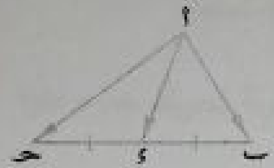
ملخص لأهم ما سبقت دراسته فى السنوات السابقة

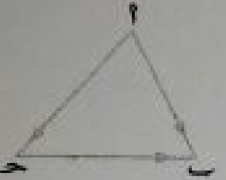
* جمع وطرح متجهين هندسيًا :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{أء}}$



$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أج}} = ٢\,\overrightarrow{\text{أء}}$



$\overrightarrow{\text{أب}} - \overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{جب}}$

* محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة : إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتين متلاقيتين فى نقطة واحدة محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ وقياس الزاوية بينهما = ى ، قياس زاوية ميل المحصلة $\overrightarrow{ح}$ على $\overrightarrow{ق_١}$ = هـ

فإن : $\boxed{ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢\,ق_١\,ق_٢ \text{ جتا } ى}}$ ، $\boxed{\text{ظا } هـ = \dfrac{ق_٢ \text{ جا } ى}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتا } ى}}$

حالات خاصة

(١) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى نفس الاتجاه (ى = صفر)

فإن : $\boxed{ح = ق_١ + ق_٢}$ ، اتجاه $\overrightarrow{ح}$ فى نفس اتجاه القوتين.

(٢) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ متضادتين فى الاتجاه (ى = ١٨٠°)

فإن : $\boxed{ح = |ق_١ - ق_٢|}$ ، اتجاه $\overrightarrow{ح}$ فى نفس اتجاه القوة الأكبر مقدارًا.

(٣) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} \perp \overrightarrow{ق_٢}$ فإن : $\boxed{ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}}$ ، $\boxed{\text{ظا } هـ = \dfrac{ق_٢}{ق_١}}$

(٤) إذا كانت : $ق_١ = ق_٢ = ق$ فإن : $\boxed{ح = ٢\,ق \text{ جتا } \dfrac{ى}{٢}}$ ، $\boxed{هـ = \dfrac{ى}{٢}}$

* محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة :

إذا كانت : $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، ..... ، $هـ_ن$ هى قياسات زوايا ميل القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، ..... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ على $\overleftrightarrow{\text{وس}}$

(الزوايا القطبية)

فإن : $\boxed{ح = \sqrt{س^2 + ص^2}}$ ، $\boxed{ظا هـ = \frac{ص}{س}}$ «هـ زاوية ميل $\overrightarrow{ح}$ على $\overleftrightarrow{و س}$»

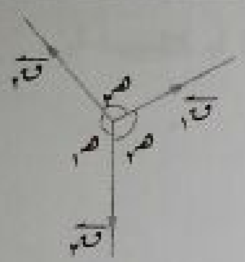
حيث $س = ق_1 \,جتا\, هـ_1 + ق_2 \,جتا\, هـ_2 + \cdots\cdots + ق_ن \,جتا\, هـ_ن$

، $ص = ق_1 \,جا\, هـ_1 + ق_2 \,جا\, هـ_2 + \cdots\cdots + ق_ن \,جا\, هـ_ن$

ملاحظة

إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى متلاقية فى نقطة فإن : س = صفر ، ص = صفر

* إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن :



- $\frac{ق_1}{جا\, هـ_1} = \frac{ق_2}{جا\, هـ_2} = \frac{ق_3}{جا\, هـ_3}$ «قاعدة لامى»
- يمكن تمثيل القوى بأضلاع مثلث ا ب جـ

فى اتجاه دورى واحد «مثلث القوى» ويكون : $\frac{ق_1}{ا ب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{ا جـ}$

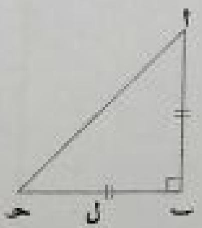
ملاحظات

فى كل من الأشكال الهندسية التالية نجد أن :

(١) إذا كان Δ ا ب جـ

قائم الزاوية ومتساوى الساقين

فإن : ا جـ = ل $\sqrt{2}$

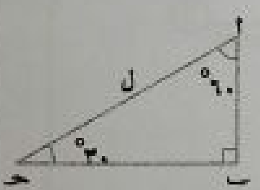


(٢) إذا كان Δ ا ب جـ

ثلاثينى ستينى

فإن : ا ب = $\frac{1}{2}$ ل

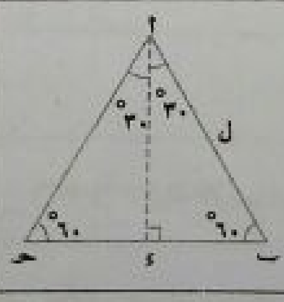
، ب جـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل



(٣) إذا كان Δ ا ب جـ

متساوى الأضلاع

فإن : ا ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل



(٤) إذا كان Δ ا ب جـ

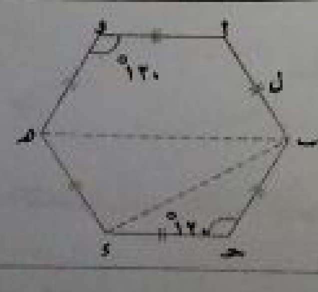
متساوى الساقين

، ق (د ب) = °١٢٠

فإن : ا جـ = ل $\sqrt{3}$

(٥) إذا كان ا ب جـ ء هـ و سداسى منتظم

فإن : ب ء = ل $\sqrt{3}$ ، ب هـ = ٢ ل



الاحتكاك

* السطح الأملس : هو سطح افتراضى تنعدم فيه قوى الاحتكاك تمامًا.

* السطح الخشن : هو سطح تظهر فيه قوى الاحتكاك عند محاولة تحريك جسم عليه.

* رد الفعل : هو قوة تنشأ من تلامس سطحين وهناك حالتين :

* فى حالة السطوح الملساء : يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.

* فى حالة السطوح الخشنة : يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه إذ يتوقف على طبيعة السطحين المتلامسين وكذلك القوى الأخرى المؤثرة على الجسم.

* قوة الاحتكاك السكونى ($\overline{\text{ح}}$) : هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم ساكن على سطح خشن وتعمل على مقاومة حركة الجسم ويكون اتجاهها فى عكس الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه.

* قوة الاحتكاك السكونى النهائى ($\overline{\text{ح}}_{\text{س}}$) : هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته النهائية (العظمى) والتى عندها يكون الجسم على وشك الحركة ويرمز لها بالرمز $\overline{\text{ح}}_{\text{س}}$

* معامل الاحتكاك السكونى ($\text{م}_{\text{س}}$) : هو النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى $\text{ح}_{\text{س}}$ ورد الفعل العمودى ر وهى نسبة ثابتة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما.

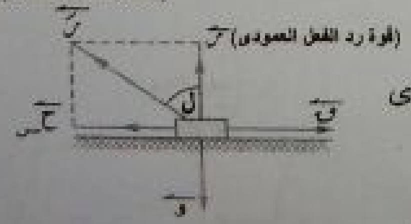
أى أن : $\text{م}_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}}$ ومنها $\boxed{\text{ح}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\ \text{ر}}$

* $0 \leq \text{ح} \leq \text{ح}_{\text{س}}$ أى أن : $0 \leq \text{ح} \leq \text{م}_{\text{س}}\ \text{ر}$

* رد الفعل المحصل ($\overline{\text{ر}'}$) : هو محصلة رد الفعل العمودى $\overline{\text{ر}}$ ، قوة الاحتكاك $\overline{\text{ح}}$

أى أن : $\text{ر}' = \sqrt{\text{ر}^2 + \text{ح}^2}$ ، فى حالة الاحتكاك النهائى $\text{ر}' = \text{ر}\sqrt{1 + \text{م}_{\text{س}}^2}$

* زاوية الاحتكاك (ل) :



هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى $\text{ح}_{\text{س}} = \text{م}_{\text{س}}\ \text{ر}$

ويكون : $\text{طا ل} = \frac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}}$ ولكن : $\frac{\text{ح}_{\text{س}}}{\text{ر}} = \text{م}_{\text{س}}$ $\therefore$ $\boxed{\text{م}_{\text{س}} = \text{طا ل}}$

أى أن : ظل زاوية الاحتكاك يساوى معامل الاحتكاك.

∴ رَ = ر √(١ + ظا² ل) = ر √(قا² (ل)) = ر قا (ل)

* قوة الاحتكاك الحركى : إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى (حـ ك) فى اتجاه مضاد لاتجاه الحركة ويكون $\boxed{\text{حـ ك = م ك ر}}$

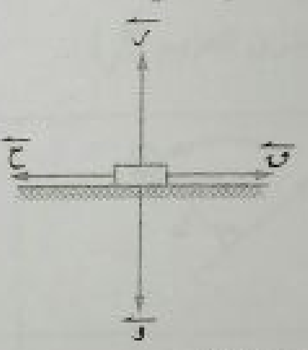
* معامل الاحتكاك الحركى (م ك) : هو النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

* معاملا الاحتكاك م س ، م ك يعتمدان على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما أو مساحة السطوح المتماسة.

* معامل الاحتكاك الحركى م ك < معامل الاحتكاك السكونى م س

* اتزان جسم على مستوٍ أفقى خشن :

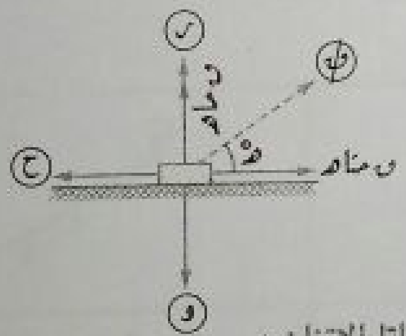
① إذا كانت القوة أفقية :



معادلتا الاتزان :

ق = حـ ، ر = و

② إذا كانت القوة مائلة بزاوية قياسها (هـ) :



معادلتا الاتزان :

ق جتاهـ = حـ ، ر + ق جاهـ = و

ملاحظة

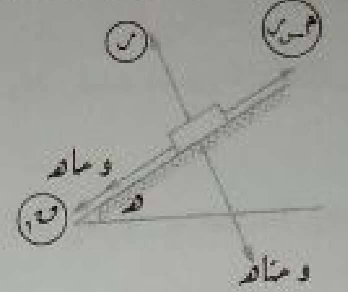
فى حالة أن الجسم على وشك الحركة فإن : حـ = حـ س = م س ر = ر ظا ل

* اتزان جسم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) :

① إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك (ل) = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى (هـ)

② إذا كان هـ < ل فإن : الجسم يستقر على المستوى (حيث لا يكون الاحتكاك نهائيًا) ويمكن جعل الاحتكاك نهائيًا بان نؤثر على الجسم بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى كما يلى :

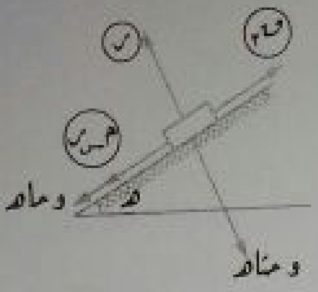
القوة $\overrightarrow{ق_1}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، $م_س$ ر = $ق_1$ + و جا هـ

القوة $\overrightarrow{ق_2}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى.



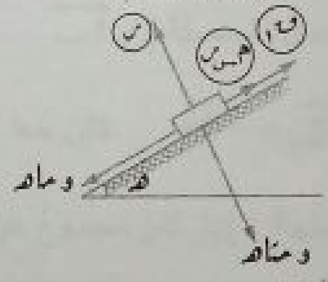
معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، $ق_2$ = $م_س$ ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل أقل من $ق_1$ أو لأعلى أقل من $ق_2$ فإن الجسم يظل ساكنًا.

(٢) إذا كان هـ > ل فإن : الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط ويمكن جعل الجسم فى حالة اتزان نهائى أى على وشك الحركة لأسفل أو لأعلى المستوى بالتأثير عليه بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى كما يلى :

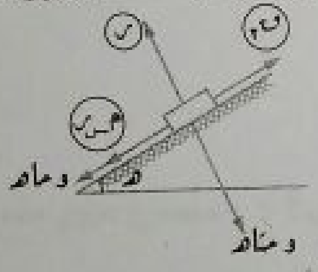
القوة $\overrightarrow{ق_1}$ عندها الجسم على وشك الانزلاق وهى أقل قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، $ق_1$ + $م_س$ ر = و جا هـ

القوة $\overrightarrow{ق_2}$ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى وهى أكبر قوة تحفظ توازن الجسم.



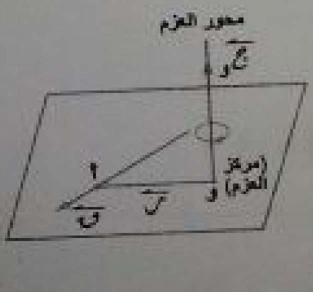
معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، $ق_2$ = $م_س$ ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى أكبر من $ق_1$ وأقل من $ق_2$ فإن الجسم يظل ساكنًا.

أى أن قيم ق التى تجعل الجسم فى حالة اتزان ∋ [$ق_1$ ، $ق_2$]

العزوم



* عزم قوة بالنسبة لنقطة :

هو كمية متجهة تحدد لنا مقدرة القوة على إحداث دوران فى الجسم وتتوقف على عاملين :

(١) معيار (أى مقدار) القوة.
(٢) بُعد خط عملها عن محور الدوران.

• متجه عزم قوة بالنسبة لنقطة :

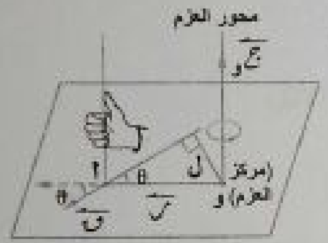
$\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ (متجه عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة و) = $\overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

حيث : $\overrightarrow{\text{ر}}$ متجه الموضع لأى نقطة أ على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة للنقطة (و)

• اتجاه متجه العزم :

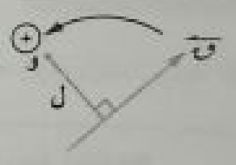
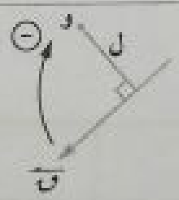
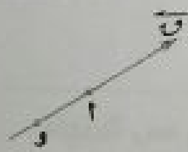
إذا كانت θ هى الزاوية الصغرى بين $\overrightarrow{\text{ر}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند رسمهما خارجين من نفس النقطة أو داخلين إلى نفس النقطة يكون متجه العزم $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ عموديًا على المستوى الذى يجمع $\overrightarrow{\text{ر}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى عند دوران المتجه $\overrightarrow{\text{ر}}$ نحو $\overrightarrow{\text{ق}}$ عبر الزاوية θ كالتالى : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = (\text{ر ق جا هـ})\ \overrightarrow{\text{ى}} = (\text{ق ل})\ \overrightarrow{\text{ى}}$

حيث ل طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ فى اتجاه متجه العزم $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$



• معيار عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة إلى و = $\| \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} \|$ = ق × ل

• القياس الجبرى للعزوم ($\text{ج}_{\text{و}}$) :

		
$\text{ج}_{\text{و}}$ = ق ل	$\text{ج}_{\text{و}}$ = − ق ل	$\text{ج}_{\text{و}}$ = صفر
اتجاه دوران $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول و ضد اتجاه حركة عقارب الساعة	اتجاه دوران $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول و مع اتجاه حركة عقارب الساعة	خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ يمر بـ و

• مبدأ العزوم (نظرية فارينون) : عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

• نظرية العزوم : مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

• النظرية العامة للعزوم : المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

ملاحظات

① وحدة معيار العزم = وحدة معيار القوة × وحدة الطول.

② ل (طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$) = $\dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$

③ عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$

④ إذا كان : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \vec{0}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ يمر بالنقطة و أ ، $\overrightarrow{\text{ق}} = \vec{0}$

⑤ عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى

وبصفة عامة :

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة يساوى صفر.

⑥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب

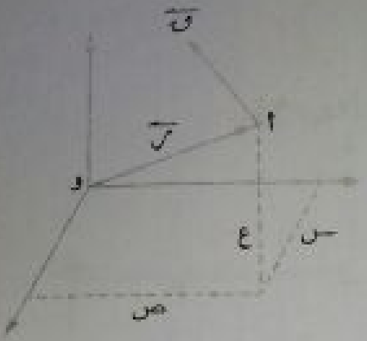
فإن خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

⑦ إذا كان : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{أ}} = -\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{ب}}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ينصف $\overline{\text{أب}}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{\text{أب}}$

⑧ لاحظ الفرق بين : $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ ، $\text{ج}_{\text{و}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|$

- $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$: متجه العزم حيث $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \begin{cases} (\text{ق ل})\ \overrightarrow{\text{ن}} & \text{إذا كان الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة} \\ (-\text{ق ل})\ \overrightarrow{\text{ن}} & \text{إذا كان الدوران فى نفس اتجاه دوران عقارب الساعة} \end{cases}$
- $\text{ج}_{\text{و}}$: القياس الجبرى لمتجه العزم حيث $\text{ج}_{\text{و}} = \text{ق} \times \text{ل}$ أو $-\text{ق} \times \text{ل}$ أو صفر
- $\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|$: معيار متجه العزم وهو كمية موجبة دائمًا حيث $\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\| = \|\overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}\| = |\text{ج}_{\text{و}}|$



$$\overline{\text{ج}}_{\text{و}} = \overline{\text{ر}} \times \overline{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص ق}_{\text{ع}} - \text{ع ق}_{\text{ص}})\overline{\text{س}} + (\text{ع ق}_{\text{س}} - \text{س ق}_{\text{ع}})\overline{\text{ص}} + (\text{س ق}_{\text{ص}} - \text{ص ق}_{\text{س}})\overline{\text{ع}}$$

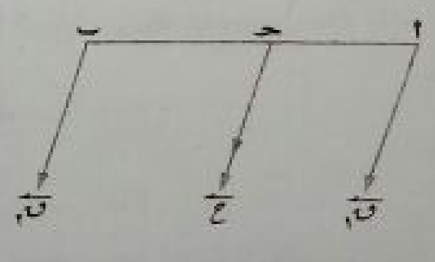
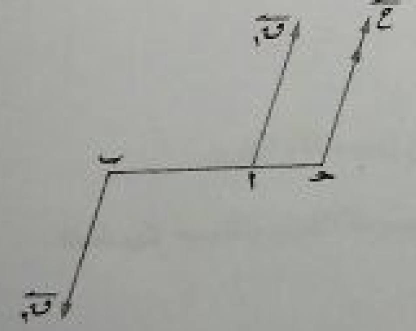
* طول العمود الساقط من (و) على خط عمل $\overline{\text{ق}}$ = $\dfrac{\|\overline{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overline{\text{ق}}\|}$

* إذا كانت القوة $\overline{\text{ق}}$ تؤثر فى نقطة أ فإن عزم القوة $\overline{\text{ق}}$ حول نقطة ب = $\overline{\text{ب أ}} \times \overline{\text{ق}}$

* ينعدم عزم قوة حول محور ← إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل
← إذا كانت القوة توازى المحور

القوى المتوازية

* محصلة قوتين متوازيتين مستويتين :

القوتان فى نفس الاتجاه	القوتان متضادتان فى الاتجاه
	
المحصلة (ح) = $\text{ق}_1 + \text{ق}_2$ [فى نفس اتجاه القوتين]	المحصلة (ح) = $\lvert \text{ق}_1 - \text{ق}_2 \rvert$ [فى اتجاه القوة الأكبر]
* نقطة تأثير المحصلة حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بحيث $\text{ق}_1 \times \text{أحـ} = \text{ق}_2 \times \text{ب حـ}$	* نقطة تأثير المحصلة حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بحيث $\text{ق}_1 \times \text{أحـ} = \text{ق}_2 \times \text{ب حـ}$

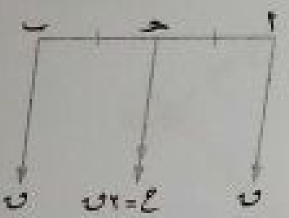
لتعيين محصلة عدة قوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، ..... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ مستوية متوازية فإن :

مقدار واتجاه المحصلة يتعين من العلاقة : $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + ... + \overrightarrow{ق_ن}$

، نقطة تأثير المحصلة تتعين باستخدام نظرية العزوم وهى :

> المجموع الجبرى لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلتها حول نفس النقطة.

ملاحظتان



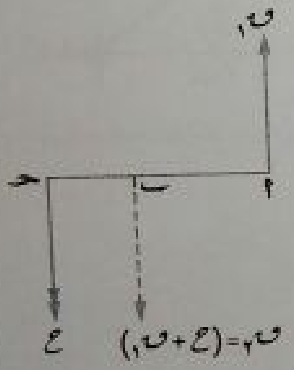
① إذا كانت القوتان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متحدتى الاتجاه

ومقدار كل منهما يساوى ق فإن :

- مقدار المحصلة : ح = ٢ ق
- اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة : حـ منتصف $\overline{أب}$

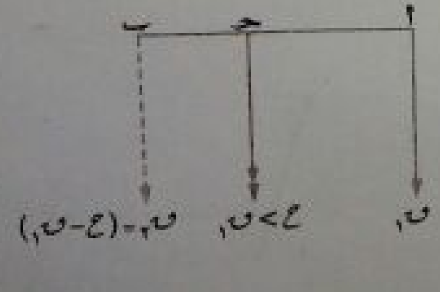
② إذا علمت إحدى قوتين متوازيتين $\overrightarrow{ق_1}$ وعُلمت محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ فلتعيين القوة الثانية $\overrightarrow{ق_2}$ نراعى ما يلى :

أولًا : إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين فإن :



* ق٢ = ح + ق١
* خط عمل $\overrightarrow{ق_2}$ يقع بين خطى عمل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$
* $\overrightarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ح}$

ثانيًا : إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه واحد ، ح > ق١ فإن :



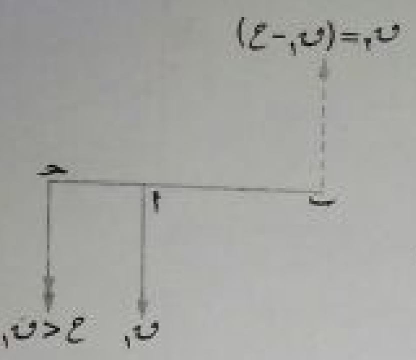
* ق٢ = ح − ق١
* خط عمل $\overrightarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ح}$ من ناحية $\overrightarrow{ح}$
* $\overrightarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overrightarrow{ح}$

ثالثًا : إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}$ في اتجاه واحد ، $\text{ح} > \text{ق}_1$ فإن :

* $\text{ق}_2 = \text{ق}_1 - \text{ح}$

* خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ يقع خارج خطي عمل $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}$ من ناحية $\overrightarrow{\text{ق}_1}$

* $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ في اتجاه مضاد لاتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_1}$



* إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوى في المقدار وتضاد في الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لهما نفس خط العمل.

* شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية :

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) = صفرًا.

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أية نقطة في مستويها = صفرًا.

الاتــزان العــام

* إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت هذه المجموعة متزنة.

* عكس النظرية يكون صحيحًا دائمًا :

أي أنه : إذا كانت مجموعة القوى متوازنة فإن :

- $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{0}$ أي ينعدم مجموع (محصلة) القوى.
- $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{0}$ أي ينعدم عزم مجموعة القوى بالنسبة لأي نقطة.

* الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى المستوية :

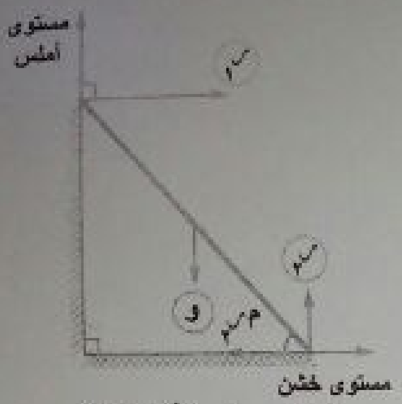
(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاهين متعامدين واقعين في مستويها

أي : $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة في مستويها.

أي أن : $\text{ج} = $ صفر

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

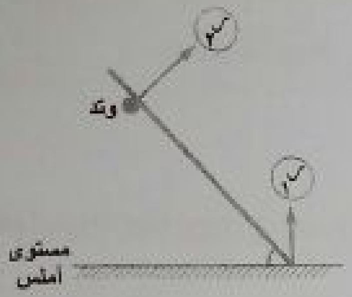


«قضيب على وشك الانزلاق»

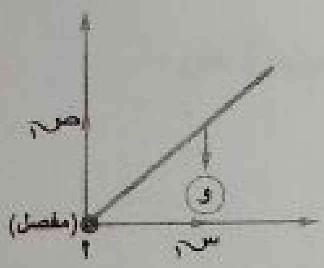
١) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عموديًا على المستوى.

٢) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك.

وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودى (ر) ، قوة الاحتكاك النهائى (م ر)



٣) إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخليه على (وتد – جسم آخر) كان رد الفعل عمودى على القضيب



٤) رد فعل المفصل يكون غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما :

س١ (فى اتجاه أس⃖)

، ص١ (فى اتجاه أص⃖)

الازدواج

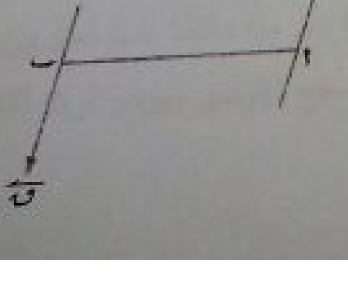
- الازدواج : هو نظام يتكون من قوتين :

١) متساويتين فى المعيار. ٢) متضادتين فى الاتجاه.

٣) لا يجمعهما خط عمل واحد.

- عزم الازدواج :

هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزم قوتيه وهو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى.



- ج⃗ = ب أ⃗ × ق⃗ = أ ب⃗ × (− ق⃗)

• معيار عزم الازدواج

$\| \overrightarrow{ج} \| = \text{ب أ} \times \text{ق} \times \text{جا هـ} = \text{ق} \times \text{ل}$

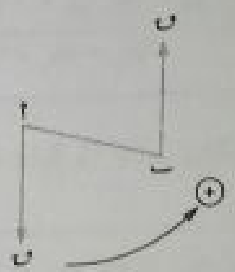
حيث : هـ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{ق}$

، ل (ذراع الازدواج) هو البعد العمودى

بين خطى عمل القوتين.

أى أن : معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج

• القياس الجبرى لعزم الازدواج :



$\text{ج} = \text{ق} \times \text{أ ب جا هـ} = \text{ق} \times \text{ل}$

$\text{ج} = -\text{ق} \times \text{أ ب جا هـ} = -\text{ق} \times \text{ل}$

• اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين :

يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

أى يكون الجسم متزنًا تحت تأثير الازدواجين $\overrightarrow{ج_1}$ ، $\overrightarrow{ج_2}$ إذا كان : $\overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2} = \vec{0}$ أى $\overrightarrow{ج_1} = -\overrightarrow{ج_2}$

• يتزن جسم تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية عزومها $\overrightarrow{ج_1}$ ، $\overrightarrow{ج_2}$ ، $\overrightarrow{ج_3}$ ، ... ، $\overrightarrow{ج_ن}$

إذا كان : $\overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2} + \overrightarrow{ج_3} + \ldots + \overrightarrow{ج_ن} = \vec{0}$

تكافؤ ازدواجين

• يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجها عزميهما.

أى أن : شرط تكافؤ ازدواجين $\overrightarrow{ج_1}$ ، $\overrightarrow{ج_2}$ هو : $\overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{ج_2}$

ملاحظات

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى ، وازدواج قياسه الجبرى = ج
فإن مجموعة القوى يجب أن تكون ازدواجًا قياسه الجبرى = (- ج)
أى أن الجسم لايمكن أن يتزن تحت تأثير قوة وازدواج

(٢) الازدواج لايكافئ إلا ازدواجًا آخر.

(٣) يتوقف تأثير الازدواج فى الأجسام المتماسكة على :

- معيار عزمه.
- المستوى الذى تقع فيه قوتاه.

ولذلك لا يتغير تأثير الازدواج على الجسم إذا نقل من موضع لآخر فى مستويه مادام محتفظًا بعزمه مقدارًا وإشارة أو حتى استبدل بازدواج آخر يكافئه ما دام يقع معه فى نفس المستوى.

* مجموع عدد محدود من الازدواجات المستوية (الازدواج المحصل) :

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات.

أى أن : $\overleftarrow{ج}$ (الازدواج المحصل) = $\overleftarrow{ج}_1 + \overleftarrow{ج}_2 + ... + \overleftarrow{ج}_ن$

* إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية = $\overleftarrow{ح}$ ومجموع عزومها حول نقطة فى مستويها $\overleftarrow{ج}$ كان :

(١) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{و}$ فإن المجموعة متزنة

(٢) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{و}$ فإن المجموعة تكافىء ازدواج معيار عزمه = $\| \overleftarrow{ج} \|$

* إذا أثرت ثلاث قوى مستوية (أو أكثر) فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث (أو مضلع مقفل) مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث (أو المضلع) × م حيث م ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$

* إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابتًا (لايساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

مركز الثقل

* مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة وحيدة من الفراغ (غير مركز الكرة الأرضية) يمر بها دائمًا خط عمل وزن هذا الجسم وتكون ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض ويرمز لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالرمز (م)

* خط عمل وزن الجسم يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وأيضًا يمركز بمركز الكرة الأرضية.

* مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتًا بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لايكون بالضرورة واقعًا على أحد جسيمات هذا الجسم.

* إذا كانت ك_1 ، ك_2 ، ك_3 ، ... ، $\text{ك}_\text{ن}$ هى كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overrightarrow{\text{ر}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}_2$ ، ... ، $\overrightarrow{\text{ر}}_\text{ن}$ هى متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل فإن متجه موضع مركز الثقل $\overrightarrow{\text{ر}}_\text{م}$ بالنسبة لنفس نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ر}}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}}_1 + \text{ك}_2 \overrightarrow{\text{ر}}_2 + \text{ك}_3 \overrightarrow{\text{ر}}_3 + \dots + \text{ك}_\text{ن} \overrightarrow{\text{ر}}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \dots + \text{ك}_\text{ن}}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات في اتجاه محورى الإحداثيات و $\overrightarrow{\text{س}}$ ، و $\overrightarrow{\text{ص}}$ كالتالى :

$$\text{س}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2 + \dots + \text{ك}_\text{ن} \text{س}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \dots + \text{ك}_\text{ن}} \quad ، \quad \text{ص}_\text{م} = \frac{\text{ك}_1 \text{ص}_1 + \text{ك}_2 \text{ص}_2 + \dots + \text{ك}_\text{ن} \text{ص}_\text{ن}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \dots + \text{ك}_\text{ن}}$$

* إذا كان جسمًا كتلته ك ومركز ثقله م ومتجه موضع مركز ثقله $\overrightarrow{\text{ر}}_\text{م}$ اقتطعنا منه جزءًا كتلته ك_1 ومركز ثقله م_1

ومتجه موضع مركز ثقله $\overrightarrow{\text{ر}}_1$ فإن متجه موضع الجزء المتبقى يتحدد من العلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ر}}_2 = \frac{\text{ك} \overrightarrow{\text{ر}}_\text{م} - \text{ك}_1 \overrightarrow{\text{ر}}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الإحداثيات و $\overrightarrow{\text{س}}$ ، و $\overrightarrow{\text{ص}}$ كالتالى :

$$\text{س}_2 = \frac{\text{ك} \text{س} - \text{ك}_1 \text{س}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1} \quad ، \quad \text{ص}_2 = \frac{\text{ك} \text{ص} - \text{ك}_1 \text{ص}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}$$

* الجسم المنتظم الكثافة : هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

ومنها نستنتج أن :

* إذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله.

* إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها.

* مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً يقع على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.
* إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وقع مركز ثقلها على خط المحور.
* إذا وجد مستوى تماثل هندسى لجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

* حالات خاصة لمركز الثقل :

١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازى الأضلاع أو أحد حالاته الخاصة (المربع - المستطيل - المعين) يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين)

٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث (هى نقطة تقسم المتوسط من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة)

٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة.

٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز السداسى.

٦) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.

٧) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع فى مركز الدائرة.

٨) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

٩) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

١٠) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى المستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.

١١) مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

١٢) مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

١٣) مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

ملاحظة هامة

مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.