التمثيل الموجي للنظم الميكانيكية

Wave-Mechanical representation

طالما أن للجسيمات في العالم المجهري صفات موجية غالبة عليها فإن من الضروري التعامل معها على هذا الأساس. ومن الضروري إذن ابتداع أساليب رياضية لتمثيل النظم (الجسيمات مثلاً) وفق التصور الموجي. والمشكلة تكمن في تصوير الجسيم المنفرد (كأبسط حالة) بهيئة موجية: وذلك أن الجسيم متحيز بينما الموجة ممتدة. إذن فالمشكلة هي بين التحيز Locality والامتداد Extension.

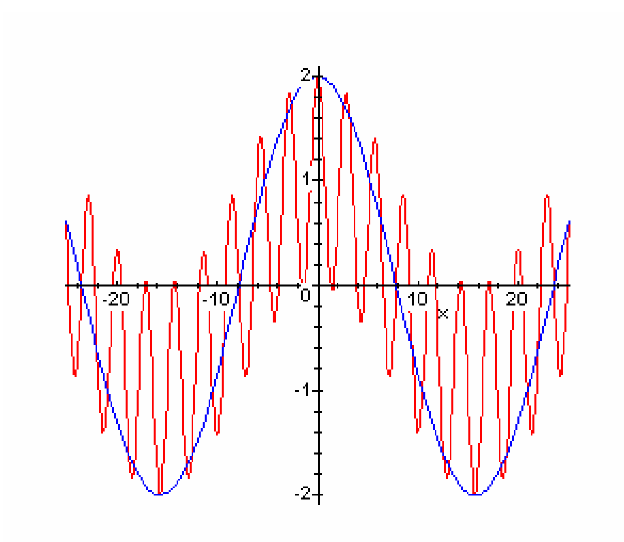
كيف إذن يمكننا تصوير الجسم موجيا في الوقت الذي يكون متحيزا وتكون الموجة التي تمثله ممتدة؟

لقد تم حل هذه المعضلة من خلال تصور أن الجسيم المتحيز إن هو إلا نتاج لتراكب عدد لا نهائي من الأمواج الجيبية والجيبتمامية

لننظر أولاً في حاصل جمع موجتين

$$y = y_1 + y_2 = \cos(2.2x) + \cos(0.2x) = \cos(2.2x)\cos(0.2x)$$

الناتج من جمع هو



وقد تعمدنا الرسم بمضاعفات المدى الموجي (من 8π إلى 8π) لكي يتضح الشكل الموجي. ومنه يتضح أن هنالك موجتان: واحدة ذات تردد عال وطول موجي صغير، وتسمى موجة الزمرة group wave والثانية تضم الأولى وتكون ذات تردد واطئ وطول موجي كبير وتسمى موجة الطور Phase wave.

موجة الطور تمثل الجسم وسرعتها هي سرعة الجسم نفسه. لكن موجة الزمرة هي شكل آخر يمثل التكوين الرياضي لموجة الطور ولا سبيل إلى اعتبارها موجة فيزيائية.

متسلسلة فورير ودورها في تمثيل دالة الموجة

من المعروف أن الرياضياتي الفرنسي فورييه كان قد اكتشف أن أية دالة $f(x)$ تتغير ضمن النطاق 0 إلى L (مثلاً) يمكن كتابتها بدلالة عدد لا نهائي من الدوال المثلثية الجيبية والجيبتمامية وكما يلي

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{ik_n x}$$

الحد الأول في المتوالية مقدار ثابت، والحدود التالية هي دوال جيبية وجيبتمامية. تكون قيمة k_n في العادة مرتبطة بالخواص الدورية للدالة $f(x)$.

ومن المعروف أن

$$c_n(k)=\int_0^{\infty} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

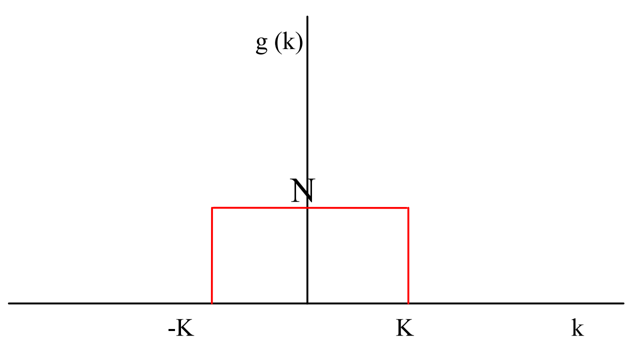
وهذا يعني أننا يمكن أن نؤلف أي شكل نريده من جمع عدد لانهائي من هذه الأمواج وجعلها تتراكب على بعضها البعض وتعطي بالمحصلة الشكل الذي نريده.

مثال:

الشكل التربيعي

$$\begin{aligned} g(k) &= N \qquad -K \le k \le K \\ &= 0 \qquad\quad elsewhere \end{aligned}$$

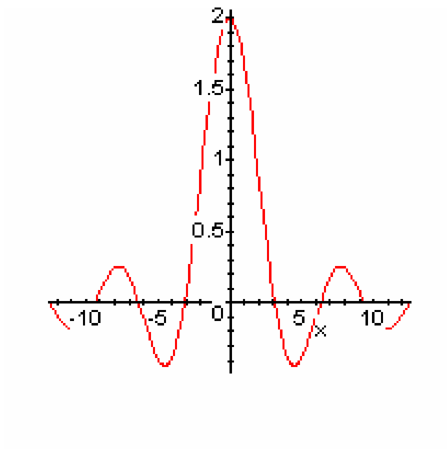
رسم هذه الداله هو



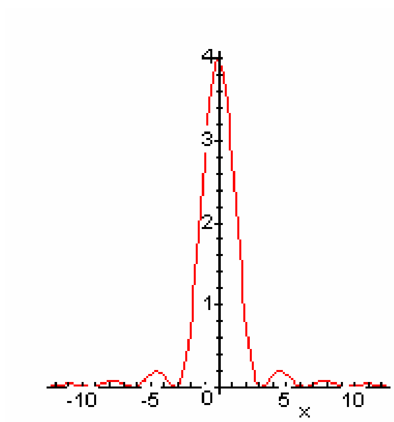
يمكن تصوره رياضيا على أنه مؤلف من تراكب عدد لانهائي من الأمواج المثلثية الجيبية والجيبتمامية. ويظهر هذا عند إجراء تحويل فورير

$$f(x) = \int_{-K}^{K} N e^{ikx} dk$$
$$= 2N \frac{\sin Kx}{x}$$

والرسم (في حالة $N = K = 1$) هو كما يلي

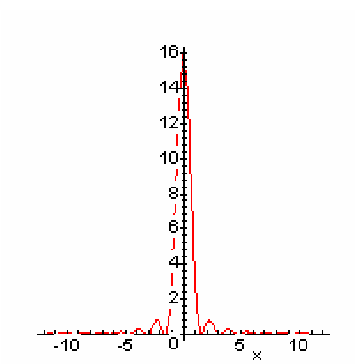


لاحظ أن مربع الدالة $|f(x)|^2$ يرسم



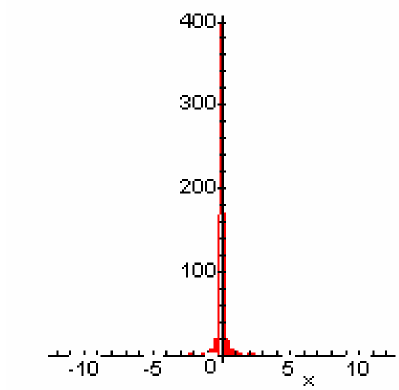
ومنها يتضح إنها رزمة موجية محددة بدقة عالية.

لكننا إذا وضعنا القيمة $K = 2$ نحصل على الرسم



ويتضح أن عرض الرزمة الموجية قد صغر بينما ازداد ارتفاعها. طبعاً لأن المساحة الكلية تحت الخط تبقى ثابتة).

أما إذا أخذنا $K=10$ فإننا نحصل على



واضح جدا أن هذه الرزمة الموجية متحيزة تحيزاً دقيقاً جداً. وإن هذا التحيز يعني إنها موضعية بشكل كبير.

في مثل هذه الرزم كلما ازداد ΔK قلَّ Δx والعكس بالعكس بحيث يكون

$$\Delta K \Delta x \sim O(1)$$

يمثل ΔK مقدار اللادقة أو عدم التحديد في زخم الجسيم و Δx اللادقة أو عدم التحديد في موضعه.