

الإحتمال

التجربة العشوائية :

هي تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذي سيحدث فعلاً
فضاء العينة :

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو n (ف)
أمثلة على فضاء العينة :

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر :

ف = { ص ، ل } حيث : n (ف) = ٢

(٢) تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين " قطعتي نقود متميزتين مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ل) ، (ل ، ص) ، (ل ، ل) } حيث : n (ف) = ٤

(٣) تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متميزة نقود مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ل) ، (ص ، ل ، ص) ، (ص ، ل ، ل) ، (ل ، ص ، ص) ، (ل ، ص ، ل) ، (ل ، ل ، ص) ، (ل ، ل ، ل) } (

، (ل ، ص ، ل) ، (ل ، ل ، ل) ، (ل ، ل ، ص) } حيث : n (ف) = ٨

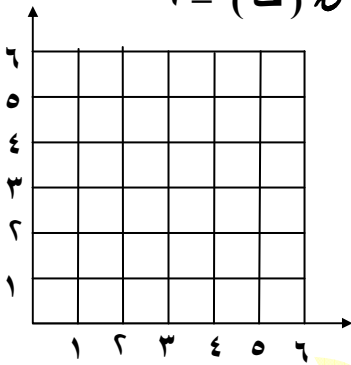
(٤) تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي :

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } حيث : n (ف) = ٦

(٥) تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين " حجرى نرد متميزين مرة واحدة " و ملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوي :

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) } (

حيث : n (ف) = ٣٦



تدريبات : أكتب فضاء العينة لكل من التجارب العشوائية الآتية :

(١) صندوق يحتوى على ثلاث كرات حمراء " ح " ، سوداء " س " ، بيضاء " ب " ، سحب منه كرتان الواحدة تلو الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية و ملاحظة لوني الكرتين المسحوبتين

الحل

= ف

(٢) إشتراك ثلاثة متسابقين س ، ص ، ع في سباق للجري و ملاحظة تتابع وصولهم لنهاية السباق

الحل

= ف

الأحداث

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة
 فإذا كان : P حدث في F فإن : $P \subset F$
 و عدد عناصره هو : $n(P)$ أى عدد فرص وقوع الحدث P
فمثلاً : إذا كان P هو حدث ظهور رقم زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم
 الظاهر على الوجه العلوي فإن : $P = \{2, 4, 6\}$

لاحظ أن : $P = \{2, 4, 6\} \subset F$

- * **الحدث المستحيل** " \emptyset " = : هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه
- * **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذي له كل النواتج الممكنة
- * **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
- * **الحدث المركب** : هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط
- * **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن : هما حدثان تقاطعهما $\emptyset =$
ملاحظة :

الأحداث البسيطة في فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

تدريب :

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوي أكتب كلاً من الأحداث
 الآتية مبيناً نوع كل حدث :

(١) حدث ظهور عدد أكبر من ٦

(٢) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

(٣) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

(٤) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ١

(٥) حدث ظهور عدد زوجي

(٦) حدث ظهور عدد فردي

ما العلاقة بين الحدثين في كل من : (٥) ، (٦)

مسلمات الإحتمال :

إذا كان : P حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أي $P \subset F$
فإن : إحتمال الحدث P " P " هو عدد حقيقي يحقق ما يأتي :

$$(1) \quad P = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } P}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{n(P)}{n(F)}$$

حيث : $0 \leq P \leq 1$ أي : $P \in [0, 1]$
أي أن : إحتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي موجب لا يزيد عن الواحد الصحيح

$$(2) \quad P(F) = 1 \quad \text{أي أن : إحتمال الحث المؤكد} = 1$$

$$(3) \quad P(\emptyset) = 0 \quad \text{أي أن : إحتمال الحدث المستحيل} = \text{صفر}$$

(4) إذا كان : P, B ، حدثين متنافيين من فضاء عينة فإن :

$$P(B \cap P) = 0$$

$$P(B \cup P) = P(B) + P(P)$$

(5) إذا كان : $F = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ فإن :

$$1 = P(P_1) + P(P_2) + P(P_3) + \dots + P(P_n)$$

(6) إذا كان : P, B ، حدثين من فضاء عينة ، $P \subset B$ فإن :

$$P(B \cap P) = P(P)$$

$$P(B \cup P) = P(B)$$

تدريب :

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى أوجد إحتمال كلاً من الأحداث الآتية مبيناً نوع كل حدث :

(1) حدث ظهور عدد أكبر من 6

(2) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 5

(3) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3

(4) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى 1

(5) حدث ظهور عدد زوجى

العمليات على الأحداث :

الصورة اللفظية	الصورة الرمزية
إحتمال وقوع الحدث P أو الحدث B إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل	$P \cup B = P + B - (P \cap B)$
إحتمال وقوع P و B إحتمال وقوعهما معا	$P \cap B = P + B - (P \cup B)$
إحتمال عدم وقوع P	$P' = 1 - P$
إحتمال وقوع P فقط إحتمال وقوع P و عدم وقوع B	$P - B = P - (P \cap B)$ $P - B = P \cap B'$
إحتمال وقوع B فقط إحتمال وقوع B و عدم وقوع P	$B - P = B - (P \cap B)$ $B - P = B \cap P'$
إحتمال عدم وقوع B فقط إحتمال وقوع P أو عدم وقوع B	$B' = 1 - B$ $B' = B' \cup (P \cap B')$
إحتمال عدم وقوع P فقط إحتمال وقوع B أو عدم وقوع P	$P' = 1 - P$ $P' = P' \cup (P \cap B')$
إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع P و B معا	$P \cup B' = P + B' - (P \cap B')$ $P \cup B' = 1 - (P \cap B)$
إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع P أو B	$(P \cup B)' = 1 - (P \cup B)$ $(P \cup B)' = P' \cap B'$
إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع P أو B فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر	$(P - B) \cup (B - P)$ $(P - B) \cup (B - P) = P + B - 2(P \cap B)$

تدريب :

إذا كان P ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان :

$$P = 0.43 , P' = 0.68 , P \cap B = 0.3 \text{ أوجد :}$$

$$P - B , P \cap B' , (P - B) \cup (B - P)$$

الحل

$$\therefore P' = 1 - P = 1 - 0.43 = 0.57$$

$$\therefore P \cap B' = P - (P \cap B) = 0.43 - 0.3 = 0.13$$

$$\therefore (P - B) \cup (B - P) = P + B - 2(P \cap B)$$

$$= 0.43 + 0.68 - 2(0.3) = 0.51$$

تمارين

- ١ - ألقى قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحصول على :
 م - صورة واحدة فقط ب - كتابة واحدة على الأكثر
- ٢ - ألقى قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أوجد احتمال ظهور :
 م - صورة واحدة أو صورتين ب - صورة واحدة على الأقل
- ٣ - إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة في الدوري وكان احتمال تعادله في عدد من المباريات هو ٠.٣ وإحتمال فوزه في عدد من المباريات هو ٠.٥ أوجد عدد المباريات التي يخسرها هذا النادي في الدوري
- ٤ - صندوق يحتوي على ٤ كرات بيضاء و ٩ كرات سوداء و ٧ كرات حمراء أختيرت كرة عشوائياً منه أوجد احتمال أن تكون الكرة المختارة : م - بيضاء ب - ليست حمراء ح - سوداء أو حمراء
- ٥ - كيس يحتوي على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩ إلى ١٤ سحبت كرة عشوائياً منه أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة :
 م - تحمل عدداً أولياً ب - تحمل عدداً مربعاً
 ج - بيضاء وتحمل عدداً فردياً ع - حمراء أو تحمل عدداً زوجياً
- ٦ - في دراسة حول أحد بيوت الشباب وجد به ٢٨ شخصاً من عدة دول منهم ٧ من السودان ، ١٢ من فرنسا ، ٤ من الهند ، ٥ من البرازيل اختير شخص منهم عشوائياً أوجد احتمال أن يكون الشخص :
 * من فرنسا ** من السودان أو الهند *** ليس من البرازيل
- ٧ - سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٠ أوجد احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً زوجياً ويقبل القسمة على ٥ :
 * زوجياً ويقبل القسمة على ٥ ** يقبل القسمة على ٣ أو ٥
- ٨ - سحبت بطاقة من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠ أوجد احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عدداً زوجياً ويقبل القسمة على ٥ أو ٦ :
 * يقبل القسمة على ٥ أو ٦ ** يقبل القسمة على ٥ و ٦
- ٩ - صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال أوجد احتمال أن يكون : م - الفرق المطلق بين العددين ٣ ب - مجموع العددين أقل من ٨
- ١٠ - من بين ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ سحبت بطاقتان عشوائياً الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال أوجد احتمال أن يكون مجموع العددين على البطاقتين عدداً زوجياً
- ١١ - صندوقان بكل منهما ٤ كرات مرقمة من ١ إلى ٤ سحبت كرة عشوائياً من كل منهما حسب احتمال أن يكون :
 م - مجموع العددين عليهما أولياً ب - الفرق المطلق عليهما ٢
- ١٢ - ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة أوجد احتمال :
 م - الحصول على عددين مختلفين ب - مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨
- ١٣ - ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة أوجد احتمال : م - مجموع العددين أكبر من أو يساوي ٧ ب - أن يكون أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٨
- ١٤ - ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة أوجد احتمال :
 م - الحصول على عددين متساويين ب - الفرق المطلق بين العددين عدداً أولياً
- ١٥ - من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } كون عدد من رقمين مختلفين و أوجد احتمال الحصول على :
 م - رقم العشرات فردي ب - رقم الآحاد أولى
 ج - رقم العشرات فردي أو رقم الآحاد أولى
- ١٦ - من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } كون عدد من رقمين مختلفين و أوجد احتمال الأحداث الآتية :
 م - رقمي الآحاد والعشرات زوجيين ب - رقمي الآحاد والعشرات فرديين
 ج - رقمي الآحاد والعشرات أحدهما فردي والآخر زوجي

- ١٧ - ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين ولو حظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة فإذا كان P هو حد الحصول على عدد أكبر في الرمية الثانية منه في الأولى ، B هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨ أوجد : $L(P)$ ، $L(B)$ ، $L(P - B)$
- ١٨ - صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد ٢ ، وجهان يحملان العدد ٤ ، وجهان يحملان العدد ٦ ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتين فإذا كان P هو حدث ظهور العدد ٢ في الرمية الأولى ، B هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين هو ٢ أوجد : $L(P \cap B)$ ، $L(P \cup B)$ ، $L(P \cap B')$
- ١٩ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = \frac{1}{4}$ ، $L(B) = \frac{3}{8}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{8}$ أوجد : $L(P - B)$ ، $L(P \cap B')$ ، $L(P - B)$
- ٢٠ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = 0.7$ ، $L(B) = 0.4$ ، $L(P \cap B) = 0.3$ أوجد : $L(P \cap B')$ ، $L(P - B)$ ، $L(P - B)$
- ٢١ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = \frac{3}{8}$ ، $L(B) = \frac{1}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد : $L(P \cup B)$ ، $L(P - B)$ ، $L(P \cap B')$
- ٢٢ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = 0.3$ ، $L(B) = 0.5$ ، $L(P \cap B) = 0.13$ أوجد $L(P)$ ، $L(P \cup B)$ ، $L(P \cap B')$
- ٢٣ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = 0.7$ ، $L(B) = 0.8$ ، $L(P - B) = 0.1$ أوجد $L(P \cup B)$ ؛ $L[(P - B) \cup (B - P)]$
- ٢٤ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P) = \frac{3}{4}$ ، $L(B) = \frac{5}{8}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{8}$ أوجد $L(B')$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٢٥ - إذا كان A ، B حدثين من ف ، $L(A) = \frac{3}{4}$ ، $L(B) = \frac{5}{8}$ ، $L(A - B) = \frac{1}{8}$ أوجد $L(P \cup B')$ ؛ $L(P \cup B')$
- ٢٦ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P \cup B) = \frac{3}{4}$ ، $L(B) = \frac{5}{8}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد $L(P)$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٢٧ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P \cup B) = \frac{11}{16}$ ، $L(P - B) = \frac{1}{8}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد : $L(P)$ ؛ $L(B)$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٢٨ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{16}$ ، $L(P \cap B) = \frac{9}{16}$ أوجد : $L(P)$ ؛ $L(B)$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٢٩ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $P \cup B = F$ ، $L(P) = 0.2$ ، $L(B) = 0.5$ أوجد $L(P \cap B)$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٣٠ - إذا كان P ، B حدثين من ف ، $P \cup B = F$ ، $L(P) = \frac{5}{8}$ ، $L(B) = \frac{7}{8}$ أوجد $L(P \cap B)$ ؛ $L(P - B)$ ؛ $L(P - B)$
- ٣١ - إذا كان P ، B حدثين متنافيين من ف ، $L(P) = 0.27$ ، $L(B) = 0.35$ أوجد $L(P \cap B)$ ؛ $L(P \cap B)$ ؛ $L(P \cap B)$
- ٣٢ - إذا كان P ، B حدثين متنافيين من ف ، $L(P) = 0.37$ ، $L(B) = 0.15$ أوجد $L(P \cup B)$ ؛ $L(P \cap B)$ ؛ $L(P \cap B)$

- ٣٣ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف ، $L(P) = \frac{1}{8}$ ، $L(B) = \frac{3}{8}$ أوجد
- $L(P \cup B)$ ؛ $L(P - B)$ ؛ $L(P' \cup B')$
- ٣٤ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف ، $L(P) = \frac{1}{4}$ ، $L(B) = \frac{3}{4}$ أوجد
- $L(P)$ ، $L(B - P)$ ، $L(P' \cup B')$
- ٣٥ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف ، $L(P \cup B) = \frac{1}{4}$ ، $L(P - B) = \frac{1}{8}$ أوجد
- $L(P)$ ؛ $L(B)$ ؛ $L(P' \cup B')$
- ٣٦ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف ، $L(P \cup B) = \frac{3}{8}$ ، $L(P - B) = \frac{1}{4}$ أوجد
- $L(P)$ ؛ $L(B)$ ؛ $L(P' \cup B')$
- ٣٧ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف بحيث $L(P) = 3L(B)$ ، $L(P \cup B) = \frac{3}{4}$ أوجد
- $L(P)$ ، $L(B)$ ، $L(B')$
- ٣٨ - إذا كان P ، ب حدثين متنافيين من ف بحيث $L(P) = 3L(B)$ ، $L(P \cup B) = \frac{3}{4}$ أوجد
- $L(P)$ ، $L(B)$ ، $L(P')$
- ٣٩ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = \frac{3}{8}$ ؛ $L(P \cap B') = \frac{1}{4}$ أوجد $L(B)$ إذا كان :
- $P \supset B$ * ، ب حدثين متنافيين
- ٤٠ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = \frac{1}{4}$ ؛ $L(P \cup B) = \frac{1}{4}$ أوجد $L(B)$ إذا كان :
- $P \supset B$ * ، ب حدثين متنافيين
- ٤١ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = 0.4$ ، $L(B) = 0.8$ ، $L(P \cap B) = 0.3$ أوجد احتمال
- * وقوع حدث واحد على الأقل * عدم وقوع الحدثين P ، ب معا
- ٤٢ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = \frac{1}{4}$ ، $L(B) = \frac{3}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{8}$ أوجد احتمال
- * وقوع الحدث P فقط * وقوع كلا الحدثين
- ٤٣ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = 0.6$ ، $L(B) = 0.7$ ، $L(P \cap B) = 0.4$ أوجد احتمال
- * وقوع أحد الحدثين على الأكثر * وقوع أحد الحدثين دون الآخر
- ٤٤ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = 0.7$ ، $L(B) = 0.8$ ، $L(P - B) = 0.1$ أوجد احتمال
- * وقوع حدث واحد على الأقل * وقوع أحد الحدثين فقط
- ٤٥ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = \frac{1}{2}$ ، $L(B) = \frac{1}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ أوجد احتمال
- * وقوع أحد الحدثين فقط * عدم وقوع الحدثين معا
- ٤٦ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P) = 0.6$ ، $L(B) = 0.5$ ، $L(P' \cup B') = 0.7$ أوجد احتمال
- * وقوع حدث واحد على الأقل * وقوع الحدث فقط
- ٤٧ - إذا كان P ، ب حدثين من ف ، $L(P \cup B) = \frac{3}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ ، $L(P') = \frac{1}{4}$ أوجد احتمال
- * وقوع الحدث B فقط * عدم وقوع أحدهما على الأقل
- ٤٨ - يصبو لاعبان P ، ب في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب P الهدف هو $\frac{3}{5}$ ، احتمال أن يصيب اللاعب B الهدف هو $\frac{1}{5}$ ، احتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معا هو $\frac{1}{5}$ أوجد
- * احتمال إصابة الهدف * احتمال إصابة اللاعب من اللاعب P فقط
- ٤٩ - يصبو جنديان نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو 0.83 ، احتمال أن يصيب الجندي الثاني الهدف هو 0.74 ، احتمال أن يصيب الجنديان الهدف معا هو 0.65 أوجد
- * احتمال إصابة الهدف * احتمال عدم إصابة الهدف

- ٥٠ - يطلق صيادان النار على ثعلب فإذا كان احتمال إصابة الثعلب من الصياد الأول هو ٠.٥ ، احتمال إصابة الثعلب من الصياد الثاني هو ٠.٦٥ ، احتمال إصابة الثعلب من الصيادين معا هو ٠.٣٥ أوجد احتمال إصابة الثعلب من أحدهما على الأقل *
 * إصابة الثعلب من أحدهما فقط
- ٥١ - يصوب لاعبان P ، B في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال إصابة الهدف من P فقط هو $\frac{1}{3}$ احتمال إصابة الهدف من B فقط هو $\frac{1}{4}$ ، احتمال إصابة الهدف منهما معا هو $\frac{1}{6}$ أوجد احتمال إصابة الهدف
- ٥٢ - تقدم ٥٠ شخصا لشغل إحدى الوظائف فوجد أن ٣٥ منهم يجيدون اللغة الإنجليزية ، ٢٠ منهم يجيدون اللغة الفرنسية ، ١٥ منهم يجيدون اللغتين معا أختير شخص منهم عشوائيا أوجد احتمال أن يكون هذا الشخص يجيدا لإنجليزية فقط ، يجيد إحدى اللغتين فقط ، يجيد إحدى اللغتين على الأقل
- ٥٣ - فى دراسة إحصائية لمشاهدة أحد البرامج الثقافية فى التلفاز وجد أن احتمال أن يشاهد زوج وزوجته معا البرنامج هو ٠.٣٥ ، احتمال أن يشاهد الزوج فقط البرنامج هو ٠.٤ ، احتمال أن تشاهد الزوجة البرنامج هو ٠.٥ أوجد احتمال أن :
 * تشاهد الزوجة فقط البرنامج
 * واحد على الأقل منهما يشاهد البرنامج
 * يشاهد البرنامج أحدهما دون الآخر
- ٥٤ - فصل دراسى به ٤٠ طالبا نجح منهم ١٧ طالبا فى إمتحان الفلسفة ، ٢٠ طالبا فى إمتحان التاريخ ، ٥ طلاب منهم فى الامتحانين معا أختير طالب منهم عشوائيا أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار ناجحا فى الفلسفة * ناجحا فى التاريخ * ناجحا فى أحد الامتحانين على الأقل
- ٥٥ - فصل دراسى به ٣٠ طالبا منهم ١٥ طالبا يمارسون النشاط الرياضى ؛ ١٢ طالبا يمارسون النشاط الفنى ٥ يمارسون النشاطين معا اختير منهم طالب عشوائيا أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار يمارس * النشاط الرياضى فقط * لا يمارس أى نشاط * يمارس أحد النشاطين على الأكثر
- ٥٦ - أشترك ثلاثة لاعبين P ، B ، J فى إحدى السباقات فإذا كان احتمال فوز P = $\frac{1}{4}$ احتمال فوز B ، احتمال فوز J = $\frac{1}{2}$ احتمال فوز P أوجد احتمال فوز J أو P علما بأن واحد فقط هو الفائز
- ٥٧ - أشترك ثلاثة لاعبين P ، B ، J فى إحدى السباقات فإذا كان احتمال فوز P = ضعف احتمال فوز B ، احتمال فوز B = احتمال فوز J أوجد احتمال فوز P أو J علما بأن واحد فقط هو الفائز
- ٥٨ - أشترك ثلاثة لاعبين P ، B ، J فى إحدى السباقات فإذا كان احتمال فوز P = ٣ احتمال فوز B ، احتمال فوز J = $\frac{1}{2}$ احتمال فوز P أوجد احتمال فوز B أو J علما بأن واحد فقط هو الفائز
- ٥٩ - إذا كان $F = \{ (١, ٢) ، (٢, ٢) ، (٣, ٢) ، (٤, ٢) \}$ ، كان $L(١, ٢) = ٣$ ، $L(٢, ٢) = ٢$ ، $L(٣, ٢) = ٢$ ، $L(٤, ٢) = ١$ أوجد $L(١, ٢) \cup L(٢, ٢)$ ؛ $L(١, ٢) \cup L(٣, ٢)$
- ٦٠ - إذا كان $F = \{ (١, ٢) ، (٢, ٢) ، (٣, ٢) ، (٤, ٢) \}$ ، كان $L(١, ٢) = ٢$ ، $L(٢, ٢) = ٢$ ، $L(٣, ٢) = ٢$ ، $L(٤, ٢) = ١$ أوجد $L(١, ٢) \cup L(٣, ٢)$ ؛ $L(١, ٢) \cup L(٢, ٢)$
- ٦١ - إذا كان F فضاء النواتج لتجربة عشوائية حيث $F = \{ B ، B ، B ، J \}$ وكان :

$$\frac{L(١, ٢)}{L(٢)} = \frac{١}{٣} ، \frac{L(١, ٢)}{L(٢)} = \frac{١}{٤} ، \frac{L(١, ٢)}{L(٢)} = \frac{١}{٤}$$
 أوجد $\frac{L(١, ٢)}{L(٢)}$
- ٦٢ - فى تجربة إلقاء حجر نرد ١٠٠ مرة سجلت الأعداد على الأوجه الظاهرة وكانت النسبة كالتى :

العدد على الوجه العلوى	١	٢	٣	٤	٥	٦
الإحتمال المقابل	٠.١٤	س	٠.١٧	٠.٣	٠.١٨	٠.١٦

أوجد S ثم أوجد احتمال ظهور : * عدد زوجى * عدد فردى * عدد أولى * عدد زوجى أولى

٧٣ - كيس يحتوي علي ٦ كرات متماثلة كرتان حمراوان ن كرتان زرقاوان ، كرتان بيضاوان فإذا سحبت كرتان عشوائيا من الكيس أوجد إحتمال : * أن تكون الكرتان المسحوبتان لهما نفس اللون ** أن تكون إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء

٧٤ - فصل يتكون من ٣٠ ولد منهم ٦٠٪ يلبسون نظارات طبية ، ٢٠ بنتا منهم ٣٠٪ يلبسون نظارات

طبية فإذا أختير عشوائيا شخص من هذا الفصل فما إحتمال أن يكون بنتا ممن يلبس نظارة طبية

٧٥ - إذا كان P ، B حدثين غير متنافيين من فضاء نواتج F ، ل دالة إحتمال علي F بحيث :

$$L \cap B \leq P \cdot L \quad \text{و} \quad L \cap B \geq P \cdot L \quad \text{ل (ب)}$$

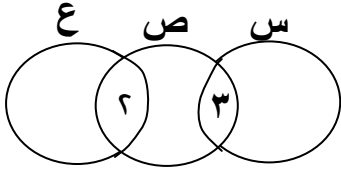
٧٦ - S ، V ، E ثلاث مجموعات يمثلها شكل فن المقابل فإذا كان

$$S \cap E = \emptyset , \quad S \cap V = 3 , \quad V \cap E = 2$$

أختير عنصر $\omega \in S \cup V \cup E$ أوجد إحتمال أن يكون :

$$* \omega \in (S - V) \quad ** \omega \in (E - S)$$

$$* \omega \in (S \cup V) \quad ** \omega \in [(S \cup E) - V]$$

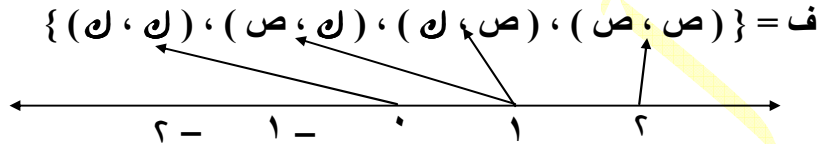


المتغير العشوائى

المتغير العشوائى :

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية
فإن : أى دالة سـ : ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرّفاً على ف
المتغير العشوائى المتقطع " المنفصل ، الوثاب " :
هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية
فمثلاً :

فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائى سـ يعبر عن عدد الصور نجد أن :



أى أن : مدى المتغير العشوائى سـ = { ٢ ، ١ ، ٠ }

التوزيع الإحتمالى :

إذا كان : سـ متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { سـ_١ ، سـ_٢ ، سـ_٣ ، سـ_٤ ، سـ_٥ }
فإن الدالة د المعرفة كالتالى : د : { سـ_١ ، سـ_٢ ، سـ_٣ ، سـ_٤ ، سـ_٥ } ← ح
حيث : د (سـ_١) = ل (سـ_١) = ل (سـ_٢) = ل (سـ_٣) = ل (سـ_٤) = ل (سـ_٥)
تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى سـ و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة
المحددة لبيان الدالة د

ملاحظات :

(١) الدالة د تحقق الشرطين :

$$1 - د (سـ_١) ≤ ٠ \text{ لكل } سـ_١ = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$$

$$2 - د (سـ_١) + د (سـ_٢) + د (سـ_٣) + د (سـ_٤) + د (سـ_٥) = ١$$

و أى دالة تحقق هذين الشرطين تصلح أن تكون توزيعاً إحتمالياً لمتغير عشوائى
متقطع سـ مداه هو { سـ_١ ، سـ_٢ ، سـ_٣ ، سـ_٤ ، سـ_٥ }

(٢) يكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى سـ بالصورة :

$$\{ (سـ_١ ، د (سـ_١)) ، (سـ_٢ ، د (سـ_٢)) ، (سـ_٣ ، د (سـ_٣)) ، (سـ_٤ ، د (سـ_٤)) ، (سـ_٥ ، د (سـ_٥)) \}$$

سـ _١	سـ _٢	سـ _٣	سـ _٤	سـ _٥
د (سـ _١)	د (سـ _٢)	د (سـ _٣)	د (سـ _٤)	د (سـ _٥)

فمثلاً :

فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائى سـ يعبر عن عدد الصور نجد أن :

$$\text{مدى المتغير العشوائى سـ} = \{ ٢ ، ١ ، ٠ \} ، د (ف) = \frac{1}{4}$$

$$د (٢) = \frac{1}{4} ، د (١) = \frac{1}{4} ، د (٠) = \frac{1}{4}$$

التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى سـ يعطى من الجدول :

سـ	٠	١	٢
د (سـ)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للمتغير العشوائى المتقطع

إذا كان S متغير عشوائى له توزيع إحتمالى فإن أى دراسة إحصائية لهذا التوزيع تعتمد على التعرف على مقياسين من المقاييس الإحصائية هما :

- **النزعة المركزية** : و هى القيمة التى تتمركز عندها قيم هذا المتغير العشوائى
 - **التشتت** : و هو يبين إلى أى مدى تشتتت قيم المتغير العشوائى حول نزعته المركزية
- الوسط الحسابى هو أحد مقاييس النزعة المركزية ، التباين هو أحد مقاييس التشتت و كذلك الانحراف المعياري

الوسط الحسابى و التباين و الانحراف المعياري :

إذا كان : S متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_r\}$ بإحتمالات $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$ على الترتيب فإن :

الوسط الحسابى " التوقع " $(\mu) = \sum_{r=1}^n S_r \cdot d_r$
 أى أن : $\mu = S_1 \cdot d_1 + S_2 \cdot d_2 + S_3 \cdot d_3 + \dots + S_r \cdot d_r + \dots + S_n \cdot d_n$

التباين : $(\sigma^2) = \sum_{r=1}^n S_r^2 \cdot d_r - (\mu)^2$

الانحراف المعياري : $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2}$

معامل الإختلاف : إذا إختلفت وحدات كل من الوسط الحسابى و الانحراف المعياري نستخدم معامل الإختلاف للمقارنة بين تشتت المجموعتين

$$\text{معامل الإختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابى}} \times 100$$

مثال :

فى ما يلى التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى S الذى يعبر عن عدد الصور لتجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أحسب الوسط الحسابى و الانحراف المعياري لهذا التوزيع ثم أوجد معامل الإختلاف

الحل

S_r	d_r	$S_r \cdot d_r$	$S_r^2 \cdot d_r$
٠	$\frac{1}{8}$	٠	٠
١	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
٢	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{12}{8}$
٣	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$
		$1 \frac{1}{4} = \frac{12}{8}$	$3 = \frac{24}{8}$

من الجدول : الوسط الحسابى " التوقع " $(\mu) = 1 \frac{1}{4}$

، التباين $= 3 - (1.5)^2 = \frac{3}{4}$ ، الانحراف المعياري $= \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.87$

، معامل الإختلاف $= 100 \times \frac{0.87}{3} = 29$

تمارين

- ١ - فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى يعبر عن (عددالكتابات)
أوجد الوسط الحسابى ؛ معامل الإختلاف للمتغير العشوائى س
- ٢ - فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى يعبر عن
(عدد الكتابات - عدد الصور) أوجد الإنحراف المعيارى
- ٣ - فى تجربة إلقاء قطعة نقود أربع مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن
(عدد الصور - عدد الكتابات) أوجد الإنحراف المعيارى
- ٤ - صندوقان بكل منهما ٣ كرات مرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير
العشوائى س بأنه حاصل ضرب العددين المكتوبين على الكرتين المسحوبتين أوجد التوقع
- ٥ - صندوقان بكل منهما ٣ كرات مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير
العشوائى س بأنه الفرق المطلق بين العددين المكتوبين على الكرتين المسحوبتين أوجد الإنحراف
المعيارى
- ٦ - ألقى حجر نرد مرتين متتاليتين فإذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن مقياس الفرق بين العددين
الظاهرين أوجد الإنحراف المعيارى
- ٧ - صمم حجر نرد بحيث يحمل وجهان منه الرقم ١ ، وجهان منه الرقم ٣ ، وجهان منه الرقم ٥ ألقى هذا
الحجر مرتين متتاليتين وعرف المتغير العشوائى س بأنه مجموع العددين الظاهرين اوجد التوقع
- ٨ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } بإحتمالات ل (س = ٠) = ٠.١ ،
ل (س = ١) = ٠.٢ ، ل (س = ٣) = ٠.٤ أوجد ل (س = ٢) ثم أوجد الإنحراف المعيارى
- ٩ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا مداه { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٢ } ، كان
ل (س = -٣) = ل (س = -٢) = ل (س = -١) = ل (س = ٢) = ١/٨ أوجد ل (س = ١) ثم أوجد الإنحراف المعيارى
- ١٠ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك س}{٦}$ حيث
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب معامل الإختلاف
- ١١ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك س}{١٠}$
حيث س = ٠ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب الإنحراف المعيارى
- ١٢ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + س}{٩}$ حيث
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب التباين
- ١٣ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + س + ١}{٩}$ حيث
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب معامل الإختلاف
- ١٤ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + ٢}{١ + س}$ حيث
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب التباين
- ١٥ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا توزيعه الإحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك}{٢ + س}$ حيث
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد قيمة ل ثم أحسب التباين
- ١٦ - إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا مداه { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } بإحتمالات قدرها $\frac{٢ - ك}{١٥}$ ،

$$\frac{ك}{١٥} ، \frac{١ + ك}{١٥} ؛ \frac{٢ + ك}{١٥} ، \frac{١ - ك}{١٥}$$

؛ الإنحراف المعيارى

١٧ - إذا كان s متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه $\{0, 1, 3, 7\}$ باحتمالات قدرها $\frac{1-k}{6}$

، $\frac{1-k}{3}$ ، $\frac{k}{24}$ ، $\frac{1+2k}{12}$ على الترتيب أوجد قيمة k ؛ الإنحراف المعياري

١٨ - s متغير عشوائي متقطع مداه $\{1, 2\}$ فإذا كان الوسط الحسابي $\mu = \frac{5}{3}$ فأوجد L (س = ١) ،
 L (س = ٢) ؛ معامل الاختلاف

١٩ - s متغير عشوائي متقطع مداه $\{2, 3\}$ فإذا كان الوسط الحسابي $\mu = \frac{11}{4}$ فأوجد L (س = ٢) ،
 L (س = ٣) ؛ معامل الاختلاف

٢٠ - s متغير عشوائي متقطع مداه $\{p, b, 4, 5, 7\}$ حيث $p > b > 4$ وكان توزيعه الإحتمالي يعطي بالدالة $D(s) = \frac{k}{20}$ لكل $k \in \{p, b, 4, 5, 7\}$ إذا كان L (ب > س > ٥) = ٠.٦

أوجد قيمة k من p, b ، ثم أحسب التباين

٢١ - إذا كان s متغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي مبين بالجدول التالي أوجد k ، الإنحراف المعياري

س	١	٢	٤	٦
د (س)	٠.٢	٠.٣	ك	٠.١

٢٢ - إذا كان s متغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي مبين بالجدول التالي أوجد m ، الإنحراف المعياري

س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	٢	٤	٣

٢٣ - إذا كان s متغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي مبين بالجدول التالي أوجد p ، b إذا كان $\mu = 3$ ثم
 أحسب الإنحراف المعياري

س	١	٢	٤	p
د (س)	٠.٢	ب	٠.٤	٠.١

٢٤ - إذا كان s متغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي مبين بالجدول التالي أوجد p ، b إذا كان $\mu = \frac{4}{5}$ ثم
 أحسب الإنحراف المعياري

س	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	p	ب	$\frac{7}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

٢٥ - إذا كان s متغير عشوائي متقطع توزيعه الإحتمالي مبين بالجدول التالي أوجد m ، k إذا كان $\mu = 3$ ثم
 أحسب انحراف المعياري

س	٠	٢	ك	٤
د (س)	٣	٢	٢	٥

٢٦ - متغير عشوائي متقطع وسطه الحسابي ٤٤ وتباينه ٢٥ أوجد معامل الاختلاف

٢٧ - متغير عشوائي متقطع وسطه الحسابي ٢٥ ومعامل الاختلاف له ٥٦ أوجد التباين

٢٨ - متغير عشوائي متقطع إنحرافه المعياري ٦ ومعامل الاختلاف له ٨ أوجد الوسط الحسابي

٢٩ - عند بحث العلاقة بين أعمار وأوزان مجموعة من لاعبي كرة القدم وجد أن متوسط أعمارهم ٦ . ٢١ بإنحراف معياري ٤ . ٢ وأن متوسط أوزانهم ٧٢ وكان معامل الاختلاف لهذه الأوزان مساوياً لنصف معامل الاختلاف لأعمارهم فأوجد الإنحراف المعياري لأوزان هذه المجموعة

المتغير العشوائى المتصل " المستمر "

المتغير العشوائى المتصل :

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى المتصل :

إذا كان S متغير عشوائى متصل مداه الفترة $[a, b]$ ، الدالة D حيث $D : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

بحيث تحقق : (1) $D(S) \geq 0$ لكل $S \in [a, b]$

(2) الشكل البيانى لهذه الدالة هو منحنى متصل بحيث تكون مساحة المنطقة أسفل منحنى

الدالة و فوق $[a, b]$ مساوية للواحد الصحيح

دالة الكثافة :

إذا كان S متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية D تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى S إذا كان :

$L(a \leq S \leq b) =$ مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى D و فوق محور السينات فى $[a, b]$

و ذلك لكل عددين حقيقيين a, b حيث $a \geq b$

مثال :

إذا كان S متغير عشوائى متصل دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$D(S) = \begin{cases} \frac{17-2S}{50} & 1 \leq S \leq 6 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

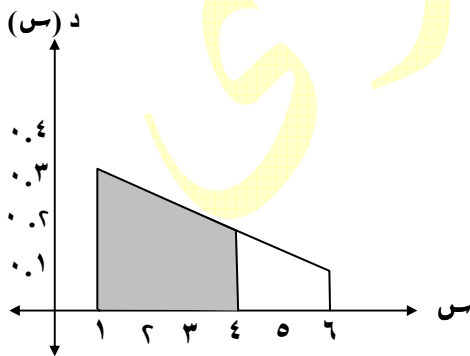
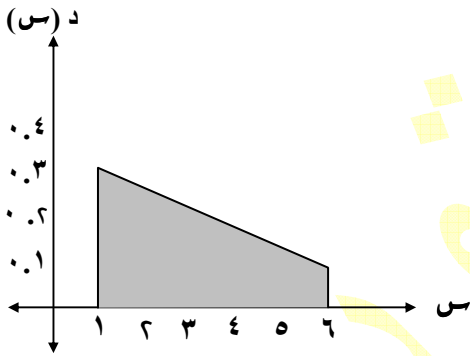
أثبت أن : $L(1 \leq S \leq 6) = 1$ ثم أوجد $L(S > 4)$

الحل

$$L(1) = \frac{1}{50} = 0.02 , \quad L(6) = \frac{6}{50} = 0.12$$

$L(1 \leq S \leq 6) =$ مساحة شبه المنحرف " كما بالشكل "

$$= \frac{1}{2} \times (1 - 6) \times (0.02 + 0.12) = 1$$



$$L(4) = \frac{4}{50} = 0.08$$

$L(S > 4) =$ مساحة شبه المنحرف " كما بالشكل "

$$= \frac{1}{2} \times (1 - 4) \times (0.08 + 0.12) = 0.072$$

تمارين

١ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq s \geq 3 - \epsilon, \quad \frac{s+3}{18} \\ \text{فيما عدا ذلك} \quad \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* تحقق أن $l(3 \geq s \geq 3 - \epsilon) = 1$ * أوجد $l(s \geq 0)$

٢ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 5 \geq s \geq 2, \quad \frac{2+s}{27} \\ \text{فيما عدا ذلك} \quad \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* تحقق أن $l(s)$ دالة كثافة للمتغير s * أوجد $l(s \geq 3)$

٣ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 4 \geq s \geq 0, \quad \frac{s+1}{12} \\ \text{فيما عدا ذلك} \quad \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* تحقق أن $l(0 \leq s \leq 4) = 1$ * أوجد $l(s \geq 3)$

٤ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا حيث :

$$\left. \begin{array}{l} 5 \geq s \geq 1, \quad \frac{3+s}{40} \\ \text{فيما عدا ذلك} \quad \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* تحقق أن $l(s)$ دالة كثافة للمتغير s * أوجد $l(1 \leq s \leq 3)$

٥ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s \geq 0, \quad l(s) \\ \text{فيما عدا ذلك} \quad \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* أوجد قيمة $l(s \geq 1)$

٦ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s \leq 7, \quad \frac{15 - 2s}{30} \\ \text{فيما عدا ذلك} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* أوجد قيمة l * أوجدل ($2 \leq s \leq 4$)

٧ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 5, \quad \frac{2 + s}{3} \\ \text{فيما عدا ذلك} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* أوجد قيمة l * أوجدل ($3 \leq s \leq 4$)

٨ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leq s \leq 6, \quad \frac{13 - 2s}{18} \\ \text{فيما عدا ذلك} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

* أوجد قيمة l * أوجدل ($3 \leq s \leq 6$)

٩ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s \leq 6, \quad \frac{2 + s}{24} \\ \text{فيما عدا ذلك} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

، كان : $l = \frac{7}{6} = (s > 3)$ * أوجد قيمة l * أوجدل ($s \geq 2$)

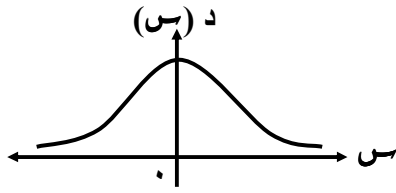
١٠ - إذا كان s متغيرا عشوائيا متصلا دالة كثافة الإحتمال له هي :

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq s \leq 4, \\ 4 < s \leq 6, \\ \text{فيما عدا ذلك} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} = (s) د$$

أوجدل ($1 \leq s \leq 6$) ، ل ($s > 5$) ، ل ($s < 3$)

التوزيع الطبيعي " الإعتدالي "

التوزيع الطبيعي :



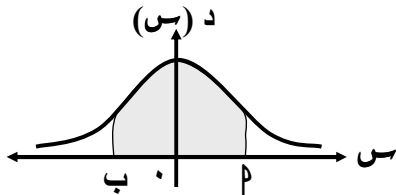
هو توزيع لمتغير عشوائي s متصل مداه $[-\infty, \infty]$ و دالة كثافة الاحتمال له دالة أسية تعتمد على القيمتين μ " الوسط الحسابي ، σ " الإنحراف المعياري " لهذا المتغير العشوائي s و منحنى هذه الدالة يسمى بالمنحنى الطبيعي و يطلق عليه منحنى جاوس و يأخذ شكل الجرس

خواص المنحنى الطبيعي :

- ١ - المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
- ٢ - متماثل بالنسبة للمستقيم : $s = \mu$
- ٣ - له قيمة واحدة عند $s = \mu$
- ٤ - يتزايد في $[-\infty, \mu]$ ، و يتناقص في $[\mu, \infty]$
- ٥ - يقترب طرفاه من محور السينات دون أن يقطعه

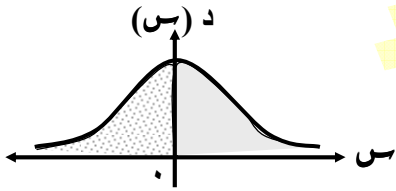
التوزيع الطبيعي المعياري :

هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي $\mu = 0$ ، و إنحرافه المعياري $\sigma = 1$



خواص المنحنى الطبيعي المعياري :

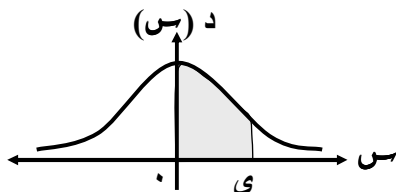
- ١ - المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
- ٢ - متماثل بالنسبة للمستقيم : $s = 0$
- ٣ - المساحة فوق محور السينات و تحت المنحنى $= 0.5$ و المستقيم $s = 0$ يقسم هذه المساحة إلى قسمين متساويين كل منهما $= 0.5$



- ٤ - مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق الفترة $[ب, م]$ تمثل عدداً احتمال وقوع المتغير العشوائي s في $[ب, م]$ أي أن :
ل $(م \geq s \geq ب) =$ مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى و فوق $[ب, م]$

حساب الاحتمالات للمتغير الطبيعي المعياري :

- إذا كان s متغير طبيعي معياري ، وكان $م \geq s \geq ب$
فإن : ل $(م \geq s \geq ب) =$ مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري و فوق $[ب, م]$
و تستخدم جداول خاصة تعطي مساحة تقريبية تحت المنحنى و فوق الفترة $[ي, ٠]$
حيث $ي$ عدد حقيقي موجب يأخذ قيمة تبدأ من الصفر و تنتهي بالعدد ٣.٢



أي أن :
ل $(م \geq s \geq ب) =$ مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري و فوق $[ي, ٠]$

كما بالشكل المقابل

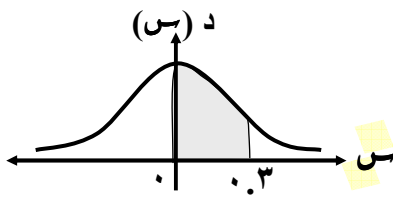
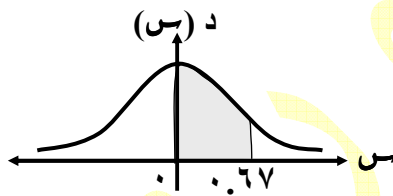
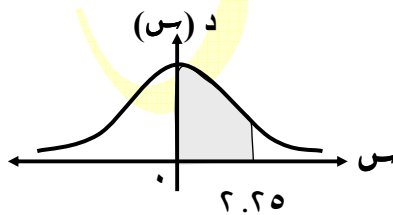
مثال :

باستخدام جداول المساحات و تحت المنحنى الطبيعي المعياري أوجد :

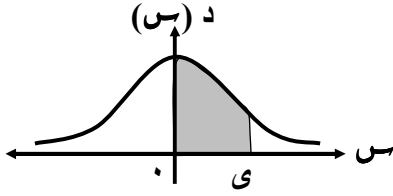
(1) ل ($0 \leq v \leq 0.3$) (2) ل ($0 \leq v \leq 0.67$) (3) ل ($0 \leq v \leq 2.25$)الحل

جزء من جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري :

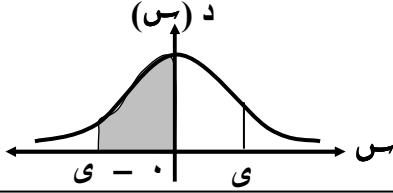
0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0	0
0.359	0.319	0.279	0.239	0.199	0.160	0.120	0.080	0.040	0	0
0.753	0.714	0.675	0.636	0.596	0.557	0.517	0.478	0.438	0.398	0.1
0.1141	0.1103	0.1064	0.1026	0.987	0.948	0.910	0.871	0.832	0.793	0.2
0.1517	0.1480	0.1443	0.1406	0.1368	0.1331	0.1293	0.1255	0.1217	0.1179	0.3
0.1879	0.1844	0.1808	0.1772	0.1736	0.1700	0.1664	0.1628	0.1591	0.1554	0.4
0.2224	0.2190	0.2157	0.2123	0.2088	0.2054	0.2019	0.1985	0.1950	0.1915	0.5
0.2549	0.2518	0.2486	0.2454	0.2422	0.2389	0.2357	0.2324	0.2291	0.2259	0.6
										0
										0
										0
0.4857	0.4854	0.4850	0.4846	0.4842	0.4838	0.4834	0.4830	0.4826	0.4821	2.1
0.4890	0.4887	0.4884	0.4881	0.4878	0.4875	0.4871	0.4868	0.4864	0.4861	2.2
										0
										0
										0
0.4995	0.4995	0.4995	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4993	0.4993	3.2

(1) ل ($0 \leq v \leq 0.3$) = 0.1179
من الجدول مباشرة(2) ل ($0 \leq v \leq 0.67$) = 0.2486(3) ل ($0 \leq v \leq 2.25$) = 0.4878

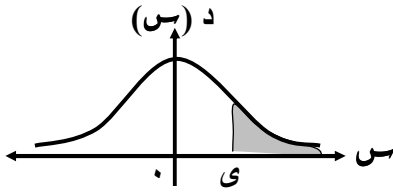
ملخص قواعد استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري :



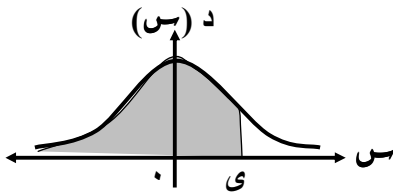
١ - ل (٠ ≥ ص ≥ ي) حيث : ي عدد موجب
يكشف من الجدول مباشرة



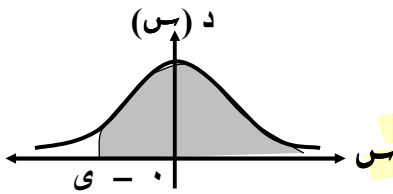
٢ - ل (- ي ≤ ص ≤ ي) = ل (٠ ≤ ص ≤ ي)
حيث : ي عدد موجب



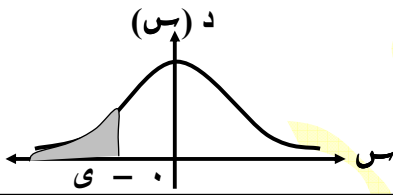
٣ - ل (ص ≤ ي) = ٠.٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ي)
حيث : ي عدد موجب



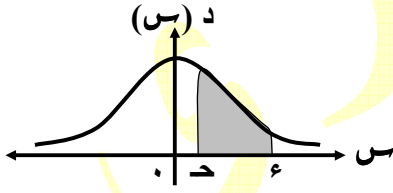
٤ - ل (ص ≥ ي) = ٠.٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ي)
حيث : ي عدد موجب



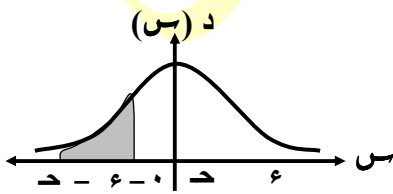
٥ - ل (ص ≤ - ي) = ٠.٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ي)
حيث : ي عدد موجب



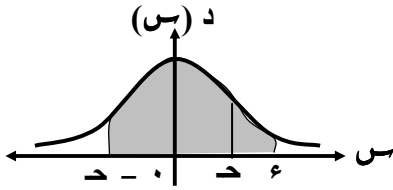
٦ - ل (ص ≥ - ي) = ٠.٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ي)
حيث : ي عدد موجب



٧ - ل (د ≤ ص ≤ ع) = ل (٠ ≤ ص ≤ ع) - ل (٠ ≤ ص ≤ د)
حيث : د، ع موجبان ، د > ع

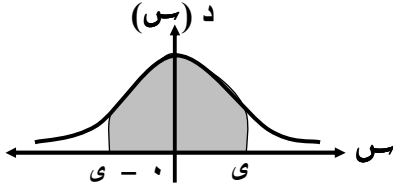


٨ - ل (د - ع ≤ ص ≤ د) = ل (٠ ≤ ص ≤ د) - ل (٠ ≤ ص ≤ ع)
حيث : د، ع موجبان ، د > ع



$$= ل - (د \geq ص \geq ٤) = ل + (٤ \geq ص \geq ٠) ل$$

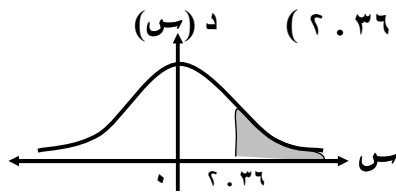
حيث : د، ٤ موجبان ، د > ٤



$$= ل - (٢ \geq ص \geq ٠) ل$$

حيث : ي عدد موجب

أمثلة :



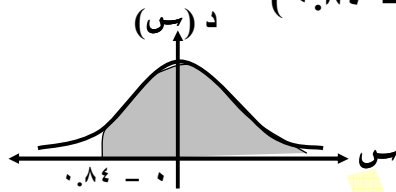
(١) إذا كان ص متغير طبيعي معيارى أوجد : ل (ص ≤ ٢.٣٦) د

الحل

$$ل (ص \leq ٢.٣٦) = مساحة المنطقة المظلمة بالشكل$$

$$= ل - ٠.٥ = (٠ \geq ص \geq ٢.٣٦) ل$$

$$= ٠.٤٩٠٩ - ٠.٥ = ٠.٠٠٩١$$



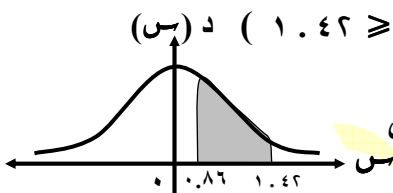
(٢) إذا كان ص متغير طبيعي معيارى أوجد : ل (ص ≤ -٠.٨٤) د

الحل

$$ل (ص \leq -٠.٨٤) = مساحة المنطقة المظلمة بالشكل$$

$$= ل + ٠.٥ = (٠ \geq ص \geq -٠.٨٤) ل$$

$$= ٠.٢٠٠٥ + ٠.٥ = ٠.٧٠٠٥$$



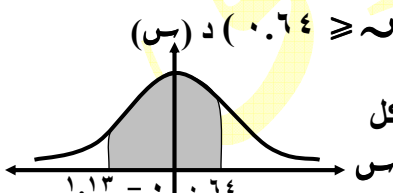
(٣) إذا كان ص متغير طبيعي معيارى أوجد : ل (٠.٨٦ ≤ ص ≤ ١.٤٢) د

الحل

$$ل (٠.٨٦ \leq ص \leq ١.٤٢) = مساحة المنطقة المظلمة بالشكل$$

$$= ل - (١.٤٢ \geq ص \geq ٠) ل - (٠.٨٦ \geq ص \geq ٠) ل$$

$$= ٠.٤٢٢٢ - ٠.٣٠٥١ = ٠.١١٧١$$



(٤) إذا كان ص متغير طبيعي معيارى أوجد : ل (١.١٣ - ٠.٦٤ ≤ ص ≤ ١.١٣) د

الحل

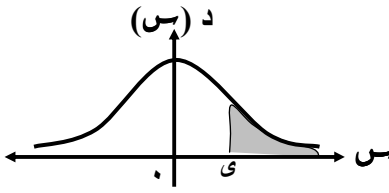
$$ل (١.١٣ - ٠.٦٤ \leq ص \leq ١.١٣) = مساحة المنطقة المظلمة بالشكل$$

$$= ل + (١.١٣ \geq ص \geq ٠) ل + (٠.٦٤ \geq ص \geq ٠) ل$$

$$= ٠.٣٧٠٨ + ٠.٢٣٨٩ = ٠.٦٠٩٧$$

(٥) إذا كان V متغير طبيعي معياري أوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب Y الذي يحقق :

$$P(V \leq Y) = 0.4013$$



الحل

$$P(V \leq Y) = 0.4013 < 0.5$$

$$\therefore P(V \leq Y) = 0.4013 \Rightarrow P(V \geq 0) - P(V \geq Y) = 0.4013$$

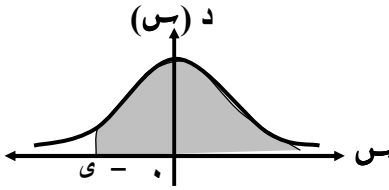
$$\therefore P(V \geq 0) - P(V \geq Y) = 0.4013 \Rightarrow 0.5 - P(V \geq Y) = 0.4013$$

وبالبحث في الجدول عن قيمة Y التي تناظر المساحة الناتجة

$$\therefore Y = 0.25$$

(٦) إذا كان V متغير طبيعي معياري أوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب Y الذي يحقق :

$$P(V \leq Y) = 0.8577$$



الحل

$$P(V \leq Y) = 0.8577 > 0.5$$

$$\therefore P(V \leq Y) = 0.8577 \Rightarrow P(V \leq 0) + P(V \leq Y) = 0.8577$$

$$\therefore P(V \leq 0) + P(V \leq Y) = 0.8577 \Rightarrow 0.5 + P(V \leq Y) = 0.8577$$

وبالبحث في الجدول عن قيمة Y التي تناظر المساحة الناتجة

$$\therefore Y = 1.07$$

تمارين

إذا كان V متغيرا عشوائيا له توزيع طبيعي معياري فإوجد :			
١	$P(0 \leq V \leq 1.35)$	٢	$P(0 \leq V \leq 0.69)$
٣	$P(-1.4 \leq V \leq 0)$	٤	$P(-1.67 \leq V \leq 0)$
٥	$P(V < 3.3)$	٦	$P(V \leq 1.39)$
٧	$P(V \geq 1.34)$	٨	$P(V \geq 1.43)$
٩	$P(V \geq -1.41)$	١٠	$P(V \geq -1.41)$
١١	$P(V < -0.35)$	١٢	$P(V \geq -1.53)$
١٣	$P(1.1 \leq V \leq 3.45)$	١٤	$P(1.33 \leq V \leq 2.5)$
١٥	$P(-2.5 \leq V \leq -1.4)$	١٦	$P(-3.33 \leq V \leq -1.43)$
١٧	$P(-1.35 \leq V \leq -0.15)$	١٨	$P(-1.35 \leq V \leq 1.35)$

إذا كان V متغيرا عشوائيا طبيعيا فإوجد قيمة العدد الحقيقي Y التي تحقق كلا مما يأتي :

١	$P(V < 0.287) = 0.0287$	٢	$P(V < 0.985) = 0.0985$
٣	$P(V < -0.9332) = 0.9332$	٤	$P(V < -0.9370) = 0.9370$
٥	$P(V > 0.6879) = 0.6879$	٦	$P(V < 0.9893) = 0.9893$
٧	$P(V > -0.793) = 0.793$	٨	$P(V > -0.548) = 0.548$
٩	$P(-1.2 \leq V \leq 0.7164) = 0.7164$	١٠	$P(-1.4 \leq V \leq 0.9013) = 0.9013$
١١	$P(-1.72 \leq V \leq -0.337) = 0.337$	١٢	$P(-2.33 \leq V \leq -0.679) = 0.679$
١٣	$P(-1.8 \leq V \leq 0.9214) = 0.9214$	١٤	$P(2.45 \leq V \leq 0.5682) = 0.5682$
١٥	$P(2.25 \leq V \leq 0.0472) = 0.0472$	١٦	$P(-Y \leq V \leq Y) = 0.5704$

حساب الإحتمالات لمتغير طبيعي غير معياري

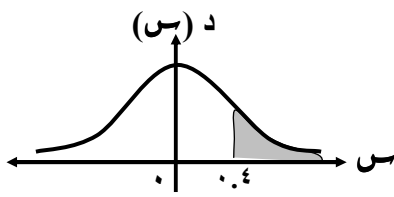
قاعدة التحويل إلى متغير طبيعي معياري :

إذا كان $س$ متغير طبيعي غير معياري ووسطه الحسابي μ و إنحرافه المعياري σ
 نحول هذا المتغير إلى متغير طبيعي معياري $ص$ بالقاعدة

$$ص = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

$$\text{ويكون : ل } (\mu \geq س \geq \rho) = (\frac{\mu - \rho}{\sigma} \geq ص \geq \frac{\mu - \mu}{\sigma})$$

أمثلة :



(1) إذا كان $س$ متغير طبيعي ووسطه الحسابي $\mu = 75$ ،
 إنحرافه المعياري $\sigma = 7.5$ أوجد
 ل $(78 \leq س)$

الحل

$$\text{ل } (78 \leq س) = \text{ل } (\frac{75 - 78}{7.5} \leq \frac{75 - س}{7.5}) = \text{ل } (0.4 \leq ص)$$

$$0.3446 = 0.1554 - 0.5 = \text{ل } (0.4 \geq ص \geq 0) - 0.5 =$$

(2) إذا كان $س$ متغير طبيعي ووسطه الحسابي μ ، إنحرافه المعياري σ أوجد قيمة :

$$\text{ل } (\sigma - \mu \geq ص \geq \sigma + \mu)$$

الحل

$$\text{ل } (\sigma - \mu \geq ص \geq \sigma + \mu) = \text{ل } (\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \geq \frac{\mu - س}{\sigma} \geq \frac{\mu - \sigma + \mu}{\sigma})$$

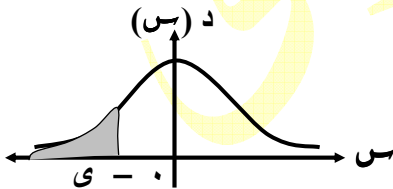
$$= \text{ل } (-1 \geq ص \geq 1) = 2 \times \text{ل } (1 \geq ص \geq 0) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

(3) إذا كان $س$ متغير طبيعي ووسطه الحسابي μ ، إنحرافه المعياري $\sigma = 10$ أوجد قيمة μ

$$\text{التي تحقق : ل } (65 \geq س) = 0.1587$$

الحل

$$\text{ل } (65 \geq س) = 0.1587 \quad \therefore \text{ل } (\frac{\mu - 65}{10} \geq \frac{\mu - س}{10}) = 0.1587$$



$$\text{ل } (ص \geq 1) = 0.1587 \quad \text{حيث : } \frac{\mu - 65}{10} = 1$$

$$\therefore 0.5 > 0.1587$$

$$\text{ل } (0 \geq ص \geq 1) = 0.1587 - 0.5 = 0.3413$$

من الجدول $1 =$

$$\therefore 0.5 > 0.1587 \quad \therefore \frac{\mu - 65}{10} > 0.1587 \quad \text{ومنها : } 65 < \mu$$

$$\therefore 1 = \frac{65 - \mu}{10} \quad \therefore 10 = 65 - \mu \quad \therefore 75 = \mu$$

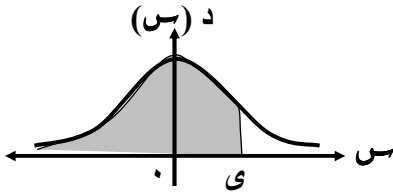
(٤) إذا كان s متغير طبيعي وسطه الحسابي $\mu = 30$ ، إنحرافه المعياري σ أوجد قيمة σ التي تحقق: $P(s \geq 40) = 0.9938$

الحل

$$P(s \geq 40) = 0.9938 \quad \therefore P\left(\frac{30 - s}{\sigma} \geq \frac{30 - 40}{\sigma}\right) = 0.9938$$

$$P\left(\frac{30 - s}{\sigma} \geq \frac{30 - 40}{\sigma}\right) = 0.9938 \quad \text{حيث: } y = \frac{30 - s}{\sigma}$$

$$0.5 < 0.9938$$



$$P(0 \leq y) = 0.5 - 0.9938 = 0.4938$$

من الجدول: $y = 2.5$

$$10 > \sigma \quad \text{ومنها: } 0 < \frac{30 - 40}{\sigma}$$

$$2.5 = \frac{30 - 40}{\sigma} \quad \therefore 2.5 = \frac{30 - 40}{\sigma} \quad \therefore 10 = \sigma \quad \therefore 4 = \sigma$$

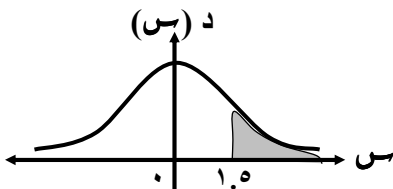
(٥) إذا كانت أجور ٣٠٠٠ عامل تتبع توزيع طبيعي بمتوسط حسابي $\mu = 75$ جنيهاً ، و إنحراف معياري $\sigma = 10$ أوجد:

١ - النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً

٢ - عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً

الحل

$$1 - P(s < 90) = P\left(\frac{75 - s}{10} < \frac{75 - 90}{10}\right) = P(s < 90)$$



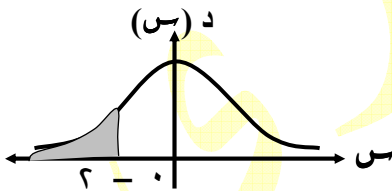
$$0.5 = P(0 \leq s \leq 90)$$

$$0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

\therefore النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم

عن ٩٠ جنيهاً = ٦.٦٨ %

$$2 - P(s > 55) = P\left(\frac{75 - s}{10} > \frac{75 - 55}{10}\right) = P(s > 55)$$



$$0.5 = P(0 \leq s \leq 55)$$

$$0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

\therefore عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً

$$= 0.0228 \times 3000 = 68 \text{ عامل}$$

تمارين

- ١ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي ١٨ ؛ إنحرافه المعياري ٢.٥ فأوجد :
 (P) ل ($s > 15$) ؛ (ب) ل ($17 > s > 21$)
- ٢ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي ٢٥ ؛ تباينه ٢٥ فأوجد :
 (P) ل ($s \leq 33.5$) ؛ (ب) ل ($14 > s > 29$)
- ٣ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي ٨ ؛ تباينه ٤ و كان : ل ($s \leq y$) = ٠.١٠٥٦
 فأوجد : (P) قيمة y ؛ (ب) ل ($s > 10$)
- ٤ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي ٤٥ ؛ تباينه ٢٥ أوجد :
 (P) ل ($31 > s > 50$) ، (ب) قيمة y التي تحقق ل ($s < y$) = ٠.٥٦٧٥
- ٥ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ ؛ وإنحرافه المعياري = ٥ فأوجد قيمة μ إذا علم
 أن ل ($s \leq 29.5$) = ٢.١١٩
- ٦ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ ؛ تباينه ٦٤ و كان : ل ($s \geq 40$) = ٠.١٥٨٧
 فأوجد (P) قيمة μ ؛ (ب) ل ($s < 50$)
- ٧ - إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي = ٥٥ ؛ إنحرافه المعياري σ فأوجد تباينه الذي يحقق
 ل ($s \geq 45$) = ٠.٠٢٢٨
- ٨ - إذا كان للمتغير العشوائي s توزيع طبيعي وسطه الحسابي μ ولإنحرافه المعياري σ فأوجد :

١ ل ($s \leq \mu + \sigma$)	٢ ل ($s \geq \mu - 1.9\sigma$)
٣ ل ($\sigma - \mu > s > \sigma + \mu$)	٤ ل ($\sigma + \mu \geq s \geq \sigma + \mu + 2.4\sigma$)
٥ ل ($\sigma - 1.35\mu \geq s \geq \sigma + 0.15\mu$)	٦ ل ($s - \mu \leq 1.29\sigma$)
٧ ل ($-\sigma \frac{1}{4} \geq s - \mu \geq \sigma \frac{1}{4}$)	٨ ل ($s - \mu \leq \sigma \frac{1}{4}$)

- ٩ - إذا كان s متغيراً طبيعياً وسطه الحسابي μ وإنحرافه المعياري σ فأوجد قيمة z التي تحقق الآتي :

$$(1) ل ($s \geq \mu + z\sigma$) = ٠.١١١٢$$

$$(2) ل ($s \leq \mu + z\sigma$) = ٠.٠٢٨٧$$

$$(3) ل ($-\mu - z\sigma \leq s \leq \mu + z\sigma$) = ٠.٦٤٢٤$$

$$(4) ل ($\sigma + \mu \geq s \geq \sigma + \mu + 1.35\sigma$) = ٠.٨٢٣٠$$

$$(5) ل ($-\mu - 1.2\sigma \leq s - \mu \leq \sigma$) = ٠.٧١٦٤$$

- ١٠ - إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل في أحد المصانع تتبع توزيع طبيعي بمتوسط ١٧٥ جنيهاً وإنحراف معياري ١٠ جنيهاً فما هو عدد العاملين الذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهاً ، ١٨٠ جنيهاً
- ١١ - إذا كانت أوزان الطلاب بإحدى الكليات تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم^٢ فأوجد النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٥ كجم ، ٧٢ كجم
- ١٢ - إذا كانت أجور مجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل تتوزع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي ٦٠ جنيهاً و إنحرافه المعياري σ فإذا كان ٣٠.٨٥٪ من العمال أجورهم لا تزيد عن ٥٤ جنيهاً فأوجد σ ثم أحسب عدد العمال الذين لا تقل أجورهم عن ٨١ جنيهاً

- ١٣ - إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠ شخص تتبع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي μ وانحراف معياري ٥ سم وكانت أطوال ١٩.٢١٪ من الأشخاص يقل طولهم عن ١٦٨ سم أوجد μ ثم أحسب عدد الأشخاص الذين يزيد طول كل منهم عن ١٨٢ سم
- ١٤ - إذا كان سعر سلعة يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط ١٢٠ و تباين ١٠٠ وأن احتمال حصول شخص على سلعة ذات أقل من قيمة معينة α هو ٠.٢٨٧ . فما قيمة α
- ١٥ - في إمتحان لمادة ما يضم عدد أكبر من الطلاب إذا كانت درجة الإمتحان لها توزيع طبيعي وكان ١٤٪ من الطلاب حصل على أقل من ٣٠ درجة ؛ ٢٦٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة أوجد متوسط و تباين توزيع الدرجات
- ١٦ - أخذت عينة عشوائية من طلاب مدارس محافظة ما عددها ٥٠٠٠ طالب وكان عدد الطلاب الذين تزيد أعمارهم عن ١٦ سنة مساويا ٣٠٤٣ (علما بأن الحد الأقصى للسنة في هذه المرحلة ١٩ سنة) وكانت أعمارهم متغير عشوائي طبيعي بتباين ١.٤٤ أوجد الوسط الحسابي
- ١٧ - مسافر لديه ٤٢ دقيقة للحاق بالطائرة وكان عليه أن يستقل إما التاكسي أو الأوتوبيس لتوصيله للمطار فإذا كان التاكسي يستغرق في المتوسط ٣٠ دقيقة بإنحراف معياري ١٠ دقائق وكان الأوتوبيس يستغرق في المتوسط ٣٥ دقيقة بإنحراف معياري ٥ دقائق فأى الوسيلتين يستخدم
- ١٨ - بفرض أن درجات أحد الأمتحانات هي متغير طبيعي بتوقع ٧٦ وانحراف معياري ١٥ يأخذ ١٥٪ من الطلبة الأوائل بالترتيب العلامة α ويأخذ ١٠٪ من الطلبة الحاصلون على أقل الدرجات بالترتيب العلامة β أوجد : (β) أقل درجة كي يحصل الطالب على العلامة α
(β) أقل درجة يحصل عليها الطالب لكي يعتبر ناجحا (لا يحصل على العلامة β)
- ١٩ - إذا كان \bar{X} متغيرا عشوائيا طبيعيا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ وكان :
ل ($\bar{X} \leq ٢٠.٥$) = ٠.١١٥١ ، ل ($\bar{X} > ١٣.٩٥$) = ٠.٠٧٧٨ أوجد قيمة كلا من μ ، σ
- ٢٠ - في إختبار مادة ما إمتحن فيها طلبة إحدى الكليات كانت الدرجات موزعة توزيعا طبيعيا بمتوسط ٧٥ درجة وتباين ١٠٠ (علما بأن الدرجة النهائية ١٠٠) أوجد :
* الدرجات المعيارية لطلابين أ ، ب حصلا علي ٦٠ ، ٩٦ درجة علي الترتيب
* الدرجات التي حصلا عليها طالبين د ، هـ إذا كانت درجاتهم المعيارية - ٠.٦ ، ١.٢
- ٢١ - بفرض أن أنصاف الأقطار للحلزونات التي تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعا طبيعيا توقعه ٢٥ وانحرافه المعياري ٢٠ ويعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ أو يكبر عن ٢٨ أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبا

الإرتباط

الإرتباط :

هو علاقة بين متغيرين (بظاهرتين) أو أكثر

درجات الإرتباط :

(١) الإرتباط التام : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

مثل : الإرتباط بين محيط المربع و طول ضلعه

(٢) الإرتباط الصفرى (المنعدم) : و الذى يعنى عدم وجود أى علاقة بين المتغيرين

مثل : العلاقة بين طول المتعلم و درجاته فى أحد الإختبارات

(٣) الإرتباط غير التام : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

مثل : الإرتباط بين طول الفرد و وزنه

أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :

(١) الإرتباط الطردى : وفيه يكون المتغيرين فى إتجاه واحد أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص

مثل : الإرتباط بين أجر عامل و مدة خبرته

(٢) الإرتباط العكسى : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين بحيث أن أى زيادة فى أحدهما

يتبعها نقص فى الآخر أو العكس

مثل : العلاقة بين عدد ساعات التدريب على إستخدام الآلة الكاتبة و عدد الأخطاء فى

الكتابة عليها

أنواع الإرتباط حسب الوصف التحليلى لعلاقة الإرتباط :

(٢) إرتباط غير خطى

(١) إرتباط خطى

تقاس درجة العلاقة بين متغيرين بمقياس يسمى " معامل الإرتباط "

معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة :

بفرض إيجاد معامل الإرتباط بين متغيرين س ، ص حيث يكون :

للمتغير س قيم عددها n_s هى : $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ،

للمتغير ص قيم عددها n_v هى : $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ،

فإن : معامل الإرتباط الخطى أو معامل إرتباط بيرسون (r) بين المتغيرين س ، ص يتعين من القانون :

$$r = \frac{n \cdot \text{م د س ص} - (\text{م د س}) \times (\text{م د ص})}{\sqrt{(n \cdot \text{م د س}^2 - (\text{م د س})^2) \times (n \cdot \text{م د ص}^2 - (\text{م د ص})^2)}}$$

بعض خصائص معامل الإرتباط (r) :

(١) تكون موجبة فى حالة الإرتباط الطردى و سالبة فى حالة الإرتباط العكسى

(٢) $r = 0$ = صفر فى حالة الإرتباط المنعدم

(٣) $r = 1$ فى حالة الإرتباط الطردى التام ، $r = -1$ فى حالة الإرتباط العكسى التام

(٤) $r \in [-1, 1]$

(٥) معامل إرتباط بيرسون لا يتغير إذا طرحنا أو جمعنا أى عدد ثابت من جميع قيم المتغير س ،

و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير ص

أى إذا كان : $s = s' + c$ ، $v = v' + c'$ ، فإن :

$$r = \frac{n \cdot \text{م د س ص} - (\text{م د س}) \times (\text{م د ص})}{\sqrt{(n \cdot \text{م د س}^2 - (\text{م د س})^2) \times (n \cdot \text{م د ص}^2 - (\text{م د ص})^2)}}$$

مثال :

أحسب معامل ارتباط بيرسون " معامل الارتباط الخطي " بين س ، ص من الجدول الآتي :

س	٨٠	٧٠	٥٥	٥٠	٤٧	٦٠	٦٨
ص	٦٠	٦٥	٥٤	٤٠	٤٠	٤٨	٥٩

الحل

س	ص	س ^٢	ص ^٢	س ص
٨٠	٦٠	٦٤٠٠	٣٦٠٠	٤٨٠٠
٧٠	٦٥	٤٩٠٠	٤٢٢٥	٤٥٥٠
٥٥	٥٤	٣٠٢٥	٢٩١٦	٢٩٧٠
٥٠	٤٠	٢٥٠٠	١٦٠٠	٢٠٠٠
٤٧	٤٠	٢٢٠٩	١٦٠٠	١٨٨٠
٦٠	٤٨	٣٦٠٠	٢٣٠٤	٢٨٨٠
٦٨	٥٩	٤٦٢٤	٣٤٨١	٤٠١٢
٤٣٠	٣٦٦	٢٧٢٥٨	١٩٧٢٦	٢٣٠٩٢

$$r = \frac{366 \times 430 - 23092 \times 7}{\sqrt{(366)^2 - 19726 \times 7} \times \sqrt{(430)^2 - 27258 \times 7}} = 0.86$$

حل آخر

نختار س' = ٦٠ ، ص' = ٥٠

س	ص	س = س' - ٦٠	ص = ص' - ٥٠	س ^٢	ص ^٢	س ص
٨٠	٦٠	٢٠	١٠	٤٠٠	١٠٠	٢٠٠
٧٠	٦٥	١٠	١٥	١٠٠	٢٢٥	١٥٠
٥٥	٥٤	٥	٤	٢٥	١٦	٢٠
٥٠	٤٠	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
٤٧	٤٠	١٣	١٠	١٦٩	١٠٠	١٣٠
٦٠	٤٨	٠	٢	٠	٤	٠
٦٨	٥٩	٨	٩	٦٤	٨١	٧٢
		١٠	١٦	٨٥٨	٦٢٦	٦٣٢

$$r = \frac{16 \times 10 - 632 \times 7}{\sqrt{(16)^2 - 626 \times 7} \times \sqrt{(10)^2 - 858 \times 7}} = 0.86$$

و هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها
و هو ارتباط طردى قوى

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

يعتبر من المقاييس التقريبية فيجاء معامل الارتباط بين متغيرين لأنه يعتمد على رتبة ليس قيم المتغيرين ويتعين معامل الارتباط من القانون :

$$r = \frac{\sum (R_s - R_v)^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث : n عدد قيم المتغيرين ، f الفرق بين كل رتبتين متناظرتين

مثال :

أحسب معامل الارتباط لسبيرمان بين s ، v من الجدول الآتي :

٦٨	٦٠	٤٧	٥٠	٥٥	٧٠	٨٠	s
٥٩	٤٨	٤٠	٤٠	٥٤	٦٥	٦٠	v

الحل

f	f	رتب v	رتب s	v	s
١	١	٦	٧	٦٠	٨٠
١	١ -	٧	٦	٦٥	٧٠
١	١ -	٤	٣	٥٤	٥٥
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{6}$	٢	٤٠	٥٠
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$ -	$1\frac{1}{6}$	١	٤٠	٤٧
١	١	٣	٤	٤٨	٦٠
٠	٠	٥	٥	٥٩	٦٨
٤.٥					

$$r = \frac{4.5 \times 6}{48 \times 7} - 1 = 0.86$$

تمارين

- ١ - لدراسة العلاقة بين الكمية v من سلعة ما والسعر بالجنيه كانت لدينا البيانات الآتية : $s = ٥٠$ ، $v = ٦٠$ ، $s = ٣٦١$ ، $v = ٣١٠$ ، $s = ٤٩٨$ ، $v = ١$ أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين الكمية المطلوبة والسعر محددًا نوعه
- ٢ - أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين s ، v محددًا نوعه ودرجته إذا كان $s = ٦٠$ ، $v = ٧٠$ ، $s = ٣٧٤$ ، $v = ٤٠٦$ ، $s = ٥٣٦$ ، $v = ١٠$
- ٣ - في دراسة للعلاقة بين المتغيرين s ، v حصلنا على النتائج الآتية : $s = ٣٣$ ، $v = ٢٤$ ، $s = ١٣٥$ ، $v = ١٩٦$ ، $s = ١٠٦$ ، $v = ٦$ أوجد قيمة معامل الارتباط لبيرسون بين المتغيرين s ، v و استنتج قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين s ، v حيث $s = ٥$ ، $v = ٤$
- ٤ - من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون :

٧	٦	١٠	٨	٧	٥	٦	s
٨	٧	٨	٦	٥	٧	٤	v

٥ - من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون :

س	٢	٣	٥	٨	١٠	١٢
ص	١٢	٨	٦	٤	٣	٢

٦ - من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون :

س	١٥	١٣	١٧	١٤	١٥	١٢
ص	٢٢	٢١	٢٧	٢٣	٢٤	١٩

٧ - من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون :-

س	٤٠	٢٣	١٨	١١	٢٩	٣٨
ص	٣٥	٣٠	٢١	١٧	٢٥	٤٢

٨ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	٨	٦	١٠	٧	٨	٥
ص	٨	٧	١٣	٩	١٠	٥

٩ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	١٨	٢٥	٢٠	٣٢	١٥	١٢	٢٤
ص	٢٥	٣٠	٣٦	٣٨	٢٢	٢٣	٣٢

١٠ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	٩	٣	٤	٩	١٠	١١
ص	٧	٩	١٠	٦	٥	٤

١١ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	٥	٢	٦	٩	٢	٧
ص	٣	٧	٦	٨	٥	٦

١٢ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	مقبول	جيد جدا	ممتاز	جيد جدا	مقبول	مقبول
ص	جيد	جيد	جيد جدا	ممتاز	جيد	ضعيف

١٣ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	جيد	جيد جدا	ممتاز	ممتاز	ممتاز	جيد
ص	مقبول	مقبول	ممتاز	جيد جدا	جيد	ضعيف

١٤ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

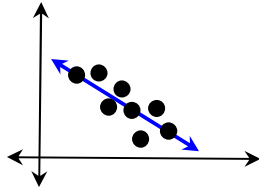
س	ممتاز	جيد	جيد	مقبول	مقبول	جيد جدا
ص	جيد	جيد جدا	جيد جدا	ممتاز	جيد	مقبول

١٥ - من بيانات الجداول الآتية أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

س	ممتاز	جيد	مقبول	مقبول	جيد	ممتاز
ص	جيد جدا	جيد	جيد	مقبول	مقبول	جيد

الإنحدار

عند دراسة العلاقة بين المتغيرين S ، V فإنه يمكن تمثيل الأزواج المرتبة الممثلة لهذه العلاقة بنقط في المستوى و يسمى الشكل الناتج " شكل الانتشار " للمتغيرين S ، V و قد يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم ، منحنى "



و قد تقع جميع هذه النقط على الخط المستقيم " المنحنى " أو تنتشر في جميع أرجاء المستوى دون رابط بينها " ارتباط منعدم " أو تبدو أنها تقع بنسب متفاوتة على خط مستقيم كما بالشكل

و بالتالي تكون العلاقة بين المتغيرين S ، V علاقة خطية و يسمى الخط المستقيم " خط الإنحدار " طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار :

(1) طريقة المربعات الصغرى :

تعتمد هذه الطريقة على توفيق أفضل خط مستقيم لمجموعة من النقط على جعل مجموع مربعات انحرافات النقط عن هذا المستقيم أصغر ما يمكن

معادلة إنحدار V على S :

" $V = mS + b$ " حيث m معامل إنحدار V على S "

$$m = \frac{\sum (S_i V_i) - \frac{\sum S_i \sum V_i}{n}}{\sum S_i^2 - \frac{(\sum S_i)^2}{n}} \quad , \quad b = \frac{\sum V_i - m \sum S_i}{n}$$

معادلة إنحدار S على V :

" $S = dV + e$ " حيث d معامل إنحدار S على V "

$$d = \frac{\sum (S_i V_i) - \frac{\sum S_i \sum V_i}{n}}{\sum V_i^2 - \frac{(\sum V_i)^2}{n}} \quad , \quad e = \frac{\sum S_i - d \sum V_i}{n}$$

(2) طريقة الانحرافات :

تعتمد على تصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب m ، b ، d ، e

و ذلك بوضع : $S' = S - \bar{S}$ و $V' = V - \bar{V}$ ،

حيث : \bar{S} و \bar{V} هـ أى عددين ثابتين يتم اختيارهما حسب ظروف المسألة

وبالتالي تكون :

$$\begin{aligned} \text{معادلة إنحدار } V \text{ على } S \text{ هي : } V' &= m' S' + b' \\ \text{معادلة إنحدار } S \text{ على } V \text{ هي : } S' &= d' V' + e' \\ \text{حيث : } m' &= m \quad , \quad d' = d \end{aligned}$$

(1) طريقة الانحرافات المبسطة :

$$\text{و فيها نضع : } S'' = \frac{S' - \bar{S}'}{L} \quad , \quad V'' = \frac{V' - \bar{V}'}{L}$$

وبالتالي تكون :

$$\begin{aligned} \text{معادلة إنحدار } V \text{ على } S \text{ هي : } V'' &= m'' S'' + b'' \\ \text{معادلة إنحدار } S \text{ على } V \text{ هي : } S'' &= d'' V'' + e'' \end{aligned}$$

$$\text{حيث : } m'' = \frac{m}{L} \quad , \quad d'' = \frac{d}{L}$$

مثال :

من بيانات الجدول التالي أوجد قيمة ص عندما $s = 13$ باستخدام خط الإنحدار المناسب

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

الحل

خط الإنحدار المناسب هو : خط إنحدار ص على س

س	ص	س ^٢	ص ^٢
٩	١٥	٨١	١٣٥
١٢	٢٠	١٤٤	٢٤٠
١١	١٩	١٢١	٢٠٩
١٤	٢٣	١٩٦	٣٢٢
١٠	١٧	١٠٠	١٧٠
١٢	١٨	١٤٤	٢١٦
٦٨	١١٢	٧٨٦	١٢٩٢

$$ص = م س + ب$$

$$١.٤٨ = م = \frac{١١٢ \times ٦٨ - ١٢٩٢ \times ٦}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦} = \frac{٧٨٠٨ - ٧٧٥٢}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦}$$

$$ب = \frac{٦٨ \times ١.٤٨ - ١١٢}{٦} = \frac{١٠٠.٦٤ - ١١٢}{٦} = ١.٩١$$

$$ص = ١.٤٨ س + ١.٩١$$

$$عندما : س = ١٣ فإن : ص = ١.٩١ + ١٣ \times ١.٤٨ = ٢١.١٣$$

العلاقة بين معامل الإنحدار و معامل الارتباط :

$$م = \frac{٧٨٠٨ - ٧٧٥٢}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦}$$

$$ح = \frac{٧٨٠٨ - ٧٧٥٢}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦}$$

$$ر = \frac{٧٨٠٨ - ٧٧٥٢}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦} = \frac{٧٨٠٨ - ٧٧٥٢}{٦(٦٨) - ٧٨٦ \times ٦}$$

$$فإن : ر = م \times ح$$

حيث : ر يأخذ نفس لإشارة كل من م ، ح

تمارين

- ١ - إذا كان $م = ٥٦$ ، $ص = ٤٠$ ، $م = ٥٢٤$ ، $ص = ٢٥٦$ ، $م = ٣٦٤$ ،
 $ن = ٨$ فأوجد معادلة خط إنحدار $ص$ على $س$ ثم قدر قيمة $ص$ عندما $س = ١٢$ ،
- ٢ - إذا كان $م = ٧١$ ، $ص = ٣٦$ ، $م = ١٠٣٩$ ، $ص = ٢٦٦$ ، $م = ٥١١$ ،
 $ن = ٥$ فأوجد معادلة خط إنحدار $س$ على $ص$ ثم قدر قيمة $س$ عندما $ص = ١٨$ ،
- ٣ - لدراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة ($ص$) من سلعة ما والسعر بالجنيه ($س$) كانت لدينا البيانات الآتية :
 $م = ٦٥$ ، $ص = ٨٥$ ، $م = ٤٧٠$ ، $ص = ٥٠٥$ ، $م = ٨٠٥$ ،
 $ن = ١٠$ أوجد الكمية المطلوبة عندما يصل السعر إلى ٩ جنيهات
- ٤ - في دراسة للعلاقة بين السن ($س$) وضغط الدم ($ص$) لأثني عشر شخصا تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة ،
 ٧٥ سنة أختيروا عشوائيا كانت لدينا البيانات الآتية : $م = ٧٠$ ، $ص = ٦٠$ ،
 $م = ٣٧٤$ ، $ص = ٥٣٦$ ، $م = ٤٠٦$ أوجد ضغط الدم لشخص عمره ٤٥ سنة
- ٥ - في دراسة للعلاقة بين متغيرين $س$ ، $ص$ حصلنا على البيانات الآتية : $ن = ١٠$ ، $س = ١٠٣$ ،
 $ص = ٩٧$ ، $م = ٣$ ، $ص = ٠$ ، $م = ٤٤٤$ ، $ص = ٣٤١$ ،
 $م = ٧٨٨$ أوجد : (ρ) معامل الارتباط الخطي بين $س$ ، $ص$ مبينا نوعه
- (ب) معادلة خط إنحدار $ص$ على $س$ (ج) معادلة خط إنحدار $س$ على $ص$
- ٦ - لدراسة العلاقة بين $س$ ، $ص$ حصلنا على ٨ قيم متناظرة لهما وبوضع : $س = ٧٠$ ،
 $ص = ٤٠$ كانت البيانات كالتالي $م = ٥$ ، $ص = ٢$ ، $م = ١٦٧$ ،
 $م = ١٢٤$ ، $ص = ١١٩$ أوجد معادلة خط إنحدار $ص$ على $س$
- ٧ - في دراسة للعلاقة بين المتغيرين $س$ ، $ص$ حصلنا على البيانات الآتية :

$$ن = ٨ ، س = \frac{٤٠ - ٥}{٥} ، ص = \frac{١٥ - ٣}{٣} \text{ حيث : } م = ٦ ، ص = ١$$

- ، $م = ١٢٩$ ، $ص = ٢٩$ ، $م = ٥٩$ أوجد معامل إنحدار $ص$ على $س$ ،
 ؛ معامل إنحدار $س$ على $ص$ ثم احسب معامل الارتباط الخطي بين $س$ ، $ص$ ،
 ٨ - من بيانات الجدول الآتي قدر قيمة $ص$ عندما $س = ٢٠$.

س	٨	٦	١٠	٧	٨	٥
ص	٨	٧	١٣	٩	١٠	٥

- ٩ - من بيانات الجدول الآتي قدر قيمة $س$ عندما $ص = ٨$.

س	٩	٣	٤	٩	١٠	١١
ص	٧	٩	١٠	٦	٥	٤

- ١٠ - من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل الارتباط الخطي من معاملي الإنحدار :

س	٨	٤	٢	١٢	٧	١١
ص	٧	٧	٣	٨	١٠	١١

- ١١ - إذا كان معامل إنحدار $ص$ على $س$ هو ١.٤٣ ومعامل إنحدار $س$ على $ص$ هو ٢.١٥ فأوجد معامل الارتباط الخطي بين $س$ ، $ص$ وحدد نوعه

- ١٢ - إذا كان معامل إنحدار ص على س هو - ٠.٣٤ ومعامل إنحدار س على ص هو - ٠.٤١
 أوجد معامل الارتباط بين س ، ص مبينا نوعه
- ١٣ - إذا كان معامل إنحدار ص على س هو - ٠.٧ ومعامل الارتباط الخطي بين س، ص هو - ٠.٩
 فما هو معامل إنحدار س على ص
- ١٤ - إذا كان معامل إنحدار س على ص هو ٠.٨٠٧ ومعامل الارتباط الخطي بين س ، ص هو ٠.٧١
 فأوجد معامل إنحدار ص على س
- ١٥ - في دراسة للعلاقة بين متغيرين كانت معادلة خط إنحدار ص على س هي $V = 1.22S + 2.65$
 ؛ معادلة خط إنحدار س على ص هي $S = 2.98V + 3.9$ أوجد معامل الارتباط الخطي بين
 س ، ص مبينا نوعه

جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري

ي	٠.٠٠	٠.٠١	٠.٠٢	٠.٠٣	٠.٠٤	٠.٠٥	٠.٠٦	٠.٠٧	٠.٠٨	٠.٠٩
٠.٠	٠.٠٠٠٠	٠.٠٠٠٤	٠.٠٠٠٨	٠.٠٠١٢	٠.٠٠١٦	٠.٠٠١٩	٠.٠٠٢٣	٠.٠٠٢٧	٠.٠٠٣١	٠.٠٠٣٥
٠.١	٠.٠٣٩٨	٠.٠٤٣٨	٠.٠٤٧٨	٠.٠٥١٧	٠.٠٥٥٧	٠.٠٥٩٦	٠.٠٦٣٦	٠.٠٦٧٥	٠.٠٧١٤	٠.٠٧٥٣
٠.٢	٠.٠٧٩٣	٠.٠٨٣٢	٠.٠٨٧١	٠.٠٩١٠	٠.٠٩٤٨	٠.٠٩٨٧	٠.١٠٢٦	٠.١٠٦٤	٠.١١٠٣	٠.١١٤١
٠.٣	٠.١١٧٩	٠.١٢١٧	٠.١٢٥٥	٠.١٢٩٣	٠.١٣٣١	٠.١٣٦٨	٠.١٤٠٦	٠.١٤٤٣	٠.١٤٨٠	٠.١٥١٧
٠.٤	٠.١٥٥٤	٠.١٥٩١	٠.١٦٢٨	٠.١٦٦٤	٠.١٧٠٠	٠.١٧٣٦	٠.١٧٧٢	٠.١٨٠٨	٠.١٨٤٤	٠.١٨٧٩
٠.٥	٠.١٩١٥	٠.١٩٥٠	٠.١٩٨٥	٠.٢٠١٩	٠.٢٠٥٤	٠.٢٠٨٨	٠.٢١٢٣	٠.٢١٥٧	٠.٢١٩٠	٠.٢٢٢٤
٠.٦	٠.٢٢٥٩	٠.٢٢٩١	٠.٢٣٢٤	٠.٢٣٥٧	٠.٢٣٨٩	٠.٢٤٢٢	٠.٢٤٥٤	٠.٢٤٨٦	٠.٢٥١٢	٠.٢٥٤٩
٠.٧	٠.٢٥٨٠	٠.٢٦١١	٠.٢٦٤٢	٠.٢٦٧٣	٠.٢٧٠٤	٠.٢٧٣٤	٠.٢٧٦٤	٠.٢٧٩٤	٠.٢٨٢٣	٠.٢٨٥٢
٠.٨	٠.٢٨٨١	٠.٢٩١٠	٠.٢٩٣٩	٠.٢٩٦٧	٠.٢٩٩٥	٠.٣٠٢٣	٠.٣٠٥١	٠.٣٠٧٨	٠.٣١٠٦	٠.٣١٣٣
٠.٩	٠.٣١٥٩	٠.٣١٨٦	٠.٣٢١٢	٠.٣٢٣٨	٠.٣٢٦٤	٠.٣٢٨٩	٠.٣٣١٥	٠.٣٣٤٠	٠.٣٣٦٥	٠.٣٣٨٩
١.٠	٠.٣٤١٣	٠.٣٤٣٨	٠.٣٤٦١	٠.٣٤٨٥	٠.٣٥٠٨	٠.٣٥٣١	٠.٣٥٥٤	٠.٣٥٧٧	٠.٣٥٩٩	٠.٣٦٢١
١.١	٠.٣٦٤٣	٠.٣٦٦٥	٠.٣٦٨٦	٠.٣٧٠٨	٠.٣٧٢٩	٠.٣٧٤٩	٠.٣٧٧٠	٠.٣٧٩٠	٠.٣٨١٥	٠.٣٨٣٠
١.٢	٠.٣٨٤٩	٠.٣٨٦٩	٠.٣٨٨٨	٠.٣٩٠٧	٠.٣٩٢٥	٠.٣٩٤٤	٠.٣٩٦٢	٠.٣٩٨٠	٠.٣٩٩٧	٠.٤٠١٥
١.٣	٠.٤٠٣٢	٠.٤٠٤٩	٠.٤٠٦٦	٠.٤٠٨٢	٠.٤٠٩٩	٠.٤١١٥	٠.٤١٣١	٠.٤١٧٤	٠.٤١٦٢	٠.٤١٧٧
١.٤	٠.٤١٩٢	٠.٤٢٠٧	٠.٤٢٢٢	٠.٤٢٣٦	٠.٤٢٥١	٠.٤٢٦٥	٠.٤٢٧٩	٠.٤٢٩٢	٠.٤٣٠٦	٠.٤٣١٩
١.٥	٠.٤٣٣٢	٠.٤٣٤٥	٠.٤٣٥٧	٠.٤٣٧٠	٠.٤٣٨٢	٠.٤٣٩٤	٠.٤٤٠٦	٠.٤٤١٨	٠.٤٤٢٩	٠.٤٤٤١
١.٦	٠.٤٤٥٢	٠.٤٤٦٣	٠.٤٤٧٤	٠.٤٤٨٤	٠.٤٤٩٥	٠.٤٥٠٥	٠.٤٥١٥	٠.٤٥٢٥	٠.٤٥٣٥	٠.٤٥٤٥
١.٧	٠.٤٥٥٤	٠.٤٥٦٤	٠.٤٥٧٣	٠.٤٥٨٢	٠.٤٥٩١	٠.٤٥٩٩	٠.٤٥٩٩	٠.٤٦١٦	٠.٤٦٢٥	٠.٤٦٣٣
١.٨	٠.٤٦٤١	٠.٤٦٤٩	٠.٤٦٥٦	٠.٤٦٦٤	٠.٤٦٧١	٠.٤٦٧٨	٠.٤٦٨٦	٠.٤٦٩٣	٠.٤٦٩٩	٠.٤٧٠٦
١.٩	٠.٤٧١٣	٠.٤٧١٩	٠.٤٧٢٦	٠.٤٧٣٢	٠.٤٧٣٨	٠.٤٧٤٤	٠.٤٧٥٠	٠.٤٧٥٦	٠.٤٧٦١	٠.٤٧٦٧
٢.٠	٠.٤٧٧٢	٠.٤٧٧٨	٠.٤٧٨٣	٠.٤٧٨٨	٠.٤٧٩٣	٠.٤٧٩٨	٠.٤٨٠٣	٠.٤٨٠٨	٠.٤٨١٢	٠.٤٨١٧
٢.١	٠.٤٨٢١	٠.٤٨٢٦	٠.٤٨٣٠	٠.٤٨٣٤	٠.٤٨٣٨	٠.٤٨٤٢	٠.٤٨٤٦	٠.٤٨٥٠	٠.٤٨٥٤	٠.٤٨٥٧
٢.٢	٠.٤٨٦١	٠.٤٨٦٤	٠.٤٨٦٨	٠.٤٨٧١	٠.٤٨٧٥	٠.٤٨٧٨	٠.٤٨٨٠	٠.٤٨٨٤	٠.٤٨٨٧	٠.٤٨٩٠
٢.٣	٠.٤٨٩٣	٠.٤٨٩٦	٠.٤٨٩٨	٠.٤٩٠١	٠.٤٩٠٤	٠.٤٩٠٦	٠.٤٩٠٩	٠.٤٩١١	٠.٤٩١٣	٠.٤٩١٦
٢.٤	٠.٤٩١٨	٠.٤٩٢٠	٠.٤٩٢٢	٠.٤٩٢٥	٠.٤٩٢٧	٠.٤٩٢٦	٠.٤٩٣١	٠.٤٩٣٢	٠.٤٩٣٤	٠.٤٩٣٦
٢.٥	٠.٤٩٣٨	٠.٤٩٤٠	٠.٤٩٤١	٠.٤٩٤٣	٠.٤٩٤٥	٠.٤٩٤٦	٠.٤٩٤٨	٠.٤٩٤٩	٠.٤٩٥١	٠.٤٩٥٢
٢.٦	٠.٤٩٥٣	٠.٤٩٥٥	٠.٤٩٥٦	٠.٤٩٥٧	٠.٤٩٥٩	٠.٤٩٧٠	٠.٤٩٦١	٠.٤٩٦٢	٠.٤٩٦٣	٠.٤٩٦٤
٢.٧	٠.٤٩٦٥	٠.٤٩٦٦	٠.٤٩٦٧	٠.٤٩٦٨	٠.٤٩٦٩	٠.٤٩٧٨	٠.٤٩٧١	٠.٤٩٧٢	٠.٤٩٧٣	٠.٤٩٧٤
٢.٨	٠.٤٩٧٤	٠.٤٩٧٥	٠.٤٩٧٦	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٧٩	٠.٤٩٧٩	٠.٤٩٨٠	٠.٤٩٨١
٢.٩	٠.٤٩٨١	٠.٤٩٨٢	٠.٤٩٨٢	٠.٤٩٨٣	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٦	٠.٤٩٨٦
٣.٠	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٩٠	٠.٤٩٩٠
٣.١	٠.٤٩٩٠	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٣
٣.٢	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥
٣.٣	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٧
٣.٤	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٨
٣.٥	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨