المتذبذب التوافقي البسيط في بعد واحد

Simple Harmonic Oscillator in One dimension

يمكن تمثيل حركة المتذبذب التوافقي البسيط كلاسيكيا بكتلة متدلية بواسطة زنبرك من موضع. أما واقعياً فهي يمكن أن تكون عبارة عن جزيئة ثنائية متذبذبة vibrating diatomic molecule. لذلك تعتبر مسألة المتذبذب التوافقي من أهم المسائل في ميكانيك الكم.

سنقوم بحل هذه المسألة باستخدام ميكانيك المصفوفات matrix mechanics الذي يمكننا من الحصول على القيم المخصوصة دون الحاجة إلى حل معادلة شرودنجر ودون الحاجة إلى الحصول على دالة الموجة.

نبدأ من الهاملتوني

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

حيث أن $k = m\omega^2$ و ω هي السرعة الزاوية.

كلاسيكيا يمكن تجزئة هذا الهاملتوني بالصيغة التالية

$$H = \omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right)$$

ولكننا في الحقيقة نجد أن

$$\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{i\omega}{2}(px - xp)$$

والآن إذا أردنا معالجة المسألة من منطق ميكانيك الكم فعلينا تحويل الملحوظات p و x إلى إجراءات. وهذا سيعني أننا لا يمكن أن نعتبر $px - xp = 0$ بل إن

$$[p, x] = -i\hbar$$

ولو أننا عرفنا

$$a = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right)$$

$$a^{+} = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \quad \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right)$$

ولذلك نجد أن

$$H = (a^{+}a + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

لاحظ أن الإجراءات a و a^{+} هي إجراءات لاهرمايتية وتخضع للعلاقات التالية

$$[a, a^{+}] = 1, \quad [a, a] = [a^{+}, a^{+}] = 0$$

كذلك فإن

$$[H, a] = [\hbar\omega a^{+}a, a] = \hbar\omega[a^{+}, a]a = -\hbar\omega a$$

كذلك

$$[H, a^{+}] = [\hbar\omega a^{+}a, a^{+}] = \hbar\omega a^{+}[a \ \ , a^{+}]a = -\hbar\omega a^{+}$$

وهذه العلاقات التبادلية ذات فائدة كبيرة في ايجاد القيم المخصوصة للإجراءات كما إنها مفيدة في ايجاد الدوال المخصوصة والقيم المتوقعة.

معادلات القيم المخصوصة

لننظر في معادلة القيمة المخصوصة

$$[H, a] | \psi_E > = -\hbar\omega a | \psi_E >$$

منها نجد أن

$$H(a | \psi_E >) = (E - \hbar\omega)(a | \psi_E >)$$

أي أن المتجه $a | \psi_E >$ هو متجه مخصوص للإجراء H بقيمة مخصوصة قدرها $E - \hbar\omega$

ومن السهولة أن نثبت أن $a^{n} | \psi_E >$ هو متجه مخصوص لـH بقيمة مخصوصة قدرها

$$H(a^{n} | \psi_E >) = (E - n\hbar\omega)a^{n} | \psi_E >$$

حيث استعملنا الصفة

$$H|\psi_E>=E|\psi_E>$$

هذا يعني إنه كلما وجد a نقصت القيمة المخصوصة بمقدار $\hbar\omega$ وهكذا. لذلك يسمى a إجراء الإفناء.

وبالمثل نجد

$$H(a^+|\psi_E>)=(E+\hbar\omega)(a^+|\psi_E>)$$

ونجد

$$H(a^+)^n|\psi_E>)=(E+n\hbar\omega)(a^+)^n|\psi_E>$$

هذا يعني إنه كلما وجد a^+ زادت القيمة المخصوصة بمقدار $\hbar\omega$ وهكذا. لذلك يسمى a^+ إجراء الخلق.

القيم المخصوصة لإجراءات الخلق والافناء

لنتمسك بهذه الجراءات إذن: إجراء الخلق وإجراء الافناء إذ هاهنا نضع يدنا على متغيرات داينميكية تجري بإجراءات جديدة ذات تأثير واقعي ماثل للعيان وهي تخلثق مستوى من الطاقة وتغييب مستوى من الطاقة.

لما كان وجود إجراء الافناء يُنقص الطاقة بمقدار $\hbar\omega$ فإن من المعقول أن نتصور أن دخول هذا الاجراء على دالة الموجة يحيلها إلى دالة الحالة للمستوى الأخفض. أي يمكن أن نكتب

$$a|\psi_n>=\alpha|\psi_{n-1}>$$

ويمكن إثبات أن قيمة α هو $\sqrt{n}$ بحيث يكون

$$a|\psi_n>=\sqrt{n}|\psi_{n-1}>$$

كذلك لما كان وجود إجراء الخلق يزيد الطاقة بمقدار $\hbar\omega$ فإن من المعقول أن نتصور أن دخول هذا الاجراء على دالة الموجة يحيلها إلى دالة الحالة للمستوى الأعلى. أي يمكن أن نكتب

$$a^+|\psi_n>=\beta|\psi_{n+1}>$$

ويمكن إثبات أن قيمة β هو $\sqrt{n+1}$ بحيث يكون

$$a^{+}|\psi_n>=\sqrt{n+1}|\psi_{n+1}>$$

وهكذا يمكننا تحصيل دالة الموجة لأي مستوى نريد في حالة الحصول على أي واحدة منها.

لاحظ أن دالة المستوى الأدنى هي تلك التي تعطى صفراً إذا ما دخل عليها إجراء الافناء، أي

$$a|\psi_0>=0$$

بينما يكون

$$a|\psi_1>=\sqrt{1}|\psi_0>$$

القيم المخصوصة لطاقة المتذبذب التوافقي

نلاحظ أن

$$H|\psi_n>=\left(a^{+}a+1/2\right)\hbar\omega|\psi_n>=(n+1/2)\hbar\omega \qquad n=0,1,2....$$

أي أن القيمة الدنيا للطاقة في المتذبذب التوافقي في بعد واحد هي

$$H|\psi_0>=E_0|\psi_0>=\left(a^{+}a+1/2\right)\hbar\omega|\psi_0>=\frac{1}{2}\hbar\omega|\psi_0>$$

أي أن

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$$

بمعنى إن الحد الأدنى للطاقة هو هذا القدر، وهو ليس صفراً كما ترى.

العناصر المصفوفية Matrix elements

لما كانت متجهات الحالات متعامدة ومقومة، فإن بالامكان أن نجد

$$<\psi_m|a|\psi_n>=\sqrt{n}\,\delta_{mn-1}$$

ولذا تتخذ مصفوفة إجراء الإفناء الشكل التالي

$$(a) = a_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & .... \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & .... \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... \end{pmatrix}$$

كذلك

$$< \psi_m | a^+ | \psi_n >= \sqrt{n+1}\, \delta_{mn+1}$$

ولذا تتخذ مصفوفة إجراء الخلق الشكل التالي

$$(a^+) = a^+{}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & .... \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & .... \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & .... \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & .... \end{pmatrix}$$

على حين أن الصيغة المصفوفية للهاملتوني هي

$$(H) = H_{mn} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & .... \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & .... \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & .... \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 & .... \end{pmatrix}$$

الدوال المخصوصة للمتذبذب التوافقي

يمكن تحصيل الدوال المخصوصة للمتذبذب إذا عرفنا واحدة منها وأبسطها $\psi_0 >$

حيث نعلم أن

$$a | \psi_0 >= 0$$

أي

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right) | \psi_0 >= 0$$

بصيغة أخرى

$$m\omega x + \hbar \frac{d}{dx} | \psi_0 >= 0$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية البسيطة هو

$$|\psi_0>= Ce^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

ويمكن إيجاد قيمة ثابت التكامل باستخدام تقويم الدالة حيث أن

$$C^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}dx = 1$$

$$C^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} = 1$$

$$C = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

أي أن

$$|\psi_0>= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

لاحظ أن للدالة شكل غاوسي.

ومن هذه الدالة نستطيع تحصيل جميع الدوال الأخرى من خلال المعادلة

$$|\psi_n>= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|\psi_0>$$

نلاحظ أن $|\psi_n>$ هي متعدد حدود.

واجب(1): إحسب الدوال $|\psi_3>, |\psi_1>$

واجب(2): أوجد $<\psi_n|p|\psi_n>, <\psi_n|x|\psi_n>$ واثبت أن قيمتها صفر.

واجب(3): أوجد $<\psi_n|p^2|\psi_n>, <\psi_n|x^2|\psi_n>$.