محمود طه القالع ٠١٢٢٥٠٣٦٢٥ Email malkalee@yahoo.com

أولا :- التباديل والتوافيق

تذكر الاتي

(١) $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$

(٢) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{ن!}{(ن-ر)!}$

(٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$

فأن أم أن ر = هـ

أو ر + هـ = ن

(٤) $\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \dfrac{ن - ر + ١}{ر}$

مثال (١)

١) إذا كان $٦ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٧ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ ، $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$ فأوجد قيمة $^{ن}ل_{ر-١٠}$

الحل

حيث أن $\dfrac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \dfrac{ن - ر + ١}{ر}$

فأن

$\dfrac{ن - ر + ١}{ر} = \dfrac{٧}{٦}$

بالاختصار نجد أن

$٦ ن - ٦ ر + ٦ = ٧ ر \leftarrow - - -$

$٦ ن + ٦ = ١٣ ر$ (١)

وحيث أن

$^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$ فيكون

$ن = ر + ر + ١$

$ن = ٢ ر + ١$

$ن - ١ = ٢ ر \leftarrow - - - -$ (٢)

وبقسمة (١) علي (٢) نجد أن

$\dfrac{٦ ن + ٦}{ن - ١} = \dfrac{١٣ \cancel{ر}}{٢ \cancel{ر}}$

$١٢ن + ١٢ = ١٣ ن - ١٣$

فيكون ن = ٢٥

بالتعويض نجد أن

ر = ١٢

قيمة $^{ن}ل_{ر-١٠} = {}^{٢٥}ل_{١٢-١٠} = {}^{٢٥}ل_{٢}$

$= ٢٥ \times ٢٤ = ٦٠٠$

مثال (٢)

إذا كان $^{٣م+٢ن}ل_{٢} = ١١٠$ ،

$^{٢م-ن}ق_{٢} = ١٠$ فأوجد قيمة $(م + ن)!$

الحل

حيث أن

$^{٣م+٢ن}ل_{٢} = ١١ \times ١٠$ فأن

$٣ م + ٢ ن = ١١$ (١)

وحيث أن

$^{٢م-ن}ق_{٢} = ١٠$ فأن

$^{٢م-ن}ل_{٢} = ١٠ \; ٢! = ٢٠ = ٥ \times ٤$

فأن

$٢ م - ن = ٥$ (٢)

من المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن

$٣ م + ٢ ن = ١١$

$٢ م - ن = ٥$ $\times ٢$

فيكون

$٣ م + ٢ ن = ١١$

$٤ م - ٢ن = ١٠$

بالجمع

$٧ م = ٢١$ فيكون م = ٣

ويكون ن = ١

أي أن $(م + ن)! = ٤! = ٢٤$

مثال (٣)

إذا كان $^{م+ن}ل_{٢} = ٣٨٠$ ، $^{ن-١}ق_{٣} = ٤$

فأوجد قيمة م ، ن

الحل

$^{م+ن}ل_{٢} = ٣٨٠ = ٢٠ \times ١٩$ ومنها نجد

أن $م + ن = ٢٠$ (١)

وحيث ان

$^{ن-١}ق_{٣} = ٤$

$^{ن-١}ل_{٣} = ٤ \times ٣! = ٢٤$

$= ٤ \times ٣ \times ٢$

ومنها نجد أن ن ـ ١ = ٤ أي أن

ن = ٥ وبالتعويض عن قيمة ن في المعادلة

الاولي نجد أن

م = ١٥

مثال (٤)

إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ن-١} = ١٠$

فأوجد قيمة $^{ن}ق_{ر+٤}$

الحل

حيث أن

$^{ن}ق_{ن-١} = {}^{ن}ق_{ن-ن+١} = {}^{ن}ق_{١} = ن$

فأن

ن = ١٠

ولذا $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠ \longleftarrow {}^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$

$^{١٠}ل_{ر} = ١٠ \times ٩ \times ٨$ فيكون ر = ٣

المقدار

$^{ن}ق_{ر+٤} = {}^{١٠}ق_{٣+٤} = {}^{١٠}ق_{٧}$

$= {}^{١٠}ق_{٣} = ١٢٠$

مثال (٥)

٢) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

ومن ثم أوجد قيمة ر إذا كان

$$\frac{^{١٣}ق_{ر+١} + {}^{١٣}ق_{ر}}{^{١٢}ق_{ر} + {}^{١٢}ق_{ر+١}} = \frac{١٤}{٣}$$

الحل

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!} \ ،$$

$$^{ن}ق_{ر-١} = \frac{ن!}{(ر-١)!\ (ن-ر+١)!}$$

فأن

الطرف الاولي

$^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١}$

$$= \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-١)!\ (ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{ن!\ (ن-\cancel{ر}+١+\cancel{ر})}{ر!\ (ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{ن!\ (ن+١)}{ر!\ (ن-ر+١)!} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$

وهو المطلوب

وحيث أن

$$\frac{^{١٣}ق_{ر+١} + {}^{١٣}ق_{ر}}{^{١٢}ق_{ر} + {}^{١٢}ق_{ر+١}} = \frac{١٤}{٣}$$

$$\frac{١٤!}{\cancel{(ر+١)!}\ (١٤-ر)!} \times \frac{\cancel{(ر+١)!}\ (١٣-ر)!}{١٣!}$$

$$= \frac{١٤}{٣}$$

$\frac{١٤}{١٤-ر} = \frac{١٤}{٣}$ وبالاختصار نجد أن ر = ١١

قوانين هامه

١) $^{ن}ل_{ر} =$

ن (ن-١) (ن-٢) .... (ن-ر+١)

٢) $^{ن}ل_{ن} =$

ن(ن-١) (ن-٢)....×٣×٢×١ = ن!

*نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

$(أ+ب)^{١} = أ + ب$

$(أ+ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$(أ+ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$

نظرية

$(أ+ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{صفر}\ أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\ أ^{ن-١} \times ب + {}^{ن}ق_{٢}\ أ^{ن-٢} \times ب^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن} \times ب^{ن}$

نتائج

١) $(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\ س + {}^{ن}ق_{٢}\ س^{٢} + ... س^{ن}$

٢) $(١-س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\ س + {}^{ن}ق_{٢}\ س^{٢} + ... + (-س)^{ن}$

مثال (١)

أوجد مفكوك $(أ+ب)^{٤}$

الحل

$(أ+ب)^{٤} =$

$أ^{٤} + {}^{٤}ق_{١}\ أ^{٣}ب + {}^{٤}ق_{٢}\ أ^{٢}ب^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}\ أ\ ب^{٣} + {}^{٤}ق_{٤}\ ب^{٤}$

$= أ^{٤} + ٤\ أ^{٣}ب + ٦\ أ^{٢}ب^{٢} + ٤\ أ\ ب^{٣} + ب^{٤}$

مثال(٢)

أوجد مفكوك $(١-٢س)^{٥}$

الحل

$(١-٢س)^{٥} = ١ - {}^{٥}ق_{١} \times ٢س + {}^{٥}ق_{٢} \times (٢س)^{٢} - {}^{٥}ق_{٣} \times (٢س)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤} \times (٢س)^{٤} - {}^{٥}ق_{٥} \times (٢س)^{٥}$

$= ١ - ١٠ س + ٤٠ س^{٢} - ٨٠ س^{٣} + ٨٠ س^{٤} - ٣٢ س^{٥}$

الحد العام في مفكوك $(س+ب)^{ن}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times الثاني^{(ر)} \times الأول^{(ن-ر)}$

مثال (٣)

أوجد معامل $ح_{٦}$ في المفكوك $(٢ س - ٣)^{٨}$

الحل

معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \times$ (معامل الحد الثاني)^{ر} × (معامل الحد الأول)$^{ن-ر}$

معامل $ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥} \times (-٣)^{٥} \times (٢\times١)^{٣}$

$= ٥٦ \times -٢٤٣ \times ٨ = -١٠٨٨٦٤$

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمه :

$(١,٠١)^{٥} + (٠,٩٩)^{٥}$

مقربا النتائج لثلاثة أرقام عشرية

الحل

المقدار $= (١ + ٠,٠١)^{٥} + (١ - ٠,٠١)^{٥}$

$= ٢ [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥}]$

$= ٢ [١ + {}^{٥}ق_{٢} \times (٠,٠١)^{٢} + {}^{٥}ق_{٤} \times (٠,٠١)^{٤}]$

$= ٢ [١ + ١٠ \times (٠,٠١)^{٢} + ٥ \times (٠,٠١)^{٤}]$

$= ٢ + ٢٠ \times (٠,٠١)^{٢} + ١٠ \times (٠,٠١)^{٤} = ٢,٠٠٢$

مثال (٥)

في مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى "س" التنازلية

أوجد الحد الخالى من س وإذا كانت النسبة بين الحد الخالى من" س "و الحد السادس هي ٢ : ٣

أوجد قيمة" س"

الحل

نفرض ان الحد الخالي من س هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \times \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} \times (س^{٢})^{٩-ر}$

$= {}^{٩}ق_{ر} \times س^{-ر} \times س^{١٨-٢ر}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \times س^{١٨-٣ر}$

فيكون

١٨ ــ ٣ ر = صفر ومنها ر = ٦

الحد الخال من" س "هو $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦}$

${}^{٩}ق_{٣} = ٨٤$

و كانت النسبة بين الحد الخالى من" س "و الحد السادس هي ٢ : ٣

$$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٢}{٣}$$

وحيث أن

$ح_{٦} = {}^{٩}ق_{٥} \times س^{٣}$ وحيث أن ${}^{٩}ق_{٥} = {}^{٩}ق_{٤}$

$= ١٢٦$

$$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٨٤}{١٢٦ س^{٣}} = \frac{٢}{٣}$$

ومنها

$س^{٣} = ١$ فيكون س = ١

مثال (٦)

إذا كان $ح_{٩} = ح_{١٠}$ ، $ح_{٦} : ح_{٧} = ٨ : ١٥$

في المفكوك $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ أوجد قيمتي

ن ، س و أثبت أنه لا يوجد حد خالي من الــ س

الحل

$ح_{٩} = ح_{١٠}$ معناة

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{الثاني}{الاول}$$

$$\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{ن - ٨}{٩} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = ١$$

$$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{ن - ٥}{٦} \times \frac{٣}{٢ س^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$$

وبحل المعادلتين معا نجد أن

$$\frac{\text{ن} - ٨}{\text{ن} - ٥} = \frac{٤}{٥}$$

ومنها نجد أن قيمة ن = ٢٠

وبالتعويض في أي من المعادلتين لايجاد قيمة س

فتكون قيمة س = $\sqrt{٢}$

نفرض ان الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} =$

$${}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{٣}{٢\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}} \times (٢\text{س})^{٢٠-\text{ر}}$$

ومنها نجد أن مجموع اسس (س) =

٢٠ − ٣ ر

وبالمساواة بالصفر نجد أن

٢٠ − ٣ ر = صفر فيكون قيمة ر كسر

وهذا يعني انة لا يوجد حد خالي من الــ (س)

مثال (٧)

إذا كان (س − ٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} -١ & ٣ & \text{س} \\ \text{ك} & \text{س}+١ & ٢ \\ ٢\text{س} & ٥ & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أوجد قيمه ك

الحل

بالتعويض عن قيمة س = ٢ فيكون المحدد

$$\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ \text{ك} & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix} \quad \text{صفر}$$

وحيث أن المحدد يكون قيكته تساوي صفر في حالة تساوي صفين او عمودين

فيكون ك = −١

مثال (٨)

أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ١ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & ٩ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

باستخدام فيكون

$\text{ص}_٢ = \text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ √ + ت

١ + ٣ ت

$\text{ص}_٣ = \text{ص}_٣ - \text{ص}_١$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ٠ & \text{س}-١ & \text{س}^{٢}-١ \\ ٠ & \text{س}-٣ & \text{س}^{٢}-١ \end{vmatrix} = ٠$$

وبأخذ عامل مشترك من ص٢ ، ص٣

(س − ١)(س − ٣) ×

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ٠ & ١ & \text{س}+١ \\ ٠ & ١ & \text{س}+٣ \end{vmatrix} = ٠$$

من الخواص نجد أن

ص٣ = ص٣ − ص٢ فيكون

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ٠ & ١ & \text{س}+١ \\ ٠ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$$

فتكون المعادلة بعد فك المحدد هي

$\text{س}^{٢}$ (س − ١)(س − ٣) = صفر

ومنها تكون قيم س هي

{ ٠ ، ١ ، ٣ }

مثال (٩)

باستخدام كرامر اوجد مجموع الحل للمعادلات الاتيه

٢ س + ص + ع = ٣

س+ص+ع=٢

س − ٣ص + ع = ٦

الحل

اولا

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٤$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & -٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٤$$

فتكون قيمة س = ١

والمثل يمكن ايجاد ص ، ع

مثال (١٠)

١) إذا كان ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت أوجد قيمة ع علي الصورة المثلثية وكذلك علي الصورة الاسية ثم أوجد قيمة $\text{ع}^{-١}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيتان لــ ع

الحل

حيث أن مقياس ع هو (ل)

فيكون ل٢ = س٢ + ص٢

ومنها ل = ٢

وسعة العدد المركبة هي

ظا θ = س /ص

اي ان θ = ٥ ط / ٣

فيكون العدد علي الصورة المثلثية هي

ع = ل [جتا θ + جا θ ت]

= ٢ [جتا ٥ط / ٣ + جا ٥ ط / ٣ ت]

والصورة الاسية له هي

ع = ٢ × هـ^(٥ ط / ٣ ت)

، ع^(-١) = ١ / (١ ــ √٣ ت)

بالضرب في المرافق نجد أن

ع^(-١) = ١/٤ + √٣ / ٤ ت

ومن خلال نظرية ديموافر يمكن ايجاد جذري العدد ع ويكونان هما

√٢ [جتا ٥ ط / ٦ + جا ٥ط / ٦ ت]

√٢ [جتا ١١ ط / ٦ + جا ١١ ط / ٦ ت]

مثال (١١)

(ω + ١/ω)٢ + (ω٢ ــ ١/ω٢)٢ + ٢ = صفر

الحل

حيث أن

١/ω = ω٢ ، ١/ω٢ = ω

ω ــ ω٢ = ± √٣ ت

ω + ω٢ = ــ ١

فيكون الطرف الاول مساوة

(ω + ω٢)٢ + (ω ــ ω٢)٢ + ٢

= ١ ــ ٣ + ٢ = صفر

ثانيا الهندسة الفراغية

١) اذا قطع مستو مستويين متوازيان فخطا تقاطعهم يكون متوازيان

٢) اذا توازي مستقيمان مر بكل منهما مستوي وتقاطع المستويين كان خط تقاطعهما موازيا لهذين المستقيمين

٣) جميع الاعمدة المرسومة علي المستقيم (م) من نقطة (أ) تنتمي لة تقع جميعا في مستوي واحد عمودي علي المستقيم م

٤) اذا كان مستقيم عموديا علي مستويين فأنهم يكونان متوازيين

٥) اذا كان هناك مستويين متقاطعين علي التعامد علي مستوي ثالث فأن خط تقاطعهم يكون عمودي علي هذا المستوي

٦) جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية في القياس

٧) المستقيمان العموديان علي مستوي واحد متوازيان

٨) اذا كان مستقيم عمودي علي مستقيمان متقاطعين فانة يكون عمودي علي مستويهما

٩) اذا وازي مستقيم معلوم مستوي فإي مستقيم يوازي هذا المستقيم المعلوم ويمر بنقطة في المستوي يقع داخل

١٠)اذا قطع مستقيم احد مستويين متوازيان فانة يقطع الاخر

١١)مستقيمان المتوازيان في الفراغ يكونان متوازيان

١٢)اذا قطعت عدة مستويات متوازية مستقيمان فان اطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة

١٣)يوجد مستوي وحيد عمودي علي مستقيم من نقطة علية

١٤)اذا كان مستقيم عموديا علي احد مستويين متوازيين فانة يكون عمودي علي الاخر

(ب) تعــريفات هـــامة :-

١. الزاوية بين مستقيمين متخالفين:- هي احدي الزوايا التي يصنعها احداهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة علية وموازيا للاخر

٢. الهرم المنتظم :- هو هرم ثلاثي جميع اوجهة الاربعة مثلثات متطابقة واحرفه متساوية في الطول

٣. الهرم القائم :- هو الهرم الذي قاعدتة

عبارة عن مضلع منتظم ويكون مركزة هو موقع العمود الساقط من راسة علي القاعدة

٤. الزاوية الزوجية :- هي الزاوية الناتجة من اتحاد نصفي مستوي مع الحد الفاصل بينهما " خط تقاطعهما

٥. الزاوية المستوية لزاوية زوجية :- هي الزاوية الناتجة من تقاطع أي مستوي عمودي مع نصفي المستوي المكونان للزاوية الزوجية

٦. قياس الزاوية الزوجية :- هو قياس أي من الزوايا المستوية لها

٧. الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستوي هي الزاوية بين هذة القطعة المستقية ومسقطها علي هذا المستوي

٨. المسقط العمودي لنقطة معلومة علي مستوي معلوم :- هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من هذة النقطة علي هذا المستوي

١٠. اذا كان مستقيم عمودي علي كل مستقيم في مستوي فانة يكون عمودي علي المستوي

١١. يقال لمستويين انهم متقاطعين علي التعامد اذا كانت جميع الزوايا الزوجية بينهما قائمة

(جـ) النتائـج الهــامة :-

١) أي مستقيمان ل١ ، ل٢ يكونان متوازيان اذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \phi$ او يكون ل١ ، ل٢ في مستوي واحد

٢) اذا اشترك مستويان في اكثر من نقطتين فانة يكونان متطابقين

٣) اذا تقاطع مستوي ومستقيم في اكثر من نقطة فان المستقيم يقع داخل المستوي

٤) اذا اشتركت نقطة في مستويين فانها تقع علي خط تقاطعهما

٥) المستقيمان المتخالفين لا يتقاطعان ولا يقعان في مستوي واحد

٦) اذا قطع مستوي اربعة احرف في متوازي السطوح متوازية فان الشكل الناتج هو متوازي اضلاع

٧) اقطار متوازي السطوح تتقاطع في نقطة واحدة

٨) في الهرم المنتظم اذا كان طول حرفة " ل " وارتفاعة هو "ع " فان $٢ ل^٢ = ٣ ع^٢$

٩) اذا كان طول حرف المكعب هو ل فان طول القطر $= \sqrt{٣}$ ل

١٠) اذا كان ابعاد متوازي المستطيلات هي س ، ص ، ع فان

طول القطر $= \sqrt{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

أكمل الجمل الاتية :-

١) اذا وازي مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فأنة ....

٢) المستقيمان العموديان علي مستو واحد ....

٣) اذا كانت ابعاد متوازي مستطيلات هي ٤، ٣ ، ١٢ سم فان طول قطرة ....

٤) اذا قطع مستقيم احد مستويين متوازيين فانة ....

٥) المكعب هو متوازي مستطيلات فية ....

٦) اذا رسم مستقيم مائل علي مستوي وكان مسقطة علي المستوي عموديا علي مستقيم فية كان هذا المائل ....

٧) إذا وازي مستقيم خارج مستو مستقيمان في مستوي فأنة ......

٨) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية بين إحداهما و ....

٩) إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فأن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بين هذا المستويات تكون ....

١٠) إذا قطع مستوي مستويين متوازيان فخطاً تقاطعة معهما يكونان ....

١١) إذا تقاطع مستقيمان في مستوي وكان موازيان لمستقيمين متقاطعين في مستوي آخر كان ....

١٢) الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستوي هي الزاوية بين القطعة المستقية و ....

١٣) إذا كانت مساحة سطح مكعب ٣٦ سم ^{٢} فإن طول قطرة = ...

١٤) المستقيم العمودي علي أحد مستويين متوازيين يكون ....

١٥) إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين مستويين معاً و غير متوازيين فإنه يكون ......

١٦) الزاوية الزوجية بين مستويين هي اتحاد نصفي المستويين مع ......

١٧) إذا كان المستقيم ل عمودياً علي المستوي س فكل مستوي يحوي المستقيم ل يكون ....

١٨) في الهرم الثلاثي المنتظم الذي طول حرفة ل وارتفاعــه ع يكون ٢ ل ^{٢} = ...

١٩) عدد ارتفاعات الهرم الثلاثي المنتظم =..........

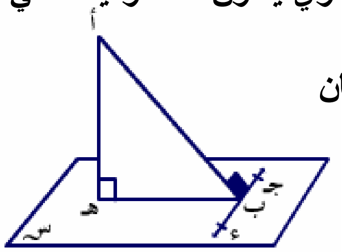
٢٠) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الناشئة من ....

٢١) الهرم الثلاثي المنتظم هو هرم أوجهه الاربعة سطوح مثلثات ....

أثبت أن

اذا رسم مستقيم مائل علي مستوي وعمودي علي مستقيم فية فان مسقط المستقيم المائل علي المستوي يكون عموديا علي هذا المستقيم ايضا

البرهان



البرهان :-

أ هـ ⊥ س فان أ هـ ⊥ ب د

أ ب ⊥ د جـ جـ د ⊥ علي كلا من أ ب

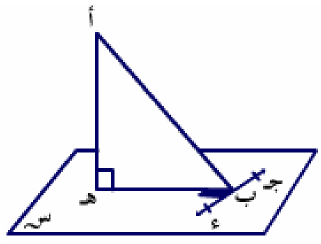
، أ هـ ، ب د ⊥ المستوي أ ب هـ

ب د ⊥ ب هـ

نظريات

اثبت أن

اذا رسم مستقيم مائل علي مستوي وكـــان مسقطة علي المستوي عمـــودي علي مستقيم فية فانة يكون عمـــودي عليــــــة



البرهان :-

أ هـ ⊥ س فان أ هـ ⊥ ب د

هـ ب ⊥ د جـ جـ د ⊥ علي كلا من هـ

ب ، أ هـ ، ب د ⊥ المستوي أ ب هـ

ب د ⊥ ب هـ

مثال (١)

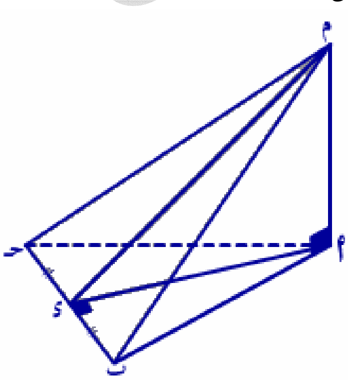
م أ ب حـ هرم ثلاثي رأسه م وقاعدته المثلث أ ب حـ المتساوي الأضلاع والذي طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم، فإذا كان ق (∠ م أ ب) = ق (∠ م أ حـ) = ٩٠°، م ب = ٥ $\sqrt{٢١}$ سم.

اوجد:

(أولاً) طول $\overline{\text{م أ}}$

(ثانياً) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب حـ ، أ ب حـ

الحل



(أولاً): ∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ $\overline{\text{م أ}}$ هو ارتفاع الهرم

∴ Δ م أ ب قائم الزاوية فى أ

∴ (م أ)^٢ = (م ب)^٢ − (أ ب)^٢

= (٥ $\sqrt{٢١}$)^٢ − (١٠ $\sqrt{٣}$)^٢

= ٢٥ × ٢١ − ٣٠٠ = ٢٢٥

∴ م أ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

(ثانياً): ∴ $\overline{\text{أ ء}}$ هو ارتفاع المثلث المتساوى الأضلاع أ ب حـ

∴ أ ء = أ ب حا ٦٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٥ سم.

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ هو مسقط المائل $\overline{\text{م ء}}$

∴ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ∠ م ء أ هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب حـ ، أ ب حـ

ظا (∠ م ء أ) = $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ء}}$ = $\frac{١٥}{١٥}$ = ١

∴ ق (∠ م ء أ) = ٤٥°

∴ ق (∠ م − $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ − أ) = ٤٥°

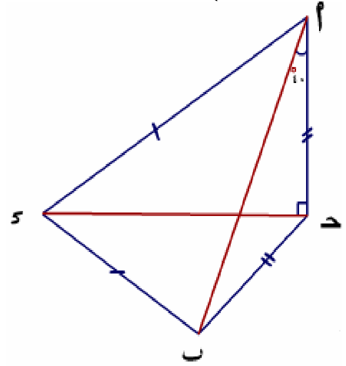
مثال (٢)

أ ب جـ د هرم ثلاثي فية أ جـ = جـ ب ، أ د = د ب ، ق(<أ جـ د) = ٩٠° أثبت أن د جـ ⊥ المستوي أ ب جـ

و إذا كان ق(< ب أ جـ) = ٤٠°

فأوجد ق(< أ ــ جـ د ــ ب)

الحل



مثلث أ جـ د قائم الزاوية في جـ

فيكون

(أ د)^٢ = (أ جـ)^٢ + (جـ د)^٢

(ب د)^٢ = (ب جـ)^٢ + (جـ د)^٢

فيكون ق(< د جـ ب) = ٩٠°

وحيث أن

د جـ ⊥كلا من أ جـ ، ب جـ

يكون

د جـ ⊥المستوي أ جـ ب

وحيث أن

مثلث أ جـ ب متساوي الساقين

فيكون

ق(< أ جـ ب) = ١٨٠° ــ (٤٠ + ٤٠) = ١٠٠°

فيكون

ق(< أ ـ جـ د ـ ب) = ١٠٠°

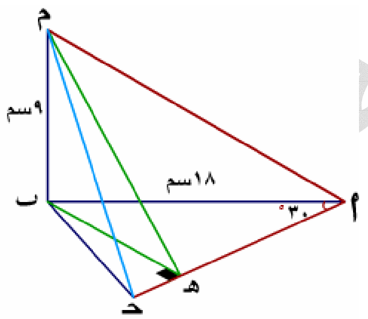
مثال (٣)

مثلث أ ب جـ فيه ق(< أ) = ٣٠° ، أ ب = ١٨ سم رسمت ب م ⊥ المستوي أ ب جـ بحيث ب م = ٩ سم ثم رسمت ب هـ ⊥ أ جـ فقطعه في هـ

أثبت أن

أ هـ ⊥ أ جـ ثم أوجد ق(<م ـ أ جـ ـ ب)

الحل



البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ مائل على المستوى أ ب حـ

، مسقطه $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ الواقع فى المستوى أ ب حـ

∴ المائل $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ أى أن $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ **(١)**

∴ المائل $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ أى أن $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ويقع فى المستوى م أ حـ

، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ويقع فى المستوى ب أ حـ

∴ ∠ م هـ ب هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ م − أ $\overleftrightarrow{\text{حـ}}$ − ب

∴ ق الزاوية (∠ م − $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ − ب) = ق (م $\hat{\text{هـ}}$ ب)

فى Δ أ ب هـ القائم الزاوية فى هـ :

∵ أ ب = ١٨ سم ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

∴ ب هـ = أ ب حا ٣٠° = ١٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٩ سم

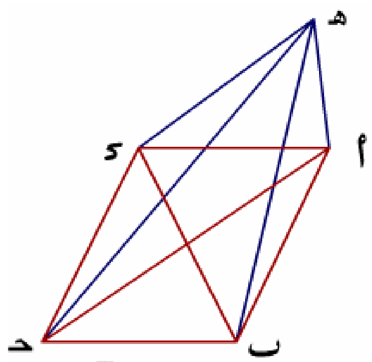
فى Δ م ب هـ القائم الزاوية فى ب (لأن م ب ⊥ المستوى أ ب حـ)

∵ م ب = ب هـ = ٩سم

∴ ق (م $\hat{\text{هـ}}$ ب) = ٤٥°

∴ ق الزاوية (∠ م − $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ − ب) = ٤٥° (المطلوب ثانياً)

مثال (٤)
أ ب جـ د معين رسم أ هـ ⊥ المعين أثبت أن
المستويين هـ أ جـ ، هـ ب د متعامدان
الحل



أ ب جـ د معين فيه ب د ⊥ أ جـ
(القطران متعامدان في المعين)
أ هـ ⊥ ب د (عمودي علي المعين)
فيكون ب د ⊥ أ جـ ، أ هـ
ب د ⊥ المستوي هـ أ جـ
فيكون
المستوي هـ ب د عمودي علي المستوي
هـ أ جـ