إستنتاج معادلة شرودنجر الغير معتمدة على الزمن

فى البداية شرودنجر اعتمد على شيئين لإستنتاج معادلته الغير معتمدة على الزمن ، الوصف الكلاسيكى للموجة (المعادلة الموجية) ووصف دى برولى للموجة.

فى البداية يمكننا وضع الوصف الكلاسيكى للموجة فى صورة المعادلة الموجية :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

اعتبرانها هنا فى بعد واحد لتسهيل الإستنتاج ثم يمكنك بعد ذلك تعميمها الى الثلاثة ابعاد.

دعنا نفترض ان الدالة الموجية Ψ تكتب على الصورة:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\zeta(t)$$

وحينها تصبح المعادلة الموجية على الصورة:

$$\zeta \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\psi}{v^2} \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

وبوضع المعادلة فى صورة أفضل:

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{\zeta} \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

وبما اننا مهتمون بالمعادلة الغير المعتمدة على الزمن ، سنتعامل فى استنتاجنا مع الدالة ψ ، وسنهمل ζ إلا إذا اردت استنتاج المعادلة المعتمدة على الزمن.

نرى فى المعادلة السابقة ان هناك معادلاتان تفاضليتان إحداهما لدالة فى المكان والأخرى لدالة فى الزمن ، وهذان لا يمكن ان يتساويا إلا إذا ساويا ثابت ما .

هذه الثابت نحدده من هدف المعادلة . هدف المعادلة هو ان نحصل على موجة معنى ذلك ان الدالة ψ يجب ان تضمن لنا تذبذباً ، اى تكون ψ دالة مثلثية.

ولتحقيق هذا يجب ان يكون الثابت عبارة عن سالب مقدار موجب لنضمن دائماً انه سالب .

وعلى ذلك يكون :

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\kappa^2 \Rightarrow \psi'' + \kappa^2\psi = 0$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على الحلول الخاصة :

$$\psi(x) = Ne^{\pm i\kappa x}$$

حيث N هو معامل التوحيد والذى يجعل الدالة موحدة Normalized ، وبما اننا فى دراسة لموجة فيمكننا ان نقول ان قيمة x عند نقطة تساوى قيمتها عند $x + \lambda$ حيث λ هى الطول الموجى ، إذن:

$$Ne^{\pm i\kappa x} = Ne^{\pm i\kappa(x+\lambda)}$$

وليتحقق هذا الشرط يجب ان تمثل $\kappa\lambda$ دورة كاملة ، اى يجب ان يكون:

$$\kappa\lambda = 2\pi$$

عرف دى برولى الطول الموجى على انه يعتمد على كمية حركة الجسيم ، وبذلك دمج الطبيعة الجسيمية والموجية فى شئ واحد من خلال المعادلة:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

يمكننا تعريف الطاقة الكلية للجسم على الصورة :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

(لاحظ اننا استخدمنا الوصف الكلاسيكى للطاقة ، اى ان نا لا يمكن ان نطبق هذه معادلة شرودنجر على اجسام سرعتها تقترب من سرعة الضوء)

وبالحل لـــ p^2 نحصل على :

$$p^2 = 2m(E - V)$$

وبالتعويض فى معادلة دي برولى للطول الموجى نحصل على :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

وعلى ذلك نحصل على :

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}$$

وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E - V)}{\hbar^2}\psi = 0$$

وبذلك نحصل على :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

وبالتعميم فى كل الأبعاد نحصل على :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

Mostafa samir Abd El Fatah
Einstine
www.phys4arab.net