تحريك الرزمة الموجية
Motion of a Wavepacket

رأينا كيف يمكن تحييز الموجة عن طريق جمع عدد كبير منها لتشكل ما أسميناه الرزمة الموجية wavepacket. والسؤال الآن: كيف يمكننا تحريك الرزمة الموجية؟ إن الاجابة على هذا السؤال ضرورية لإستكمال التصوير الموجي للجسيمات فالجسيمات غالبا ما تكون في حالة حركة.

إذا كانت الرزمة الموجية متحركة فلابد أن تكون معتمدة على الزمن وهذا يجعلنا الأخذ بأساس موجي معتمد على الزمن كالآتي $e^{ikx-i\omega t}$ وعليه يكون تمثيل الرزمة الموجية المتحيزة في الفضاء (المكان) والمعتمدة على الزمن كالآتي

ولنفترض أن رزمتنا الموجية عالية التحيز مكانيا وأن الاعتمادية على التردد قليلة أي طاقتها الاجمالية قليلة، عندئذ يمكننا أن نفتح الموجة بواسطة متسلسلة تايلور باستخدام

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0} + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k=k_0} + ...$$

وبذلك يكون

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega(k_0)t + (k-k_0)\left[x - \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0} t\right] - \frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k=k_0} t$$

لكننا نعلم أن

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0} = v_g$$

ولو عرفنا

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k_0} = \beta$$

فإنه باستعمال

$$g(k) = e^{-k'^2 \alpha}$$

حيث

$$k' = k - k_0$$

فإننا نحصل على

$$\psi(x,t) = \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t).\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha k'^2).\exp[ik'(x - v_g t).\exp(-ik'^2 \beta t/2)dk'$$

$$= \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t).\int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik'(x - v_g t)].\exp[-k'^2(\alpha + i\beta t)].dk'$$

$$= \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t).\left(\frac{2\pi}{\alpha + 2i\beta t}\right)^{1/2} \exp[-(x - v_g t)^2/(2\alpha + 4i\beta t)].$$

والآن يكون لدينا

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}}\right)\exp[-\alpha(x - v_g t)^2/(\alpha^2 + 4\beta^2 t^2)].$$

وبالتالي فإن

$$|\psi(x,0)|^2 = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)\exp[-x^2/\alpha].$$

ومنها نجد أن مركز النبضة هو

$$x = \sqrt{\alpha}$$

ليكون عرض النبضة هو

$$\text{Pulse width} = W(0) = 2\sqrt{\alpha}$$

كذلك

$$\alpha x'^2 = \alpha(x - v_g t)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 t^2$$

وهذا يعطينا

$$x' = \sqrt{\alpha}.\sqrt{1 + 4\beta^2 t^2 / \alpha^2}$$

حيث يصبح عرض النبضة بعد زمن t هو

$$\text{Pulse width} = W(t) = 2\sqrt{\alpha}.\sqrt{1 + 4\beta^2 t^2 / \alpha^2}$$

يعني هذا أن النبضات الكبيرة (قيمة كبيرة) يكون توسعها مع الزمن قليلاً أي إنها غالبا ما تحفظ عرضها الموجي. على حين تتوسع النبضات الصغيرة سريعاً. وهذا مما يضيف صفة مميزة للتمثيل الموجي للجسيمات إذ نجد أن هذه النتيجة تقول لنا أن الموجات الممثلة للأجسام الصغيرة تتلاشى سريعا على حين أن الأمواج الممثلة للأجسام الكبيرة تبقى تقريبا على حالها. وهذا يعني أن للجسيمات الذرية وتحت الذرية كيانية قلقة وعدم استقرارية تتمثل في التبدل السريع للصات والخصائص.