المحاضرة الرابعة

تعريف نهاية دالة وأمثلة

العناصر الأساسية في المحاضرة:

١- تعريف نهاية دالة وهو ما يسمي بتعريف $\varepsilon-\delta$ ($\varepsilon-\delta$ definition).

٢- أمثلة علي إثبات النهاية بالتعريف.

٣- نظرية وحدانية النهاية.

بند ١ : تعريف نهاية دالة وأمثلة :

سنمهد لمفهوم النهاية بالمثال التالى

مثال(٢. ١ . ١): بالقرب من النقطة $x=1$ ، ادرس قيم الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$; $x \neq 1$.

الحل :

لاحظ أن هذه الدالة معرفة لجميع نقاط $\mathbb{R}$ ماعدا عند النقطة $x=1$. ندرس الآن قيم الدالة f بالقرب من النقطة $x=1$ فى الجدول الآتى:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001
0.99999	1.99999	1.00001	2.00001
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

لاحظ أنه كلما اقتربت قيم x من النقطة 1 إقتربت قيم الدالة $f(x)$ من العدد 2 ، أى أن الدالة تقترب من العدد 2 عندما تؤول أو تقترب x من العدد 1 وفى هذه الحالة يُقال إن نهاية الدالة $f(x)$ هى العدد 2 عندما تؤول x إلى العدد 1 ونكتب للتعبير عن ذلك بـــــ $\lim_{x\to 1} f(x)=2$.

تعريف (٢. ١ .٢): المجموعة الجزئية U من $\mathbb{R}$ تسمى جوار للنقطة $a \in \mathbb{R}$ إذا أمكن إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث أن $]a-\delta, a+\delta[\subseteq U$.

مثال (٢. ١ . ٣):

كلا من الفترات $]-3, 5[$, $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$, $[-1, \frac{1}{2}[$ جوار للنقطة 0 .

فيما يلي سنعتبر G فترة أو اتحاد عدد منته من الفترات من $\mathbb{R}$ والنقطة a نقطة طرفية للمجموعة G أو تنتمي للمجموعة G وأن $f: G \to \mathbb{R}$.

تعريف (٢. ١ . ٣): **(تعريف نهاية دالة) Limit of a Function**

يقال إن العدد الحقيقي b هو نهاية الدالة $f(x)$ عندما تؤول x إلى النقطة a إذا كان لكل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta(\varepsilon) > 0$ (يعتمد على ε عادة) بحيث أن :

$$\forall x \in G: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن المتباينة $|f(x)-b| < \varepsilon$ تكون متحققة لجميع النقط x التي تنتمي إلى G وتحقق العلاقة $0 < |x-a| < \delta$.

إذا كانت b هي نهاية دالة ما عند النقطة a فإن هذا يستلزم أن تكون قيم الدالة قريبة جدا من العـــدد b عندما تكون قيم x قريبة قرباً كافياً من a .

نظرية (٢. ١ . ٤): **(وحدانية نهاية الدالة) Uniqueness of the Limit of a Function**

إذا كانت نهاية الدالة f عند نقطة a موجودة فإنها تكون وحيدة .

البرهان: نفرض أنه يوجد عددان حقيقيان b_1, b_2 بحيث أن

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_1 \ ; \ \lim_{x \to a} f(x) = b_2$$

من تعريف النهاية ينتج أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G: \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon \quad \ldots \quad (2.1)$$

وكذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_2 > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G: \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon \quad \ldots \quad (2.2)$$

الآن باختيار $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ (العدد الأصغر بين δ_1 , δ_2) فإنه باختيار x من G وتحقق $0 < |x-a| < \delta$ ينتج أن :

$$|b_1 - b_2| = |b_1 - f(x) + f(x) - b_2| \le |f(x) - b_1| + |f(x) - b_2|$$
$$< 2\varepsilon \qquad \text{(من } (2.1), (2.2)\text{)}$$

إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$\forall x \in G: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |b_1 - b_2| < 2\varepsilon$$

وحيث أن العدد الغير سالب وأقل من أي عدد موجب هو الصفر، فينتج أن $b_1 - b_2 = 0$. أي أن $b_1 = b_2$.

مثال (٢. ١ . ٥): أثبت باستخدام تعريف النهاية أن $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

الحل: لكل $\varepsilon > 0$ يجب إيجاد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$$

ولكي نوجد δ بدلالة ε نحاول إيجاد ارتباط بين المقدارين $|x^2-4|$, $|x-2|$ وليكن في الصورة

$$|x^2-4| \le M\,|x-2|$$

حيث M عدد ثابت وفي هذه الحالة سيكون أي اختيار لــ δ بحيث $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ يكون مناسباً . الآن بملاحظة أن

$$|x^2-4| = |x+2|\,|x-2|$$

إذن دون فقد التعميم يمكن اختيار $\delta \le 1$ ويكون لأي عدد x في الفترة $]2-\delta, 2+\delta[$ الآتي صحيح

$$|x+2| \le |x| + 2 < 3 + 2 = 5$$

إذاً $|x^2 - 4| = |x+2|\,|x-2| < 5\,|x-2|$. أي أن $M = 5$ ولكي تكون الكمية الأخيرة أقل من العدد ε يجب اختيار x لتحقق الشرط $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$ وبالتالي نختار $\delta = \min(1, \varepsilon/5)$ ليتحقق المطلوب ويكون :

$$|x-2| < \delta \le \varepsilon/5 \Rightarrow |x^2-4| = |x-2|\,|x+2| < 5 \,.\, \varepsilon/5 = \varepsilon$$

ونكون قد أثبتنا أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \min(1, \varepsilon/5)$ بحيث أن

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

مثال (٢. ١ . ٦): أثبت باستخدام تعريف النهاية أن $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{9}$.؟

الحل: لكل $\varepsilon > 0$ يجب إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\right| < \varepsilon$$

ولكي نوجد δ بدلالة ε نحاول إيجاد ارتباط بين المقدارين $|x-3|$, $\left|\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{9}\right|$ وليكن في الصورة

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\right| \le M\,|x-3|$$

حيث M عدد ثابت وفي هذه الحالة سيكون أي اختيار ل δ بحيث $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$ يكون مناسباً . الآن بملاحظة أن

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}\right|=\left|\frac{9-x^2}{9x^2}\right|=\frac{1}{9x^2}|x-3||x+3|$$

يمكن اختيار $\delta \leq 1$ ونأخذ جوار $]3-\delta, 3+\delta[$ حول النقطة 3. نلاحظ في هذا الجوار أن $2 < x < 4$ وهذا يقتضي أن $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{4}$ وكذلك $|x+3| < 7$ ويكون إذاً:

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}\right| = \left|\frac{9-x^2}{9x^2}\right| = \frac{1}{9x^2}|x-3||x+3| < \frac{7}{36}|x-3|$$

أي أن $M = \frac{7}{36}$ ، ولكي تكون الكمية الأخيرة أقل من ε يجب اختيار x لتحقق أن $|x-3| < \frac{36}{7}\varepsilon$ ، وبالتالي نختار $\delta = \min(1, \frac{36}{7}\varepsilon)$ ليتحقق المطلوب .

مثال (٢. ١ . ٧): أثبت باستخدام تعريف النهاية أن $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ ؟.

الحل: تمرين للطالب

مع ملاحظة أنه بالمثل يمكن إثبات أن $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$ ونترك تمرين للطالب أيضاً ، وعامة يمكن إثبات أن $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي.

مثال (٢. ١ . ٨): باستخدام التعريف الأولى لنهاية الدالة أثبت أن: $\lim_{x\to -2}(\frac{1}{x^2}+1) = 5/4$.

الحل: لكل $\varepsilon > 0$ يجب إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \ 0 < |x+2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(\frac{1}{x^2}+1) - 5/4| < \varepsilon$$

ولكي نوجد δ بدلالة ε نحاول إيجاد ارتباط بين المقدارين $|x+2|$, $\left|\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{5}{4}\right|$ وليكن في الصورة :

$$\left|\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{5}{4}\right| \leq M|x+2|$$

حيث M عدد ثابت وفي هذه الحالة سيكون أي اختيار لـــ δ بحيث $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$ يكون مناسباً . الآن بملاحظة أن.

$$|(\frac{1}{x^2}+1) - 5/4| = |\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}| = \frac{|x^2-4|}{4x^2} = \frac{|x-2|}{4x^2}|x+2|$$

باختيار $\delta \le 1$ وباختيار جوار $]-2-\delta\,,\,-2+\delta[$ للنقطة -2 نلاحظ أنه في هذا الجوار يكون $-3 < x < -1$ وبالتالي $1 < x^2 < 9$ ، ومنها $\frac{1}{9} < \frac{1}{x^2} < 1$ وكذلك $|x-2| < 5$ ، وبالتالي

$$\left|\left(\frac{1}{x^2}+1\right)-\frac{5}{4}\right| = \left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right| = \frac{|x^2-4|}{4x^2} = \frac{|x-2|}{4x^2}|x+2| < \frac{5}{4}|x+2|$$

ولكي تكون الكمية الأخيرة أقل من ε يجب اختيار x لتحقق $M = \frac{5}{4}$ ، أي أن $|x+2| < \frac{4\varepsilon}{5}$ وبالتالي لكل $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \min\{1\,,\,\frac{4\varepsilon}{5}\}$ ليتحقق المطلوب .

مثال (٢. ١ . ٩): إعتبر الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2\,;\; x \ne 0 \\ 1\,;\; x = 0 \end{cases}$. برهن باستخدام التعريف أن :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

الحل: لكل $\varepsilon > 0$ يجب إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$$

وهذا يعني أنه يجب اختيار $\delta > 0$ بحيث تحقق

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x|^2 < \varepsilon$$

ولكي يتحقق الشرط الأخير يجب أن تحقق x الشرط $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ ، ولذلك نختار $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ليتحقق المطلوب.

مثال (٢. ١. ١٠): لأي عدد موجب n . أثبت أن $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

الحل : لكل $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon^{1/n}$ ليتحقق المطلوب (تحقق من ذلك) .

==

==

==