ٤٠ + ش × ١٢٠

٤٠٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٠٠ ش

∴ ش = ٢٨ نيوتن

بالتعويض فى (١) ينتج : و = ٢٤ نيوتن

تمـــــــــارين

١ − قوتان متوازيتان مقدارهما ٣٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران فى نقطتى ب ، حـ حيث ب حـ = ٢٠٠ سم أوجد محصلة القوتين و بعد نقطة تأثيرها عن ب إذا كانت القوتين :
(أولاً) فى إتجاه واحد (ثانياً) فى إتجاهين متضادين

٢ − قوتان متوازيتان مقدارهما تؤثران فى نقطتى ب ، حـ حيث ب حـ = ٢٠٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما و تؤثر فى نقطة ء تبعد عن ب مسافة ٤٠ سم أوجد مقدار كل من القوتين إذا كانتا :
(أولاً) فى إتجاه واحد (ثانياً) فى إتجاهين متضادين

٣ ــ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتى ب ، حـ أصغرهما عند ب مقدارها ٢٠ ث كجم و الثانية عند حـ فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ ث كجم و يبعد خط عملها عن حـ مسافة ٤٠ سم أوجد البعد بين خطى عمل القوتين و مقدار القوة الكبرى

٤ ــ محصلة قوتين متوازيتين ٣٠ نيوتن و إحدى القوتين ٥٠ نيوتن و تعمل على بعد ١٢ سم من المحصلة أوجد مقدار و إتجاه القوة الثانية و البعد بين القوتين إذا كانت :
أولاً : المحصلة فى إتجاه القوة المعلومة   ثانياً : المحصلة تضاد القوة الثانية

٥ ــ قوتان متوازيتان تؤثران فى نقطتى ٢ ، ب حيث ٢ ب = ٢٠ سم فإذا كانت ح = ٥ نيوتن ،
$\overleftarrow{ق_1}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ و تؤثر عند نقطة حـ ∋ $\overleftrightarrow{٢ب}$ أوجد كلاً من $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ح}$ و طول $\overline{٢حـ}$ فى كل حالة

٦ ــ ٢ ، ب ، حـ ، ء ، هـ تنتمى لمستقيم أفقى واحد حيث ٢ ب = ء هـ = ٢ ب حـ = ٣ حـ ء = ٦ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ١١ نيوتن رأسياً لأعلى عند ٢ ، حـ ، ء على الترتيب ، و القوتان ٢ ، ٧ نيوتن عند ء ، هـ على الترتيب رأسياً لأسفل أوجد محصلة هذه القوى و بعد نقطة تأثيرها عن ٢

٧ ــ ٢ ، ب ، حـ ، ء تنتمى لمستقيم أفقى واحد حيث ٢ ب = ٢ ب حـ = حـ ء = ٤ سم أثرت القوى المتوازية و العمودية على هذا المستقيم ٣ ، ٤ ، ٥ ، ق ث جم ٢ ، ب ، حـ ، ء على الترتيب و فى إتجاه واحد فإذا كانت المحصلة تؤثر عند نقطة تبعد عن ٢ مسافة ٨ سم أوجد المحصلة و قيمة ق

٨ ــ ٢ ب قضيب منتظم طوله متر و وزنه ٧٥ ث جم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين البعد بينهما ٢٤ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين يساوى ضعف الضغط على الحامل الآخر أوجد بعد كل حامل من الطرف القريب للقضيب " وزن القضيب المنتظم يؤثر فى منتصفه ، الضغط على الحامل = رد فعل الحامل "

٩ ــ ٢ ب قضيب طوله متر و وزنه ١٢ ث كجم يؤثر فى نقطة تبعد ٣٠ سم عن ٢ و ضع على حامل أملس عند منتصفه أوجد مقدار الثقل الذى يجب أن يعلق من الطرف ب ليتزن القضيب فى وضع أفقى

١٠ ــ ٢ حـ قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم و وزنه ٦٠ نيوتن علق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند ب ، حـ حيث ٢ ب = ٣٠ سم فكان الشد فى الخيط عند ب ثلاثة أمثال الشد فى الخيط عند حـ عين نقطة تأثير وزن القضيب و مقدار الشد فى كل من الخيطين

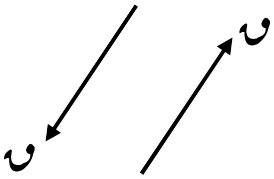
١١ ــ ٢ ب قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ٦٠ ث جم علق من منتصفه بخيط خفيف رأسى و عندما علق ثقل ٣٠ ث جم من أحد طرفيه إتزن فى وضع أفقى أوجد القوة الرأسية التى يجب أن تؤثر فى الطرف الآخر بعد رفع الثقل المعلق ليظل القضيب متزن فى وضع أفقى

١٢ ــ ٢ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم و وزنه ٦٠ ث جم يرتكز أفقياً بطرفه ب على حامل و يحفظ فى حالة توازن بخيط رأسى من نقطة تبعد ٤٠ سم عن ٢ ، و يحمل ثقل ٢٠٠ ث جم من نقطة تبعد ٢٠ سم عن ٢ أوجد الشد فى الخيط و الضغط على الحامل و مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من ٢ ليصبح القضيب على وشك الإنفصال عن الحامل

١٣ ــ ٢ ب قضيب غير منتظم طوله ١٥٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدين أملسين عند حـ ، ء حيث ٢ حـ = ٢٠ سم ، ب ء = ٣٠ سم لوحظ أن القضيب يكون على وشك الدوران حول حـ إذا علق من ٢ ثقل قدره ٧ ث كجم و يكون على وشك الدوران حول ء إذا علق من ب ثقل قدره ٢ ث كجم أوجد وزن القضيب و نقطة تأثيره

١٤ ــ أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ؛ $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ فى ٢ (١ ، ١) ، ب (ــ ٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٣) ، ء (ــ ٢ ، ٠) على الترتيب فإذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $ق_2$ = ٢ $\sqrt{٢}$ هـ نيوتن و تضاد $\overleftarrow{ق_1}$ أوجد كل من $\overleftarrow{ق_2}$ ؛ $\overleftarrow{ق_3}$ ، $\overleftarrow{ق_4}$ إذا كانت هذه القوى متزنة

الإزدواجـــــات

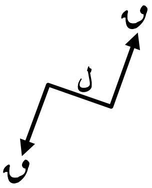


تعريف :

الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار
و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد

نظرية :

عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ،
و هو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى



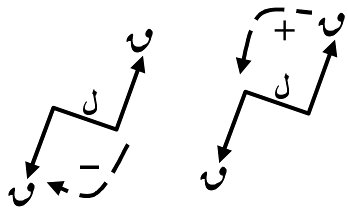
معيار عزم الإزدواج :

* معيار عزم الإزدواج = معيار إحدى قوتيه × البعد العمودى بين خطى عملهما

أى أن : $\| \overrightarrow{ج} \|$ = ق × ل

(يسمى " ل " البعد العمودى بين خطى عمل قوتى الإزدواج بذراع الإزدواج)

إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج :



يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوتيه تعملان فى
عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت قوتيه
تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

توازن إزدواجين :

يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى
أى : إذا إنعدم المجموع الجبرى للقياسين الجبريين لمتجهى عزميهما
" ج$_1$ + ج$_2$ = صفر أو ج$_1$ = − ج$_2$ "

تكافؤ إزدواجين :

يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان وجد إزدواج ثالث فى مستويهما يتوازن مع كل منهما
أى : إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما " ج$_1$ = ج$_2$ "

مجموع إزدواجين مستويين :

مجموع إزدواجين مستويين هو إزدواج عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الإزدواجين
أى : القياس الجبرى لعزم مجموع إزدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين لعزميهما
" ج = ج$_1$ + ج$_2$ "

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية :

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية هو إزدواج يساوى مجموع عزوم هذه الإزدواجات
أى : القياس الجبرى لعزم مجموع عدة إزدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزومها
" ج = ج$_1$ + ج$_2$ + ٠٠٠٠٠ ج$_ن$ "

ملاحظة : إذا كان : ج = صفر فإن : مجموعة الإزدواجات تكون متوازنة

قاعدة هامة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد
كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث × م
حيث : م ثابت يساوى عدد وحدات مقدار القوة التى تمثلها وحدة الأطوال
" م = مقدار القوة ÷ طول الضلع الممثل لها "

أمثلة :

١ ــ تؤثر القوى $\overrightarrow{ق}_1$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ ــ ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ = ــ ٦ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ فى أ (٢ ، ٣) ، ب (ــ ٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، ــ ٦) على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

$\overrightarrow{ق}_1$ + $\overrightarrow{ق}_2$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ ــ $\overrightarrow{ص}$ = ــ $\overrightarrow{ق}_3$

∴ القوى إما متزنة أو تكافئ إزدواجاً قوتاه هما $\overrightarrow{ق}_3$ ، $\overrightarrow{ع}$ = $\overrightarrow{ق}_1$ + $\overrightarrow{ق}_2$

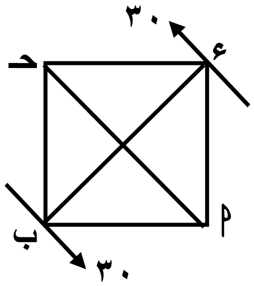
و لكن عزم $\overrightarrow{ع}$ بالنسبة لنقطة حـ = مجموع عزمى $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ بالنسبة لنقطة حـ

∴ عزم $\overrightarrow{ع}$ بالنسبة لنقطة حـ = (ــ ٤ ــ ٣٦) $\overrightarrow{ع}$ + (١٨ ــ ١٨) $\overrightarrow{ع}$ = ــ ٤٠ $\overrightarrow{ع}$

∴ القوى تكافئ إزدواجاً معيار عزمه = ٤٠ وحدة عزم

٢ ــ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم أثرت فى ب ، ء قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن و خطا عملهما فى إتجاه أ حـ ، حـ أ أوجد القياس الجبرى لعزم الإزدواج لهاتين القوتين

الحل



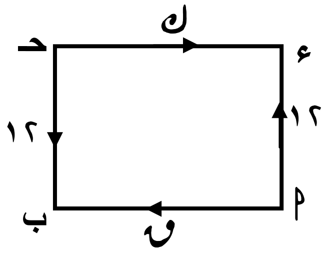
ل " ذراع الإزدواج " = ب ء = ٦ $\sqrt{٢}$ سم

القياس الجبرى لعزم الإزدواج = ٣٠ × ٦ $\sqrt{٢}$

= ١٨٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن . سم

٣ ــ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، ل ، ١٢ ث كجم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب فإذا توازنت مجموعة هذه القوى أوجد ق ، ل

الحل



القوتان (١٢ ، ١٢) تكونان إزدواجاً القياس الجبرى لعزمه

ع$_1$ = ١٢ × ١٥ = ١٨٠ ث كجم . سم

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج آخر له نفس العزم فى إتجاه مضاد

∴ القوتان (ق ، ل) تكونان إزدواجاً

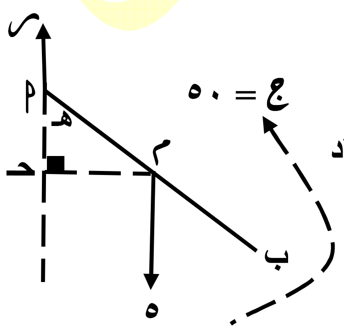
القياس الجبرى لعزمه = ــ ١٨٠ ث كجم . سم

∴ ق = ل ، ــ ق × ١٠ = ــ ١٨٠

∴ ق = ل = ١٨ ث كجم

٤ ــ أ ب قضيب منتظم طوله ٤ سم و وزنه ٥ ث جم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل عند طرفه أ فإذا أثر عليه عندما كان رأسياً إزدواج القياس الجبرى لعزمه ٥٠ ث جم . سم و يعمل فى نفس المستوى الرأسى المار بالقضيب أوجد فى وضع الإتزان كلاً من رد فعل المفصل و قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى

الحل



فى وضع الإتزان

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج آخر له نفس العزم فى إتجاه مضاد

و بفرض أن رد فعل المفصل = ر

∴ القوتان (٥ ، ر) تكونان إزدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = ــ ٥٠ ث جم . سم

∴ ر = ٥ ث جم رأسياً لأعلى

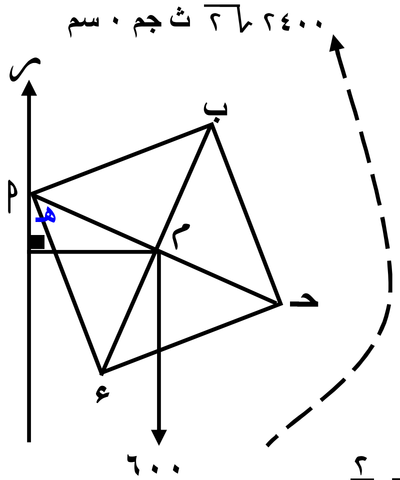
∴ ـ ٥ × م حـ = ـ ٥٠ ∴ م حـ = ١٠

∴ حا هـ (هـ زاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن) = $\frac{م حـ}{م ؟}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ = ٣٠° أو ١٥٠°

٥ ـ ؟ ب حـ ء صفيحة على شكل مربع طول ضلعه ١٢ سم و وزنها ٦٠٠ ث جم يؤثر فى مركزها ثبتت الصفيحة فى مستوى رأسى بتعليقها فى مسمار أفقى فى ثقب صغير بالقرب من ؟ أوجد الضغط على المسمار ، و إذا أثر على الصفيحة و فى مستويها إزدواج معيار عزمه ٢٤٠٠ $\sqrt{٢}$ ث جم ٠ سم أوجد ميل القطر ؟ حـ على الرأسى فى وضع الإتزان

الحل



؟ حـ = ١٢ $\sqrt{٢}$ سم ∴ ؟ م = ٦ $\sqrt{٢}$ سم

فى الحالة الأولى :

رد فعل المسمار = وزن الصفيحة = ٦٠٠ ث جم رأسياً إلى أعلى

فى الحالة الثانية :

القياس الجبرى لعزم الإزدواج المؤثر = ٢٤٠٠ $\sqrt{٢}$ ث جم ٠ سم

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج آخر له نفس العزم فى إتجاه مضاد

∴ القوتان (٦٠٠ ، ر) تكونان إزدواجاً

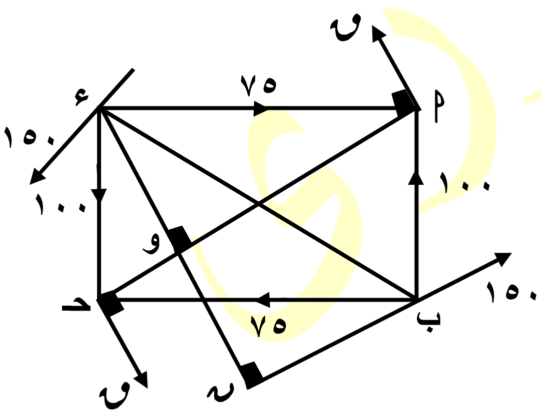
القياس الجبرى لعزمه = ــ ٢٤٠٠ $\sqrt{٢}$ ث جم ٠ سم

∴ ـ ٢٤٠٠ $\sqrt{٢}$ = ــ ٦٠٠ × ٦ $\sqrt{٢}$ حا هـ ∴ حا هـ = $\frac{٢}{٣}$

∴ هـ (هـ زاوية ميل ؟ حـ على الرأسى فى وضع التوازن) = ٤١° ٤٩′

٦ ـ ؟ ب حـ ء مستطيل فيه ؟ ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠٠ ، ٧٥ ، ١٠٠ ، ٧٥ ث جم فى ؟ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ؟ على الترتيب كما أثرت فى ب ، ء قوتان مقدار كل منهما ١٥٠ ث جم فى إتجاهى ؟ حـ ، حـ ؟ على الترتيب أوجد عزم الإزدواج المحصل ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى حـ ، ؟ عموديتين على ؟ حـ لكى تصبح المجموعة مكافئة لإزدواج معيار عزمه ١٢٥٠٠ ث جم ٠ سم و متجه عزمه فى إتجاه عزم الإزدواج المكون من القوتين ١٠٠ ، ١٠٠ ث جم

الحل



القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان إزدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = ١٠٠ × ٤٠ = ٤٠٠٠ ث جم ٠ سم

القوتان (٧٥ ، ٧٥) تكونان إزدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = ـ ٧٥ × ٣٠ = ـ ٢٢٥٠ ث جم ٠ سم

القوتان (١٥٠ ، ١٥٠) تكونان إزدواجاً

القياس الجبرى لعزمه = ١٥٠ × ء ىر ث جم ٠ سم

من هندسة الشكل :

ب ء = ٥٠ سم ، ء و = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$ = ٢٤ سم

∴ ء ىر = ٤٨ سم

∴ القياس الجبرى لعزم الإزدواج المحصل = ٤٠٠٠ ـ ٢٢٥٠ + ١٥٠ × ٤ = ٨٩٥٠ ث جم ٠ سم

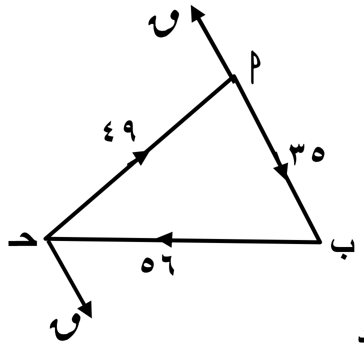
بفرض أن مقدار كل من القوتين عند حـ ، ؟ = ق

∴ معيار عزم الإزدواج المكون من (ق ، ق) = ١٢٥٠٠ ـ ٨٩٥٠ = ٣٥٥٠ ث جم ٠ سم

∴ ق × ؟ حـ = ٣٥٥٠ ∴ ق × ٥ = ٣٥٥٠ ∴ ق = ٧١٠ ث جم

٧ – ﻡ ب ﺣ مثلث فيه ﻡ ب = ٥ سم ، ب ﺣ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٣٥ ، ٥٦ ، ٤٩ ث كجم فى ﻡ ب ، ب ﺣ ، ﺣ ﻡ على الترتيب أثبت أن هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً و أحسب معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند ﻡ ، ﺣ عموديتين على ﻡ ﺣ لكى تتزن مع القوى الثلاث المعلومة

الحل



من قاعدة جيب التمام :

(ﻡ ﺣ)٢ = (٥)٢ + (٨)٢ – ٢ × ٥ × ٨ × حتا ٦٠° = ٤٩

∴ ﻡ ﺣ = ٧ سم

∵ $\frac{٣٥}{٥}$ = $\frac{٥٦}{٨}$ = $\frac{٤٩}{٧}$ = ٧

∴ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المثلث ﻡ ب ﺣ و فى إتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه = ٢ × ($\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٨ حا ٦٠°) × ٧

= ١٤٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم ٠ سم

∵ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج آخر له نفس العزم فى إتجاه مضاد

∴ القوتان (ق ، ق) عند ﻡ ، ﺣ تكونان إزدواجاً معيار عزمه = – ١٤٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم ٠ سم

∴ – ١٤٠ $\sqrt{٣}$ = – ق × ٧ ∴ ق = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

تمـــــــارين

١ – تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$ = ﻡ $\overleftarrow{س}$ – ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = – ٢ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ فى النقطتين ﺣ (– ١ ، ٢) ، ء (١ ، ٣) على الترتيب فكونت إزدواج أوجد قيمتى ﻡ ، ب ، و متجه عزم الإزدواج و البعد العمودى بين القوتين

٢ – أثرت القوى $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ – ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = $\overleftarrow{س}$ – ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = – ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٧ $\overleftarrow{ص}$ فى النقط ﻡ (– ١ ، ١) ، ب = (– ٢ ، ٣) ، ﺣ = (٠ ، ١) أثبت أن هذه القوى تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه

٣ – ﻡ ب ﺣ ء مستطيل فيه ﻡ ب = ٣٠ سم ، ب ﺣ = ٤٠ سم ، و منتصف ﺣ ء ، ﻫ منتصف ﻡ ء أثرت القوى ٤٠ ، ٦٠ ، ٤٠ ، ٦٠ ، ٥٠ ، ٥٠ فى الإتجاهات ب ﻡ ، ﺣ ب ، ء ﺣ ، ﻡ ء ، ﻡ ﺣ ، و ﻫ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه

٤ – ﻡ ب ﺣ ء مستطيل فيه ﻡ ب = ٤٠ سم ، ب ﺣ = ٣٠ سم أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٠ نيوتن فى ﻡ ب ، ﺣ ء كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ق عند ﻡ ، ﺣ توازيان ب ء عين قيمة ق حتى يتكافئ الإزدواجان

٥ – ﻡ ب ﺣ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم أثرت القوى ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى الإتجاهات ب ﻡ ، ب ﺣ ، ء ﺣ ، ء ﻡ على الترتيب كما أثرت القوتان ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ث كجم عند ﻡ ، ﺣ فى إتجاهى ب ء ، ء ب أوجد عزم الإزدواج المحصل

٦ – ﻡ ب ﺣ ء مستطيل فيه ﻡ ﺣ = ١٣ سم ، ب ﺣ = ٥ سم أثرت مجموعة القوى ١ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٣ ث جم فى الإتجاهات ﻡ ء ، ب ﻡ ، ﺣ ب ، ﺣ ء ، ﻡ ﺣ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه

٧ ــ ﻡ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، ﻡ ء // ب حـ ، ﻡ ب = ٢٠ سم ، ﻡ ء = ١٥ سم أثرت القوى ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى الإتجاهات ﻡ ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ﻡ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه

٨ ــ ﻡ ب حـ ء مستطيل فيه ﻡ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٥ سم أثرت مجموعة القوى ٣٤ ، ١٢ ، ٣٤ ، ١٢نيوتن فى الإتجاهات ﻡ ب ، حـ ب ، حـ ء ، ﻡ ء على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند ﻡ ، حـ و توازيان ب ء بحيث تتزن مع المجموعة السابقة

٩ ــ ﻡ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ﻡ ب = ﻡ حـ = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت القوى ٢٠ ، ٣٢ ، ٢٠ ث جم فى الإتجاهات ﻡ ب ، ب حـ ، حـ ﻡ على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواج و أوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران عند ب ، حـ و عموديتين على ب حـ بحيث تتزن مع المجموعة السابقة

١٠ ــ ﻡ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، ٯ ، ٣ ، ٩ ، ك ث كجم فى الإتجاهات ﻡ ب ، ب حـ ، ء حـ ، ء هـ ، هـ و ، ﻡ و على الترتيب أوجد قيمة كل من ٯ ، ك لكى تتزن المجموعة

١١ ــ ﻡ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ﻡ ء = ٨ سم ، ﻡ ب = ٤ سم ، ٯ (∠ ب) = ٦٠° ، و منتصف ﻡ ء ، هـ منتصف ب حـ أثرت القوى ١٢ ، ١٦ ، ٯ ، ك ، ١٦ ، ١٢ ث جم فى الإتجاهات ﻡ ب ، حـ ب ، هـ ﻡ ، و حـ ، ﻡ ء ، حـ ء على الترتيب أوجد قيمة كل من ٯ ، ك لكى تتزن المجموعة

١٢ ــ ﻡ ب حـ ء شبه منحرف فيه ﻡ ء // ب حـ ، ﻡ ب ⊥ ب حـ ، ﻡ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، ﻡ ء = ٣ سم أثرت القوى $ٯ_١$ ، $ٯ_٢$ ، $ٯ_٣$ ، ٣٠ نيوتن فى الإتجاهات ﻡ ء ، ء حـ ، حـ ب ، ب ﻡ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواج معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن ٠ سم فى الإتجاه ء حـ ب ﻡ أوجد مقدار كل من $ٯ_١$ ، $ٯ_٢$ ، $ٯ_٣$

١٣ ــ ﻡ ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يدور حول مسمار فى ثقب صغير عند نقطة حـ تقع على القضيب حيث ﻡ حـ = ١٥ سم فإتزن القضيب فى وضع أفقى بتأثير قوتين مقدار كل منهما ٥٠ نيوتن تؤثران عند طرفيه ﻡ ، ب فى إتجاهين متضادين و تصنعان مع القضيب زاوية قياسها ٣٠° أوجد وزن القضيب و مقدار رد فعل المسمار

١٤ ــ ﻡ ب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم و وزنه ٣ ث جم يتصل بمفصل فى حائط رأسى عند طرفه ﻡ أثر على القضيب إزدواج معيار عزمه ٣٠ ث جم ٠ سم فإتزن القضيب فى وضع يميل على الحائط بزاوية قياسها هـ أوجد مقدار و إتجاه رد فعل المفصل و قياس الزاوية هـ

١٥ ــ ﻡ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل طول ضلعها ٥٠ سم و وزنها ٣٠٠ ث كجم تثبت فى ثقب صغير بالقرب من الرأس ﻡ و علقت فى مسمار أفقى فى مستوى رأسى و أثر عليها إزدواج معيار عزمه ٧٥٠٠ ث كجم ٠ سم أوجد ميل ﻡ حـ على الرأسى فى وضع التوازن

١٦ ــ ﻡ ب حـ ء صفيحة رقيقة منتظمة مستطيلة الشكل فيها ﻡ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٤ سم ، وزنها ٢٠ نيوتن علقت فى مسمار رفيع فى ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسياً و أثر عليها إزدواج معيار عزمه ١٥٠ نيوتن ٠ سم أوجد ميل ء ب على الأفقى فى وضع التوازن

١٧ ــ ﻡ ب حـ صفيحة رقيقة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب وزنها ٦ نيوتن يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث الذى فيه ﻡ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم علقت فى مسمار من ثقب صغير بالقرب من الرأس ﻡ ثم أثر عليها إزدواج فى مستويها فإتزنت عندما كان ﻡ ب رأسياً أوجد رد فعل المسمار و معيار عزم الإزدواج