المحاضرة التاسعة

العناصر الأساسية في المحاضرة :

١- مشتقة الدالة العكسية وأمثلة علي الدوال المثلثية العكسية.

٢- تفاضل الدالة الضمنية .

٣- مشتقة الدالة في الصورة البارامترية.

٤- مشتقة الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية والتفاضل اللوغاريتمي.

مشتقات الدوال العكسية: Derivatives of inverse Functions

مما سبق نعلم أنه إذا كانت الدالة $y=f(x)$ متصلة وتزايدية (تناقصية) فإن دالتها العكسية تكون كـــذلك متصلة وتزايدية (تناقصية).

نظرية (٣. ١. ١٧):

(أ) إذا كانت الدالة $y=f(x)$ تزايدية وقابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ فإن دالتها العكســـية $x=f^{-1}(y)$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق على الفترة $]f(a),f(b)[$ ويكون:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad (\text{حيث } f'(x)\neq 0)$$

(ب) إذا كانت الدالة $y=f(x)$ تناقصية وقابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ فإن دالتها العكسية $x=f^{-1}(y)$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق على الفترة $]f(b),f(a)[$ ويكون:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad (\text{حيث } f'(x)\neq 0)$$

أمثلة (٣. ١. ١٨): أوجد المشتقة الأولى للدوال:

$(i)\ y=\sin^{-1}x$

الحل. حيث أن دالة الجيب $\sin y$ تزايدية وقابلة للاشتقاق في الفترة $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ، إذن تكون دالتها العكسية موجودة وتزايدية وقابلة للاشتقاق علي الفترة $]-1,1[$.

وبما أن $y=\sin^{-1}x$ ، إذن $x=\sin y$ ويكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ |x| < 1.$$

(مع ملاحظة أن $\cos^2 y = 1-\sin^2 y$ ومنها $|\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$ وكذلك ملاحظة أنه إذا كان $y = \sin^{-1} x$ ، فإن $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\cos y > 0$ ، أي أن $|\cos y| = \cos y$) . إذن يكون :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ |x| < 1}$$

$(ii)\ y = \cos^{-1} x$

الحل. حيث أن دالة جيب التمام $\cos y$ تناقصية وقابلة للاشتقاق في الفترة $]0,\pi[$ ، إذن تكون دالتها العكسية موجودة وتناقصية وقابلة للاشتقاق علي الفترة $]-1,1[$.

وبما أن $y = \cos^{-1} x$ ، إذن $x = \cos y$. ويكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ |x| < 1.$$

(مع ملاحظة أنه إذا كان $y = \cos^{-1} x$ ، فإن $0 \le y \le \pi$ وبالتالي $\sin y \ge 0$ ، أي أن $|\sin y| = \sin y$)

أى أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ |x| < 1}$$

$(iii)\ y = \tan^{-1} x$

الحل. بما أن دالة الظل $\tan y$ تزايدية وقابلة للاشتقاق في الفترة $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ، إذن تكون دالتها العكسية موجودة وتزايدية وقابلة للاشتقاق علي $\mathbb{R}$.

وبما أن $y = \tan^{-1} x$ ، إذن $x = \tan y$. ويكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

أى أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$(iv)\ y = \cot^{-1} x$

الحل. بنفس طريقة المثال السابق يمكن الحصول على

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$(v)\ y = \sec^{-1} x$

الحل: بما أن دالة القاطع $\sec y$ تزايدية وقابلة للاشتقاق على المجموعة $]0,\pi[-\{\pi/2\}$ ومشتقتها موجبة في هذا النطاق ، إذن تكون دالتها العكسية موجودة وتزايدية وقابلة للاشتقاق ومشتقتها موجبة في النطاق $\mathbb{R}-[-1,1]=]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$. ومن الواضح أن $x = \sec y$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1.$$

أي أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1.}$$

$(vi)\ y = \csc^{-1} x$

الحل. بنفس طريقة المثال السابق يمكن الحصول على:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x|>1.}$$

ملاحظة (٣. ١. ١٩): باستخدام مفهوم دالة الدالة يمكن إثبات النتائج التالية:

$$\frac{d}{dx}\begin{cases}\sin^{-1} f(x)\\ \cos^{-1} f(x)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}f'(x)\\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}f'(x)\end{cases}, \qquad \frac{d}{dx}\begin{cases}\tan^{-1} f(x)\\ \cot^{-1} f(x)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\\ \dfrac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}\end{cases},$$

$$\frac{d}{dx}\begin{cases}\sec^{-1} f(x)\\ \csc^{-1} f(x)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2-1}}\\ \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2-1}}\end{cases}$$

أمثلة (٣. ١. ٢٠):

(١) أوجد y' للدوال:

$$(i) \quad y = \sin^{-1} x^3$$

الحل.
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}(3x^2)$$

$$(ii) \quad y = \sec^{-1}(x^2+1)$$

الحل .

$$y' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^2-1}}(2x) = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+2)(x^2)}} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$(iii) \quad y = (\sin x^3)\sin^{-1}(\cos x)$$

الحل.

$$y' = (\cos x^3)(3x^2)\sin^{-1}(\cos x) + (\sin x^3)\frac{(-\sin x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}$$
$$= 3x^2(\cos x^3)\sin^{-1}(\cos x) - \sin x^3.$$

(٢) إذا كانت $]0,\infty[\to]0,\infty[: y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ، فأوجد $f'(x)$.

الحل : معلوم أن الدالة $y = \sqrt[n]{x}$ تناظر أحادي ومتصلة علي $]0,\infty[$ ودالتها العكسية هي $x = y^n$ ومن قانون مشتقة الدالة العكسية يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1-n} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n}(x)^{\frac{1}{n}-1}$$

(٣) إذا كانت $y = f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ معرفة علي الفترة $]0,\infty[$ حيث $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}$ ، فأوجد $f'(x)$.

الحل : نستخدم نتيجة المثال السابق (٢) ومشتقة تحصيل دالتين ويترك تمرين.

مشتقة الدالة الضمنية: The derivative of the implicit function

كما سبق ودرسنا من دوال كانت y تُعطى كدالة صريحة فى x ولكن فى بعض الأحيان يصعب وضع y كدالة صريحة فى x. بمعنى أنه يوجـــــــد معادلـــــــة تضم المتغير المستقل x، وكذلك المتغير التابع y ، كمثال

على ذلك الدالـــــــــة $\sin(xy) = x + x^3y^2$ ، وبشكل عام الدالة الضمنية تأخذ الصورة $f(x,y) = 0$ وللحصول على المشتقة الأولى y نجرى عملية التفاضل بالنسبة إلى x لطرفى المعادلة فتنتج معادلة تحتوى على $x, y, \frac{dy}{dx}$ يمكن حلها والحصول على $\frac{dy}{dx}$ كدالة فى x, y.

أمثلة (٣. ١. ٢١):

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت y معطاة كدالة فى x بالمعادلة $x^3 + y^3 = 9xy$.

الحل. بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة لـــ x نجد أن $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 9x\frac{dy}{dx} + 9y$. إذن

$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2$ ، وعليه فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{9y - 3x^2}{3y^2 - 9x} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$.

(٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y^3 - 3x^2y + 1 = 0$.

الحل. بتفاضل الطرفين بالنسبة لـــ x نحصل على $3y^2\frac{dy}{dx} - 3x^2\frac{dy}{dx} - 6xy = 0$ ، إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}.$$

(٣) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $\sin(xy) = xy + x^2$.

الحل. بتفاضل الطرفين بالنسبة لـــ x نحصل على $\cos(xy)[y + x\frac{dy}{dx}] = y + x\frac{dy}{dx} + 2x$

أى أن
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x - y\cos(xy)}{x(\cos(xy) - 1)}$$

إذن
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \cos(xy)) + 2x}{-x(1 - \cos(xy))} = -\left(\frac{y}{x} + \frac{2}{1 - \cos(xy)}\right)$$

(٤) يمكن حل مثال (٣. ١. ٢٠) (٣) باستخدام مشتقة الدالة الضمنية وقاعدة السلسلة كما يلي :

حيث أن $y = f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ ، إذن يكون $y^n = x^m$ وباشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x نجد أن $ny^{n-1}y' = mx^{m-1}$ ومنها ينتج أن

$$y' = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{m-1}y^{1-n} = \frac{m}{n}x^{m-1}(x^{m/n})^{1-n} = \frac{m}{n}x^{m-1}x^{\frac{m}{n}-m} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

وهو المطلوب.

التفاضل البارامتري: parametric differentiation

إذا كانت $y = g(t)$; $x = f(t)$ دالتين متصلتين في متغير t ، فإن هاتين المعادلتين تسميان " معادلات بارامـــــــترية " . إذا استطعنا حذف t بينهما نحصل على علاقة مباشرة بين x , y . وذلك بفرض أن f لها دالة عكسية متصلة أو g لها دالة عكسية متصلة.

والآن بفرض أن f لها دالة عكسية متصلة فيمكن الحصول على $\frac{dy}{dx}$ للدوال البارامترية كما يلي:

بفرض أن Δt هو تغير بسيط في t ، فإنه تبعا لذلك يحدث تغير بسيط في x مقداره Δx ويحدث بالتالي تغير بسيط في y مقداره Δy . ونلاحظ أنه من اتصال f^{-1} نجد أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن $\Delta t \to 0$. وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

أمثلة (٣. ١. ٢٢):

(i) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = a\sin t$, $x = a\cos t$ (حيث $a \neq 0$).

الحل. حيث أن $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$, $\frac{dy}{dt} = a\cos t$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t \ , \ t \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$$

(ii) إذا كانت $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ (حيث $a \neq 0$). أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \pi$.

الحل. بما أن $y = a(1-\cos t)$. إذن $\frac{dy}{dt} = a\sin t$ ، وبما أن $x = a(t-\sin t)$. إذن $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$ ، وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{cotan} t$$

إذن

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi} = \operatorname{cotan}\frac{\pi}{2} = 0$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية :

سبق وأن ذكرنا أن الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية كلاهما دالة متصلة ويمكن إثبات النظرية التالية (مقرر ر١٣٢):

نظرية (٣. ١. ٢٣) :

(١) الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a x$ قابلة للاشتقاق علي $]0,\infty[$ ومشتقتها تعطي بــــ :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} \quad , \quad x>0 \; , \; a>0}$$

(٢) الدالة الأسية $y = a^x$ قابلة للاشتقاق علي $\mathbb{R}$ ومشتقتها تعطي بــــ :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a \quad , \quad x\in\mathbb{R} \quad , \quad a>0}$$

ونتيجة لذلك يمكن استنباط أن :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad , \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

فيما يلي نعطي بعض الأمثلة على مشتقة الدالة الأسية والدالة واللوغاريتمية .

مثال (٣. ١. ٢٤) : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

$(i)\;\; y = e^{\sin x} + \ln(\cos x) \qquad , \; x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$(ii)\;\; y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x} + (1+x^2)^{3x^2+4}$

$(iii)\; y = \log_4(3x^2+7)$

الحل :

(i) نضع $z_1 = \sin x$, $z_2 = \cos x$ ، إذن يكون $y = e^{z_1} + \ln z_2$ ، وباستخدام قاعدة السلسلة يكون لدينا

$$\frac{dy}{dx} = e^{z_1}\,.\,\frac{dz_1}{dx} + \frac{1}{z_2}\,.\,\frac{dz_2}{dx}$$

$$= e^{\sin x}\,.\,\cos x + \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = e^{\sin x}\,.\,\cos x - \tan x.$$

$(\;ii\;)\qquad y = e^{\tan x\,\ln x} + e^{\cos x\;\ln\,(\sin x)} + e^{(3x^2+4)\;\ln\;(1+x^2)}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\tan x\ \ln x}\cdot(\tan x\cdot\frac{1}{x}+\sec^2 x\cdot\ln x)+e^{\cos x\ \ln(\sin x)}(-\sin x\ \ln(\sin x)$$

$$+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x)+e^{(3x^2+4)\ \ln(1+x^2)}\ (6x\ln(1+x^2)+\frac{3x^2+4}{1+x^2}(2x))$$

(iii) نضع $z=3x^2+7$ فيكون $y=\log_4 z$ وبالتالي $\frac{dy}{dz}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\ln 4}$ ويكون إذن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z\ \ln 4}\cdot(6x)=\frac{1}{3x^2+7}\cdot\frac{1}{\ln 4}$$

ملحوظة (٣. ١. ٢٥) : باستخدام نفس الأسلوب المتبع في (iii) يستطيع الطالب أن يبرهن أنه إذا كانت f دالة موجبة وقابلة للتفاضل وكان $a>0$ فإن :

$$\frac{d}{dx}(\log_a f(x))=\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$$

مع ملاحظة أنه من خصائص الدالة اللوغاريتمية المذكورة في الباب الأول نجد أن $(\log_e a)(\log_a e)=1$ أي أن $(\ln a)(\log_a e)=1$.

وباستخدام مفهوم دالة الدالة يمكن أيضا الحصول على النتائج التالية :

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad,\qquad \frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}f'(x)\ln a\ ,$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}f'(x)\ln a$$

التفاضل اللوغاريتمي : Logarithmic Differentiation

في بعض الحالات قد تظهر صعوبة عند إيجاد المشتقة بالطرق العادية لذلك يستحسن استخدام التفاضل اللوغاريتمي لإيجاد المشتقة ، كذلك لإيجاد مشتقة الدوال الأسية في صورها العامة أي التي تتكون من كمية متغيرة مرفوعة لأس متغير فيؤخذ اللوغاريتم الطبيعي قبل إجراء عملية التفاضل .

أمثلة (٣. ١. ٢٦) :

(i) أوجد y' للدالة $x^y=y^x$ ، حيث $x>0\ ,\ y>0$.

الحل .

لاحظ أن الأس متغير والأساس متغير ، ولتبسيط هذه المسألة نأخذ لوغاريتم الطرفين فيكون $\ln x^y=\ln y^x$ ، أي أن $y\ln x=x\ln y$.

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$y\frac{1}{x}+y'\ln x=x\frac{1}{y}y'+\ln y$$

وينتج أن

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-\ln y}{\frac{x}{y}-\ln x}=\frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$$

(ii)أوجد y' للدالة

$$y=\sqrt{\frac{(x+1)(x^2+3)^3(x^3+2)^5}{(x^2+4)^6(x^3+1)^2}}$$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين واستخدام قاعدتي الضرب والقسمة للوغاريتمات نحصل على :

$$\ln y=\frac{1}{2}\left\{\ln(x+1)+3\ln(x^2+3)+5\ln(x^3+2)-6\ln(x^2+4)-2\ln(x^3+1)\right\}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{3(2x)}{x^2+3}+\frac{5(3x^2)}{x^3+1}-\frac{6(2x)}{x^2+4}-\frac{2(3x^2)}{x^3+1}\right\}$$

إذن

$$y'=\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{6x}{x^2+3}+\frac{15x^2}{x^3+1}-\frac{12x}{x^2+4}-\frac{6x^2}{x^3+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2+3)^3(x^3+2)^5}{(x^2+4)^6(x^3+1)^2}}\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{6x}{x^2+3}+\frac{15x^2}{x^3+1}-\frac{12x}{x^2+4}-\frac{6x^2}{x^3+1}\right\}$$

(iii) أوجد y' للدالة $y=(f(x))^{g(x)}$ (حيث f دالة موجبة).

الحل : بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على $\ln y=g(x)\ln f(x)$ ، وبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x يكون

$$\frac{1}{y}y'=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

وعليه فإن

$$y'=(f(x))^{g(x)}\left\{g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right\}$$

إذن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{g(x)} g'(x)\ln f(x) + g(x)(f(x))^{g(x)-1} f'(x)}$$

(iv) أوجد y' للدالة : $x>0$; $y = x^{\sin x}$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على $\ln y = (\sin x)\ln x$ ، وبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x يكون

$$\frac{1}{y}y' = (\cos x)\ln x + (\sin x)\frac{1}{x}$$

وعليه فإن

$$y' = x^{\sin x}\left\{(\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}\right\}$$

طريقة أخرى :

باستخدام القانون السابق ، وبالتطبيق المباشر نحصل على :

$$y' = x^{\sin x}(\cos x)\ln x + (\sin x)x^{\sin x - 1}$$

ومنها نجد أن

$$y' = x^{\sin x}\left\{(\cos x)\ln x + \frac{\sin x}{x}\right\}$$

(v)أوجد y' للدالة

$$y = x^{\ln x} + x^3 \quad , \quad x > 0$$

الحل.

بتطبيق القانون السابق نحصل على

$$\begin{aligned} y' &= x^{\ln x}\frac{1}{x}\ln x + (\ln x)x^{(\ln x)-1} + 3x^2 \\ &= x^{\ln x}\left\{\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right\} + 3x^2 = \frac{2\ln x}{x}x^{\ln x} + 3x^2 \end{aligned}$$

==

==

==