# الاجراءات والملحوظات

Operators and Observables

في ميكانيك الكم نتعامل مع الملحوظات الفيزيائية physical observables كمنتجات لفعل إجراءات رياضية تقوم مقام عمليات القياس. ولكل ملحوظ فيزيائي إجراء يقابله.

Observables ⟶ Operators

الزخم بكونه ملحوظ فيزيائي يقابله إجراء الزخم $p_x \rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

الطاقة بكونها ملحوظ فيزيائي يقابلها إجراء الطاقة (الهاملتوني) $E \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

## ماهي الاجراءات إذن؟

هي عمليات رياضية كالتفاضل أو التكامل أو اللوغاريتم تجري على الدوال فتحولها من حال إلى حال. عموماً

$$\hat{A}\psi = \phi$$

الاجراء $\hat{A}$ يعمل الدالة $\psi$ لينتج الدالة $\phi$. مثلاً

$$\frac{d}{dx}(\sin kx) = (k\cos kx)$$

لكننا لو شغّلنا الاجراء $\frac{d}{dx}$ مرة ثانية سنجد

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin kx) = -k^2(\sin kx)$$

هنا نجد أن الدالة $\sin kx$ قد أعادت نفسها بعد فعل الاجراء لذا :

نسمي $\sin kx$ دالة مخصوصة Eigenfunction للإجراء $\frac{d^2}{dx^2}$. لكنها ليست دالة مخصوصة للإجراء $\frac{d}{dx}$ كما بينا لعدم تكرارها بعد تشغيل الإجراء عليها.

ونسمي الكمية العددية $-k^2$ قيمة مخصوصة Eigenvalue لهذا الإجراء.

أي أننا إذا حصلنا على صيغة من النوع

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

فإننا نسمي $\psi$ دالة مخصوصة للإجراء $\hat{A}$ ونسمي $\alpha$ قيمة مخصوصة له.

إن فكرة الاجراءات في ميكانيك الكم هي ذات مضمون فلسفي يتعلق بفهم كيفية اشتغال العالم. فقوام العالم حركته وتغيره وهذا لا يكون إلا بمحرك قيّوم وسيلته الاجراء.

لكن كيف لنا أن نخلّص الملحوظ (القيمة الخاصة) من الإجراء؟

الجواب: بحساب القيمة المتوقعة؟

وكيف يكون ذلك؟

### القيمة المتوقعة Expectation value

في ميكانيك الكم نحن لا نتعامل مع القيم المباشرة والمنفردة للملحوظات الفيزيائية بل نتعامل مع معدلات أقيامها. إذ أن حركية العالم الكمومي من خلال تمثّله الموجي لا تسمح لنا بالتمتع بالسكونية التي نجدها في العالم الجهري الكلاسيكي. لذلك فإن أقيام المتغيرات الفيزيائية تكون متذبذبة بين قيم مختلفة متقاربة وتكون القيمة الأكثر إحتمالاً هي القيمة المتوقعة.

والصيغة المعتمدة لحساب القيمة المتوقعة لأي إجراء $\hat{A}$ عند الحالة $\psi$ هي

$$< \hat{A} >= \int \psi^* \hat{A}\, \psi\, dx$$

### الاجراء الهرماتي Hermitian Operator

هو ذلك الاجراء الذي يخضع إلى العلاقة

$$< \psi \,|\, \hat{A}\phi >=< \hat{A}\,\psi \,|\, \phi >$$

فإن الاجراء $\hat{A}$ هو إجراء هرمايتي. وهذا يعني أن

$$\hat{A} = \hat{A}^+$$

تكمن أهمية الاجراءات الهرمايتية في كون أقيامها المخصوصة كميات حقيقية مما يجعل هذه الاجراءات تعبر عن ملحوظات فيزيائية. وللبرهنة على حقيقية القيم المخصوصة نأخذ

$$\hat{A}\,|\,\psi >= \alpha \,|\, \psi >$$

ولذا فإن

$$< \hat{A}\,\psi \,|= \alpha^* < \psi \,|$$

إن شرط الهرمايتية يعني أن

$$\begin{aligned}
&< \psi \,|\, \hat{A}\,\psi >=< \hat{A}\,\psi \,|\, \psi > \\
&\alpha < \psi \,|\, \psi >= \alpha^* < \psi \,|\, \psi > \\
&or \\
&\alpha = \alpha^*
\end{aligned}$$

### تعامد الدوال المخصوصة

كما يمكن إثبات أن الدوال المخصوصة لإجراء هرمايتي معين بقيم مخصوصة مختلفة تكون متعامدة على بعضها البعض

خذ معادلات القيمة المخصوصة التالية بفرض أن $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$\hat{A}\,|\,\psi_1 >= \alpha_1\,|\,\psi_1 >$$
$$\hat{A}\,|\,\psi_2 >= \alpha_2\,|\,\psi_2 >$$
$$< \hat{A}\,\psi_2\,|= \alpha_2^*\,|\,\psi_2 >= \alpha_2\,|\,\psi_2 >$$

والخطوة الأخيرة سببها أن القيم المخصوصة لإجراء هرمايتي تكون حقيقية دوماً.

وباستخدام شرط الهرمايتية نجد

$$< \psi_2\,|\,\hat{A}\,|\,\psi_1 >=< \hat{A}\,\psi_2\,|\,\psi_1 >$$
$$\alpha_1 < \psi_2\,|\,\psi_1 >= \alpha_2 < \psi_2\,|\,\psi_1 >$$

أي أن

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2) < \psi_2\,|\,\psi_1 >= 0$$

ولما كان $\alpha_1 \neq \alpha_2$ بالفرض فإن $< \psi_2\,|\,\psi_1 >= 0$ أي أنهما متعامدان.

نؤكد أن أهمية الاجراءات الهرمايتية تكمن في أنها تعبر عن ملحوظات فيزيائية. ورغم ذلك فنحن في خضم معالجة المسائل الفيزيائية نتعامل أحياناً مع إجراءات غير هرمايتية لكنها في جميع الأحوال لا تمثل ملحوظات فيزيائية. مثال ذلك إجراءات الخلق والفناء Creation and Annihilation operators في مسألة المتذبذب التوافقي وإجراءات الرفع والخفض Raising and Lowering operators في الزخم الزاوي.

## الدوال المخصوصة المتزامنة وتبادلية الاجراءات

هي تلك الدوال التي تكون مخصوصة لأكثر من إجراء في وقت واحد. مثل

$$\hat{A}\,|\,\psi >= \alpha\,|\,\psi >$$
$$\hat{B}\,|\,\psi >= \beta\,|\,\psi >$$

وجود مثل هذه الدوال المتزامنة يشترط أن تكون الاجراءات المخصوصة لها تبادلية.

البرهان: باستخدام معادلات القيم المخصوصة أعلاه يمكن أن نركب

$$\hat{A}\hat{B}\,|\,\psi >= \beta\alpha\,|\,\psi >= \alpha\beta\,|\,\psi >$$
$$BA\,|\,\psi >= \alpha\beta\,|\,\psi >$$

أي أن

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\,|\,\psi >= 0$$

أي أن

$$\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\equiv[\hat{A},\hat{B}]=0$$

تسمى مثل هذه الاجراءات تبادلية commutative.

مثال على الاجراءات التبادلية $\hat{H}$ مع $p_x$ و $x$ مع $t$.

## تبادلية الاجراءات ومبدأ عدم التحديد

إلى جانب الاجراءات التبادلية هنالك أخرى لا تبادلية.

هنالك مبرهنة تقول:

الملحوظات المتعلقة بإجراءات لا تبادلية تكون بينها بالضرورة علاقات عدم تحديد.

وبصورة رياضية إذا كان

$$[\hat{A},\hat{B}]=i\hat{C}\neq 0$$

فإن

$$\Delta A\Delta B=\frac{<\hat{C}>}{4}$$

حيث أن

$$(\Delta A)^2=<\hat{A}>^2-<\hat{A}^2>$$

مثال:

$$[x,p_x]=i\hbar$$

لذا وبموجب هذه النتيجة يكون

$$\Delta x\Delta p\geq\frac{\hbar}{4}$$

| |
|---|
| الخلاصة: تتصف الاجراءات اللاتبادلية بما يلي |
| 1. ليس لها دوال متزامنة (مشتركة).<br>2. بين ملحوظاتها قدر من عدم التحديد أكبر من الصفر. |