المراجعة النهائية في الاستاتيكا

3 ث الجزء الاول

إعداد

م/ ناصر أبوزيد

مكتبة ريناد وأمين 01115156232

قوانين هامة

١) معامل الاصتكاك السكوني (م س) > معامل الاصتكاك الحركي (م ك)

٢) ∴ ق > ق س ، ق > م س ر ، ق = ق س = م س ر (اصتكاك زاتي)

٣) ر = رد الفعل العمودي

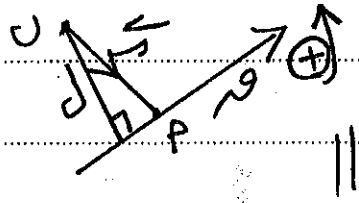
٤) م = ظا ل حيث ل الزاوية الاصتكاك

وعند الاصتكاك الزاتي ل = هـ (زاوية الميل الأقصى)

---

٥) $\overleftarrow{ع_ن} = \overleftarrow{ت} \times \overleftarrow{ق}$ حيث $\overleftarrow{ت} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$

ق تحرك بنقطة أ



٦) $ع_ن = ق \times ك$

٧) $\frac{||ع_ن||}{||ق||}$ = ويكون ل (زاوية العزم)

٨) عزم قوة حول نقطة على خط عمل = صفر

٩) مجموع عزوم عدة قوى متلاقية في نقطة بالنسبة لأي نقطة يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة

١٠) إذا كان $ع_م = ع_ن$ ← خط عمل ق // $\overleftrightarrow{أب}$

١١) إذا كان $ع_م = -ع_ن$ ← خط عمل ق ينصف $\overline{أب}$

★ مركبة العزم حول محور س

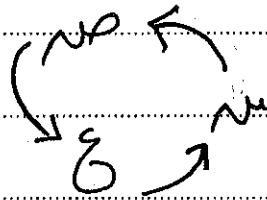
= ص ق ع − ع ق ص

★ مركبة العزم حول محور ص

= ع ق س − س ق ع

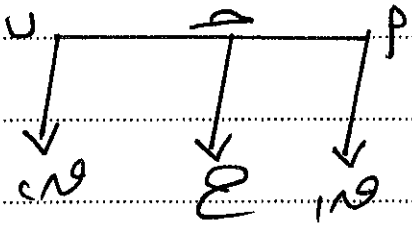
★ مركبة العزم حول محور ع

= س ق ص − ص ق س



(١٣) * ع = ق١ + ق٢

القوى تابعة في اتجاه واحد



* ق١ × أح = ق٢ × ب ح

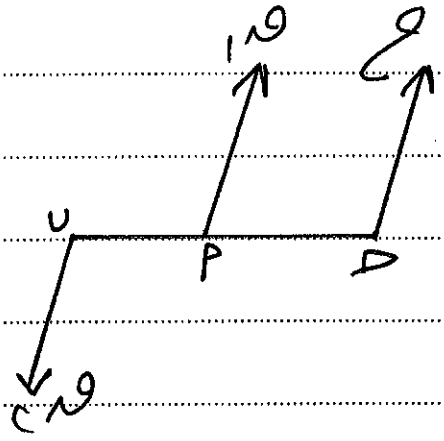
* ع / ب أ = ق١ / ب ح = ق٢ / أ ح

(١٢) القوى تابعة متضادة تابعة ق١ ، ق٢

* ع = ق١ − ق٢

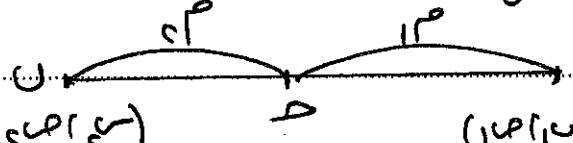
* ق١ × أ ح = ق٢ × ب ح

* ع / ب أ = ق١ / ب ح = ق٢ / أ ح



(١٤) مجموع عزوم عدد من القوى المتوازية حول نقطة تساوي عزم محصلة حول نفس النقطة

(١٥) حافظ القسيم ا ث



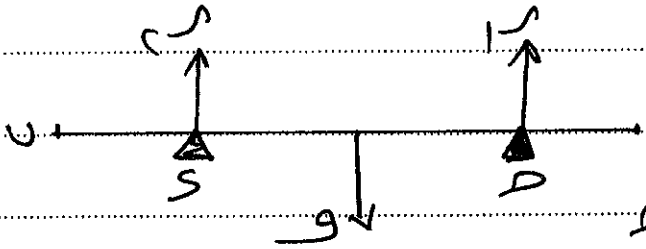
* إحداثي ح = ((م١ س١ + م٢ س٢) / (م١ + م٢) ، (م١ ص١ + م٢ ص٢) / (م١ + م٢))

(١٦) إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير عدة قوى متوازية مستوية

* مجموع المركبات الرأسية لهذه القوى = صفر (ع = صفر)

* مجموع المركبات الأفقية لعزوم هذه القوى حول أي نقطة = صفر

(١٧) عند الاتزان



* ك١ + ك٢ = و

(١٨) إذا كان الجسم على وشك الدوران حول أ فإن ك = صفر

والعكس إذا كان الجسم على وشك الدوران حول ب فإن ك١ = صفر

تمارين

(١) تنعدم قوى الاحتكاك بكل من معامل الاحتكاك صفر من الطوح

(٢) عندما تصل قوة الاحتكاك لأكبر قيمتها العظمى فإنه يكون

(٣) محصلة قوة رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك الكلي تساوي

(٤) إذا كان معامل الاحتكاك الكلي بين كتلة مقدارها ٤ كجم وسطح الأرض يساوي ٠,٥ فإن مقدار القوة الأفقية التي تؤثر على الكتلة وتجعلها على وشك الحركة تساوي

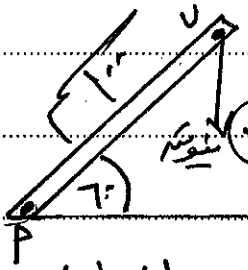
(٥) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقي خشن فكان مقدار قوة الاحتكاك الكلي ٤ نيوتن فإن معامل الاحتكاك الكلي =

(٦) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن وبعدها عن P مسافة ٨ سم فإن مقدار عزم القوة حول P = نيوتن . سم

(٧) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوي صفراً فإن

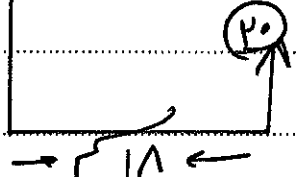
(٨) إذا كان عزم القوة ثابتاً فإن مقدار القوة يتناسب عكسياً مع

(٩) AP قضيب طوله ٢٠ سم يتصل عند P بمفصل أثرت قوة رأسية عند B مقدارها ٧٠ نيوتن فإن مقدار عزم القوة حول P يساوي نيوتن . سم



(١٠) قوة في مستوى تؤثر من نقطة فتجه نحو ضعف البعد النقطة الأصل فإن مقدار عزم القوة حول نقطة الأصل =

(١١) في الشكل المقابل مقدار عزم القوة حول نقطة الأصل و =

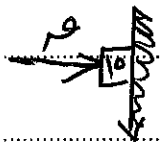


(١٢) قوتان متوازيتان ومتجاهتين فمقدار محصلتهما ١٥ + ١٠ نيوتن تؤثر في نقطة ما بين P و Q حيث PQ = ٢٥ سم فإن البعد تؤثر من Q حيث PQ =

(١٣) مجموع عزوم عدة قوى متوازية ومستوية حول نقطة =

(١٤) قوتان متوازيتان وعزم نقس الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٦ نيوتن وبعد بينهما ٣٩ سم فإن محصلتهما تبعد عن ٥ بمقدار ٢٦ سم

(١٥) مقدار أكبر قوة أفقية تؤثر على لوح كتلته ١٥ كجم حتى يظل ١/٣ طوله خارج حافة رأسية معامل الاحتكاك الكائن بينه وبينها $\frac{1}{5}$ هو ٥ كجم



(١٦) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تكون مع $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AD}$ متوازي أضلاع مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن عزم القوة بالنسبة لمركز المربع = صفر

(١٧) إذا كانت $\overrightarrow{ق_1} // \overrightarrow{ق_2}$ ، $ق_1 = س - ٢ص$ ، $\overrightarrow{ق_2} // ٤س - ٥ص$ فإن $ق_2 = ١١$

فإن $ع =$ ـــــ

(١٨) معامل الاحتكاك الكوني هو النسبة بين ـــــ

(١٩) إذا أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٢س - ص + ٥ع$ في P ، فإنه موضعها $\overrightarrow{ق} = س - ٢ع$ فإن عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة $ب$ فإنه موضعها $ص + ٢ع$

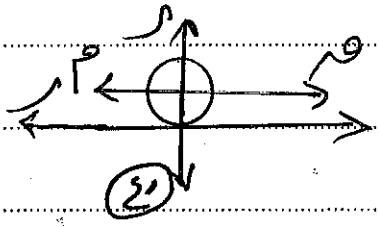
(٢٠) قوتان متوازيتان محصلتهما ١٣ نيوتن فإن مقدار إحداهما ضعف الأخرى ومقدار محصلتهما ١٣ نيوتن فإن مقدار أصغرهما =

إجابة

(١) بالساعة (٢) على مسلك الحركة (٣) رد الفعل أكبر

(٤) $ر = ٤٠$ ، $ق = م ر$

$\therefore ق = ٤٥ \times ٤٠ = ١٨٠$ كجم



(٥) $ر = ٦$ نيوتن

$م \times ر = ٤ \Leftarrow م \times ٦ = ٤ \Leftarrow م = \frac{٢}{٣}$

(٦) $ع م = ق \times ل = ٨ \times ٥٠ = ٤٠٠$ نيوتن سم

(٧) خط عمل القوة يمر بنقطة الارتكاز

(٨) بعد النقطة عن خط عمل القوة $ع$ حيث $ع = ق \times ل \Leftarrow ق = \frac{ع}{ل}$

(٩) $ق_ب = ٣٠ نيوتن = ق_أ \Leftarrow ل = ق_ب \sin ٦٠$

$\therefore ل = ١ \times \frac{١}{٢} \Rightarrow ل = \frac{١}{٢} م$

$\therefore ع_م = -ق_م \times ل = -٧٠ \times \frac{١}{٢} = -٣٥$

$\therefore$ مقدار العزم = ٣٥ نيوتن.م

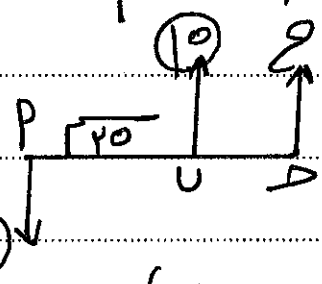
(١٠) $ق_١ = (٠,٤) ، ق_٢ = (٠,٥)$

$ع_و = ق_٢ \times ق_١ = (٠,٥) \times (٠,٤)$

$= ٥ \times ٤ - ٠ \times ٠ = ٢٠ ع \Leftarrow$

(١١) $ع = ٣٠ \times ١٨ = ٥٤٠$ نيوتن.سم

(١٢) $ع = ١٥ - ١٠ = ٥$



$\therefore \frac{ع}{٢٥} = \frac{١٠}{ب د} \Leftarrow ب د = ٧٠ سم$

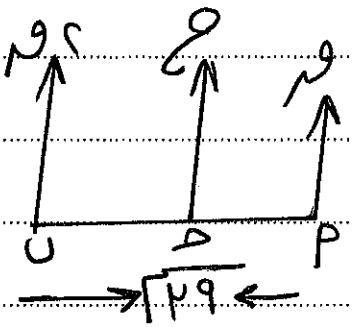
$\Leftarrow ق د = ١٠٥ سم$

ط م ض $١٠ \times ق د = ١٥ (ق د - ٢٥)$

$\therefore ١٠ ق د = ١٥ ق د - ٥٢٥ \Leftarrow ق د = ١٠٥ سم$

(١٣) عزم المحصلة حول نقطة

(١٤) $ع = ق_م + ٢ق_م = ٢ق_م$

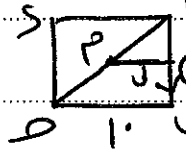


$\therefore \frac{ع}{٣٩} = \frac{٢ق_م}{ق د} \Leftarrow \frac{ق_م}{ق د} = \frac{٢ق_م}{٢٩}$

$\Leftarrow ق د = \frac{٢٩ \times ٢}{٢} = ٢٦ سم$

(١٥) $ق_م = و \Leftarrow ق_م = ٥ \times ١٥ = ٧٥$ نيوتن

(١٦) $ل = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$



(١٧) $\therefore |ع_م| = |-٧٠ \times ٥| = |-٣٥٠| = ٣٥٠$

$ق_١ ق_٢ = ٧ + ٤ = ١١ ، ق_١ ق_٢ = ٧٥$

$\therefore ٧٥ = ١١ \times ٤ ق \Leftarrow ق = \frac{١٥}{٤}$

$\therefore ق_م = ق (س - ٢ س)$

(١٨) $\overline{ع_ن} = \overline{م_ن} \times \overline{ك_ن} \leftarrow \overline{ك_ن} = \overline{ع_ن}$

أى أن $\overline{م_ن}$ = المتجه الذى يحدد الاحتكاك السكونى وردّ الفعل العمودى

(١٩) $\overline{ك} = \overline{ف} - \overline{ب} = (١ ، ٦ ، ٠) - (-٢ ، ٦ ، ١) = (٣ ، ٠ ، -١)$

$= (٦ - ٦ ، ١ - ١ ، ٦ - ٦)$

$\therefore \overline{ع_ن} = \overline{ك} \times \overline{ق}$

$$= \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ١ & -١ & -٦ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$= \overline{س}(-٥ - ٦) - \overline{ص}(٥ + ١٢) + \overline{ع}(-١ + ٢)$

$\therefore \overline{ع_ن} = -١١ \overline{س} - ١٧ \overline{ص} + \overline{ع}$

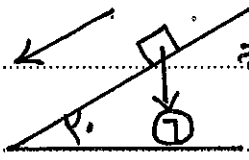
(٢٠) يقصر ابن السوسنية في ٦ ث ٢ ق هـ وهما فى اتجاه واحد

$ع = ق_١ + ق_٢ \leftarrow ٢١ = ٣ ق$

$\therefore ق = \frac{٢١}{٢} = ١٠\frac{١}{٢}$ نيوتن

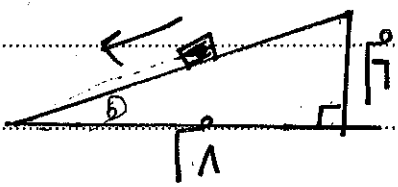
السؤال الثانى اختر

(١) في الشكل المقابل إذا كان الجسم على وشك الانزلاق على فإن قوة الاحتكاك الناشئ =



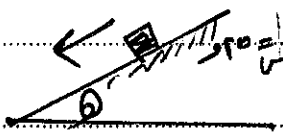
(أ) ٢ (ب) ٢٧٢ (ج) ٢٧٢ (د) ٩

(٢) في الشكل المقابل الجسم على وشك الانزلاق على فإن زاوية الاحتكاك السكونى =



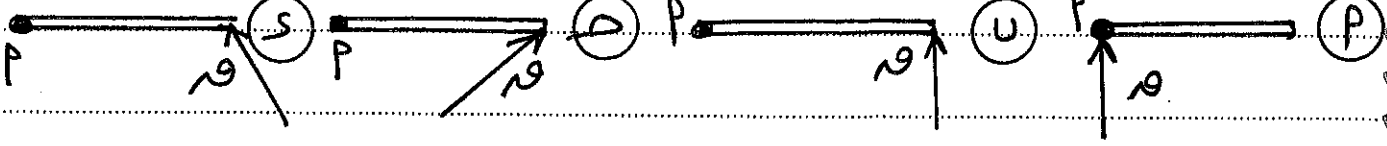
(أ) ١٢ و ٥٢ (ب) ٤١ و ٤٩° (ج) ٥٢ و ٧٥° (د) ٢٦ و ١٨ و ٢٧°

(٣) الجسم على وشك الانزلاق على المستوى المائل فإن $ظا\theta$ =



(أ) ٨٧ و ٧٥° (ب) ٤٨ و ١٤° (ج) ٥٢ و ٧٥° (د) ٠٤ و ١٤°

(٤) الشكل المقابل يمثل بابًا متصل بمفصل عند م أثرت عليه قوة ق
في كل من الحالات الآتية تكون القوة ق أكبر عزم عند م



(٥) إذا كان عزم ق = ٠ حول أ فإن ق = عزم حول أ فإن ق =
أ) ق ⊥ أب ب) ق // أب جـ) ق تصنع أب د) لا يوجد علاقة بين أب ، ق

(٦) جيب تمام الزاوية المحصورة بين (-٢، ٦، ٢) ، (١، ٢، -١) =
أ) $\frac{٢}{٧}$ ب) $\frac{٤}{٧}$ جـ) $\frac{٤}{٧\sqrt{٥}}$ د) $\frac{١}{٧\sqrt{٥}}$

(٧) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢، ٦، -١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٣، ٦) فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ =
أ) ٧ ب) ٧٥ جـ) ٤ د) ٨

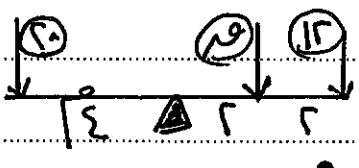
(٨) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٦، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٢، ٢) فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ =
أ) (٤، ٦، -٦) ب) (-٤، -٦، ٦) جـ) (-٤، ٦، -٦) د) ٠

(٩) إذا كان ق = (٢، -٢، ٤) تؤثر في النقطة (١، ١، ١)
فإن مركبة عزم ق حول محور س هو =
أ) ٧ ب) -٢ جـ) -٥ د) ٢

(١٠) قوتان متوازيتان في اتجاه ومتضادتين في الاتجاه مقدارهما ١٢، ٧ نيوتن
فإن مقدار محصلتهما = نيوتن
أ) ١٩ ب) ١٢ جـ) ٧ د) ٥

(١١) قوتان متوازيتان في اتجاه ومقدارهما ٧، ١٠ نيوتن
تؤثر في أ، ب حيث أب = ١٥ سم فإذا كانت محصلتهما
تؤثر في جـ فإن أجـ =
أ) ٢٠ سم ب) ٢٧ سم جـ) ٢١ سم د) ١٢ سم

(١٢) في الشكل المقابل عمل قضيب منتظم أطوال أذرعه فإن ق =
أ) ٨ ب) ١٦ جـ) ٢ د) ٤



(١٢) $\vec{ق_1} = 2\vec{س} - 5\vec{ص}$ تؤثر في م (-١، ١) فإن عزم $\vec{و}$ =

(أ) $-2\vec{ع}$ (ب) $2\vec{ع}$ (ج) $8\vec{ع}$ (د) $-8\vec{ع}$

(١٤) المتجه مجموع من القوى المستوية فإن مجموع عزوم حول أي نقطة =

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ثابت غير الصفر (د) محصلة هذه القوى

(١٥) زاوية الاحتكاك هي

(أ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودي ورد الفعل الكلي

(ب) " " " قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل الكلي

(ج) النسبة بين قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودي

(١٦) في الشكل المقابل: $\vec{ق}$ تؤثر في طرف قضيب فإن قياس θ الذي تولد أكبر عزم حول ب هو

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٢٠°

(١٧) قوتان متوازيتان ومتضادتان مقدار أحدهما ٧ نيوتن ومحصلتهما ١٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ـــــ نيوتن

(أ) ٢ (ب) ١٧ (ج) ٢٧ (د) ٦

(١٨) معامل الاحتكاك يتوقف على :

(أ) مساحة سطح تلامس الجسمين (ب) شكل الجسمين

(ج) طبيعة السطحين (د) كل ما سبق

(١٩) في الشكل المقابل عديم المقاومة

يرتكز على حامل عند منتصفه وضع عليه جسم وزنه ١٠ نيوتن

الصورة الآتية تحدث تغيراً للقضيب

(أ) $\vec{ق_1}$ = ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين م

(ب) $\vec{ق_1}$ = ١٠ " لأسفل " " ٢٠ سم " " "

(ج) $\vec{ق_1}$ = ٢٠ " لأعلى " " ٥ سم على يسار م

(د) $\vec{ق_1}$ = ٢٠ " لأسفل " " ٥ سم " " "

(١) $ر = ٦ جا ٢٠$

$ر = ٢٫٠٥٦$

$م س ر = ٦ جا ٢٠$

$= ٢٫٠٥٦ \times \frac{١}{٣٧} = ٢$

(٢) على سطح المستوى المائل $ه = ل$

$\therefore طال = طاه = \frac{٧}{٨}$

$\therefore ق(\hat{ا}) = ٨٧٫٦^\circ$

(٣) $طاه = طال = ٢٫٥ = م س$

$\therefore ق(\hat{ا}) = ٤٠٫١^\circ$

(٤) $ب \; \overrightarrow{ب ل} > ل \; طاه$

(٥) خط عمل $\overrightarrow{ق ه}$ // $\overrightarrow{ب ا}$

(٦) $\sqrt{٤ + ٤ + ١} = ٣$

$\therefore$ جيوب التمام للاتجاه

$ب \left(\frac{٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣} \right)$

(٧) $\overrightarrow{ا ب} \cdot \overrightarrow{ب ج} = ٢ \times ٢ + ٣ \times (-١)$

$= ٤ - ٦ = ص$

(٨)
$$\overrightarrow{ا ب} \times \overrightarrow{ب ج} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$= \overrightarrow{س}(٢ - ٦) - \overrightarrow{ص}(-١ - ٦) + \overrightarrow{ع}(-٢ - ٤)$

$= -٤ \overrightarrow{س} + ٧ \overrightarrow{ص} - ٦ \overrightarrow{ع}$

(٩) صه $ق_ع$ − ع $ق_ص$

$= ١ \times ٤ - ١ \times -٢ =$ ٦

(١٠) $ع = ١٢ - ٧ =$ ٥

(١١) $ع = ١٠ + ٧$

$ع = ١٧$

$\frac{ع}{٥١} = \frac{١٠}{ص ف}$ ← ١٥ سم

$\therefore ص ف = \frac{١٠ \times ١٥}{١٧} = ٣٠$ سم

(١٢)

$ع ص =$ صفر

$-١٢ \times ٤ - ٢ \times ه + ٢٠ \times ٢ =$ صفر

$\therefore ٢ ه = ٣٢$

$\Leftarrow$ ه = ١٦

(١٣) $ع_و = (-١٫٦) \times (٢) - ٥)$

$= (-١ \times ٢ - ٥ \times ١) ع$

$= ٢ ع$

(١٤) صفر

(١٥) $\overrightarrow{ا ب} \perp \overrightarrow{ب ج}$

(١٦) $٩٠ \; ك ك \; ط ٩٠ = ١$

(١٧) $١٠ = ه - ٧$

$\Leftarrow$ ه = ١٧ نيوتن

(١٨) طبيعة المحيط

(١٩) ⓐ ه = ١٠ كل على بعد ٢٠ سم

$ك ك = ١٠ \times ٢٠ - ٢٠ \times ١٠ =$ صفر

$ع م =$ صفر

أصلة

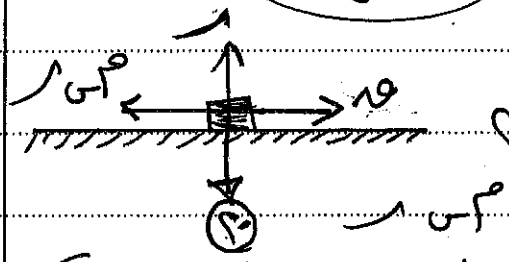
(١) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن فإذا كان معامل الاحتكاك الكوني بين الجسم والمستوى $\frac{1}{4}$ أوجد

(أ) مقدار القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة

(ب) القوة التي تميل على المستوى بزاوية قياسها ٢٠° وتجعل الجسم على وشك الحركة

الحل

(أ)

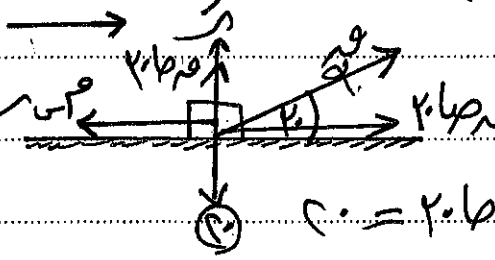


$\rightarrow$ ر = ٢٠

$\uparrow$ ح ص = ٢٠

ح = $\frac{1}{4}$ × ٢٠ = ٥ نيوتن

(ب)



$\uparrow$ ر + ح ص ٢٠ = ٢٠

$\leftarrow$ ر + $\frac{1}{4}$ ح = ٢٠

$\leftarrow$ ر = ٢٠ − $\frac{1}{4}$ ح (١)

$\uparrow$ ح ص ٢٠ = $\frac{1}{4}$ ر

$\leftarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ح = $\frac{1}{4}$ (٢٠ − $\frac{1}{4}$ ح)

$\leftarrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ح = ٥ − $\frac{1}{16}$ ح

$\leftarrow$ ح = $\frac{٢٠}{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

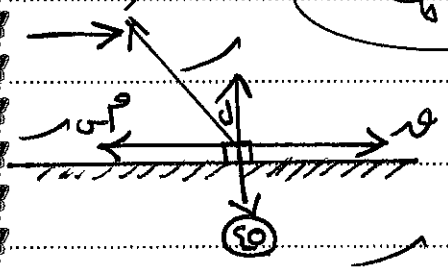
مستوحة

(٢) جسم وزنه ٤٥ نيوتن موضوع على مستوى أفقي خشن معامل الاحتكاك بينه وبين الجسم $\frac{\sqrt{3}}{3}$ أوجد

(أ) مقدار أقل قوة تكفي لتحريك الجسم على المستوى

(ب) مقدار واتجاه رد الفعل

الحل



ر = ٤٥

ح ص = ح س ر

ق = ح ص = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ × ٤٥ = ١٥ $\sqrt{3}$ نيوتن

(ب)

ر = $\sqrt{\text{ح س}^2 + 1}$ ر

= $\sqrt{\frac{1}{3} + 1}$ × ٤٥ = ٣٠ نيوتن

اتجاه رد الفعل هو عكس ل

$\therefore$ ظا ل = ح س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ق (ل) = ٣٠°

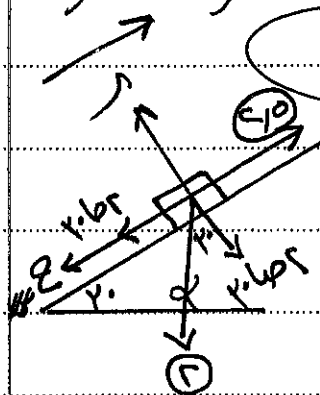
تصور ثم

وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوى أفقي خشن ومعامل احتكاكه عكس اتجاه رد الفعل بزاوية قياسها ٦٠° أوجد أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إذا علم أن القوة تميل على الأفقي بزاوية ٣٠°

الجواب ٧٫٥

(٢) وضع جسم وزنه ٢ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٢٠° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي ٠٫٩ والمؤثر في الجسم قوة تعمل في خط أكبر ميل للمستوى وإلى أعلى ومقدارها ٥٫٠ نيوتن فإذا كان الجسم موزناً عليه قوة الاحتكاك وبين هل إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

الحل



∴ ر = ٢ جتا ٢٠°

∴ ر = ٢ ✓

∴ ٥٫٠ = ٢ جا ٢٠° + ح

∴ ٥٫٠ = ١٫٨ + ح

∴ ح = ١٫٣ ←

∴ ح = م س ر = ٠٫٩ × ٢ ✓

= ٢٫٧ / ١٠ = ١٫٣٥

∴ ح < م س ر

∴ لا احتكاك غير نهائي

∴ الجسم ليس على وشك الحركة

(٤) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة مقدارها خط أكبر ميل لمستوى إلى أعلى فإذا كان مقدارها ١٢ نيوتن وتجعله على وشك الحركة لأعلى فإذا كان مقدارها ٨ نيوتن وتجعله على وشك الحركة لأسفل

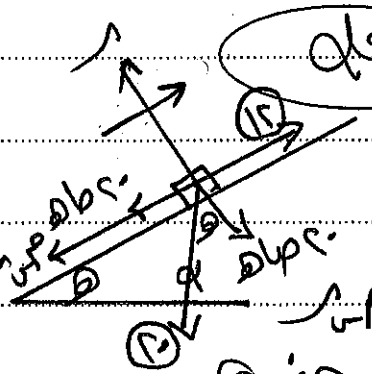
أوجد

(١) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي

(٢) معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم والمستوى

الحل

(١) الحالة



∴ ر = ٢٠ جتا هـ

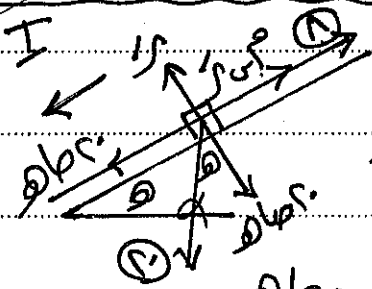
∴ ١٢ = ٢٠ جا هـ + م س ر

بالتعويض من ① في ②

∴ ١٢ = ٢٠ جا هـ + م س ٢٠ جتا هـ

I

(٢) الحالة



ر = ٢٠ جتا هـ

∴ ٨ + م س ر = ٢٠ جا هـ

∴ ٨ + م س ٢٠ جتا هـ = ٢٠ جا هـ

II

من I ، II بالطرح

∴ ١٢ − ٨ = ٢٠ جا هـ − ٢٠ جا هـ

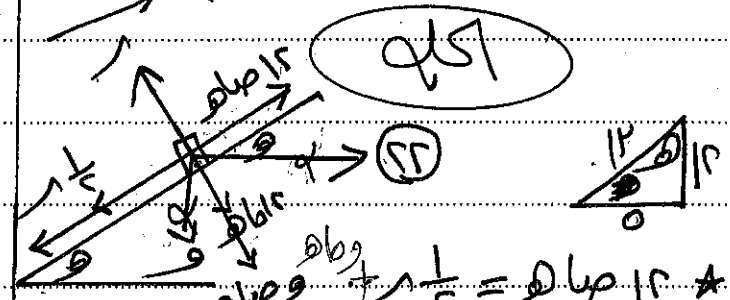
∴ ٤ = ٤٠ جا هـ

∴ جا هـ = ١/١٠ ← هـ = ٣٠°

بالتعويض في I ∴ م س = ٢٧ / ١٠

(٥) وضع جسم وزنه و ينتهي على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{5}{13}$ وربط الجسم بخيط خفيف مرن يوازي خط أكبر ميل على المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى هو $\frac{1}{2}$ أوجد مقدار وتر الجسم و

الحل



$\therefore$ ر = $\frac{\text{ق ن}}{\mu}$ = $\frac{\text{ق ن}}{\frac{1}{2}}$ = ق ن × $\frac{12}{5}$

$\therefore$ ق ن = $\frac{5}{12}$ × ر

$\therefore$ ق ن + و جتاه = و صاه + ر

$\therefore$ $\frac{5}{12}$ ر + و × $\frac{12}{13}$ = و × $\frac{5}{13}$ + ر

بالضرب × ١٢

٥ ر + ١٢ و = ٥ و + ١٣ ر

٨ ر = ٤ و

$\therefore$ ر = $\frac{1}{2}$ و

$\therefore$ ق ن = $\frac{5}{12}$ × $\frac{1}{2}$ و = $\frac{5}{24}$ و

$\therefore$ $\frac{5}{24}$ و + و × $\frac{12}{13}$ = و × $\frac{5}{13}$ + $\frac{1}{2}$ و

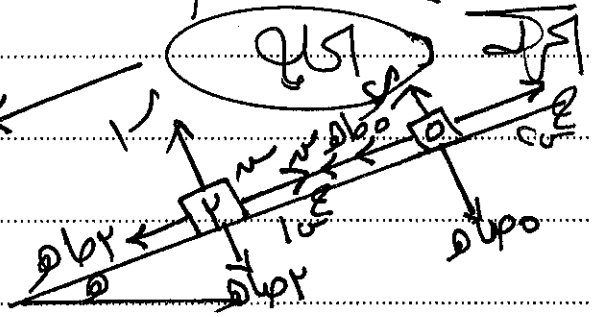
$\therefore$ $\frac{5}{24}$ و + $\frac{12}{13}$ و = $\frac{5}{13}$ و + $\frac{1}{2}$ و

$\therefore$ $\frac{289}{312}$ و = $\frac{169}{312}$ و

$\therefore$ و = ١٩ نيوتن

(٦) كتلتا م ٣ كجم متصلان بخيط خفيف ومرن موضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك بين م ١ والمستوى $\frac{1}{4}$ وبين م ٢ والمستوى $\frac{2}{5}$ بين أن الجسيم م ١ يوشك أن ينزلق لأعلى المستوى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة لأعلى المستوى أوجد مقدار وتر الخيط

الحل



بفرض الجسم م ١ يوشك أن يتحرك لأعلى

ر = ٢ صاه

ق ن = ٢ صاه

ق ن = ر - ٢ جتاه

ر - ٢ جتاه = $\frac{2}{5}$ × ٢ صاه

ر = ٢ جتاه + $\frac{4}{5}$ صاه

ر = ٢ صاه + ق ن

ق ن = ر - ٢ صاه

الجسم الثاني

ر = ٥ صاه

ر = ٥ صاه + ق ن

ق ن = ر - ٥ صاه

ق ن = ٢ صاه - ٢ جتاه

$\therefore$ ٢ صاه - ٢ جتاه = ٥ صاه - ٥ جتاه

$\therefore$ ٣ جتاه = ٣ صاه

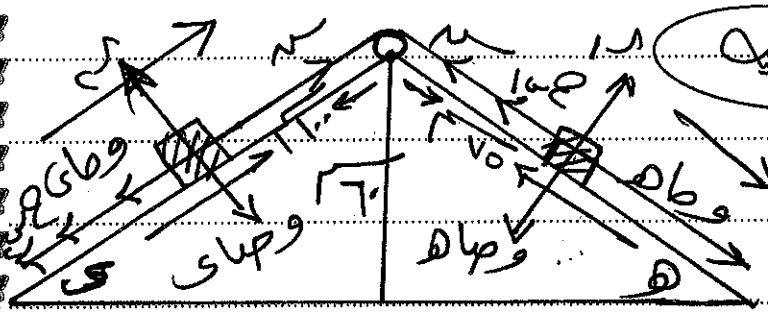
$\therefore$ ظاه = $\frac{3}{3}$ = ١

$\therefore$ ه = ٤٥°

$\therefore$ ر = ٢ صا ٤٥ = ٢ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$ نيوتن

سبحانك اللهم وبحمدك
سبحانك اللهم العظيم

(٧) جسم يا مادي متماثل متجانس ارتفاعه عمودي = ٦٠ سم وطول أحد أسطحه ٧٥ سم وطول الآخر ١٠٠ سم وضع جسم متماثل الكتلة ويتصل بجسم بخيط مرن يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة السطح فإذا كانت المجموعة على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك



الحل

معامل الاحتكاك متساوي مس

طاه = ٦٠/٧٥ = ٤/٥

طاي = ٦٠/١٠٠ = ٢/٥

← طاه > طاي ← ق(هـ) > ق(ي)

∴ و طاه > و طاي ∴ الجسم الموضوع على السطح ٧٥ سم يكون على وشك الانزلاق عند أسفل وبسبب الأكبر

★ الجسم الأول

★ ر١ = و طاه = و × ٢/٥ = ٢/٥ و

★ و طاه = ح ب + ء ← ٤/٥ و = م س ر١ + ء

← ٤/٥ و = ٢/٥ و + ء

← ء = ٤/٥ و − ٢/٥ و م س ← I

★ الجسم الثاني

★ ر٢ = و طاي = ٤/٥ و

★ ء = و طاي + ح ب

∴ ء = ٢/٥ و + م س × ٤/٥ و ← II

I = II

∴ ٤/٥ و − ٢/٥ و م س = ٢/٥ و + م س × ٤/٥ و

بالضرب × ٥ و ← ٤ − ٢ م س = ٢ + ٤ م س

← ٦ م س = ١ ← م س = ١/٦

العزوم

(١) إذا كانت
$\vec{ق} = س\vec{ت} - ٢ص\vec{ت}$ تؤثر في
م (٣، ٢) أوجد

(أ) عزم القوة $\vec{ق}$ بالنسبة لـ ب (١، ٢)

(ب) طول العمود الساقط من النقطة ب
على خط عمل القوة

الحل

$\vec{أب} = \vec{م} - \vec{ب}$
$= (٣، ٢) - (١، ٢)$
$\vec{أب} = (٢، ٠)$

* (أ) $ع_ب = \vec{أب} \times \vec{ق}$
$= (٢، ٠) \times (-١، -٢)$
$ع_ب = (صفر - ٢) ع$
$= -٢ ع$

(ب) $\| ع_ب \| = ٢$ وحدة عزم
$\| \vec{ق} \| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$ ق
$\therefore ل = \frac{\| ع_ب \|}{\| \vec{ق} \|} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ م
وحدة طول

(٢)

ع أ = صفر لأن خط العمل
يمر بـ أ

العزم الأكبر لهذه القوة
يمر بالنقطة م

الحل

١٠٠ نيوتن
٤٠
٤ سم
م
٤ سم

بتحليل القوة إلى مركبتيها
١٠٠ صا ٤٠ ، ١٠٠ جا ٤٠

وبأخذ تطريح عزوم (عبدأ العزوم)
ع م = - ١٠٠ صا ٤٠ × ٤ سم + ١٠٠ جا ٤٠ × ٤ سم
ع م = - ٧٦,٦ نيوتن سم

ملاحظة

* هناك عزوم بسبب الضارب الأكبر ومضاير العزوم ؟؟
* تحليل طا أو مربوس التحليل عمر طريقة إيجاد ذراع العزوم

(٣) تؤثر القوى
$\vec{ق_١} = ٢س\vec{ت} - ص\vec{ت}$
$\vec{ق_٢} = -٣س\vec{ت} - ٢ص\vec{ت}$
من النقطة م (-١، ٤) أوجد
مجموع عزوم القوى حول ب
(١، ١) ثم أوجد عزم محصلة
هذه القوى حول ب
ماذا تلاحظ ؟؟

الحل

$\overrightarrow{ك ن} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ت}$

$= (-٤، ١) - (١، ١)$

$\overrightarrow{ك} = (-٥، ٢)$

* $ج_١ = \overrightarrow{ك} \times \overrightarrow{ف_١}$

$= (٢ ، ٢-) \times (-٥، ٢)$

$= (-٩ ، ٦) ج$

$= -٧ ج$

* $ج_٢ = \overrightarrow{ك} \times \overrightarrow{ف_٢}$

$= (-٣ ، ١-) \times (-٥، ٢)$

$= (٦ + ٦) ج$

$= ١٢ ج$

∴ مجموع العزوم $= ج_١ + ج_٢$

$= -٧ ج + ١٢ ج = \boxed{٥ ج}$ ← ١ ط ع

محصلة القوى $= \overrightarrow{ف_١} + \overrightarrow{ف_٢}$

$= (٢ ، ١-) + (-٢ ، ٢-)$

$= (-٤ ، ١)$

عزم المحصلة $= \overrightarrow{ك} \times ج$

$= (-٥، ٣) \times (-٤، ١)$

$= (٣ - ٨) ج$

$= ٥ ج$ ← ثابتا

مثال ص ١٠١

مجموع العزوم حول ن $=$

عزم المحصلة حول ن

مبدأ العزوم

٤) أوجد قيمة ك التي تجعل $\overrightarrow{ف}(-٢، ك)$ ظل محصلة عزوم القوى حول كل من $ن(٢، ١)$ ، $ص(-٤، ١)$ ثم أوجد المحصلة

الحل

نفرض $ن \equiv ق$ ، $\overrightarrow{ق} = ٣ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص}$

* $\overrightarrow{ك ن} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ت}$

$= (-٢، ٢) - (١، ٢)$

$\overrightarrow{ك} = (-٦، ١)$

$ج_ن = ٥ ك ج$

∴ $ج_ن = (\overrightarrow{ك} \times \overrightarrow{ف}) = (-٦، ١) \times (٥، ك) = ١ ك ج$

$\Leftarrow -٦ ن - ٤ = ٢ ك$ ← ①

* $\overrightarrow{ك ص} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ص}$

$= (-٢، ٢) - (-٤، ١)$

$= (٢ ، ١-)$

$ج_ص = ٢ ك ج$

∴ $ج_ص = (\overrightarrow{ك} \times \overrightarrow{ف}) = (-١، ٢) \times (٥، ك) = ٢ ك ج$

$\Leftarrow -ن + ٤ ص = ٢ ك$

$-ن + ٤ = ١٢$ ← ②

بحل ① ، ②

∴ $-٧ ن = ٤٢$

$\Leftarrow ن = -٦$ بالتعويض في ②

$\Leftarrow ٦ + ٤ = ٢ ك$

$\Leftarrow ٢ ك = ١٠$

$\Leftarrow ك = ٥$

∴ $\overrightarrow{ق} = ٨ \overrightarrow{س} - ٦ \overrightarrow{ص}$

(٥) تؤثر القوى $\vec{ق_1} = س\vec{ت} + ٢ص\vec{ت}$
، $\vec{ق_2} = ٢س\vec{ت} - ص\vec{ت}$
من النقطة م (-٢، ٣) اثبت
ان خط عمل المحصلة ينصف
المقطع المرسوم من ن (-١، ٥) ،
ص (٢، ١)

الحل

فكر اكل $\vec{ج_ن} = -\vec{ج_ص}$

$\vec{ج} = \vec{ق_1} + \vec{ق_2}$

$= ٤س\vec{ت} + ص\vec{ت}$

$\vec{ك_ن} = \vec{م} - \vec{ن}$

$= (-٢، ٢) - (-١، ٥)$

$= (-١، -٣)$

$\vec{ج_ن} = ك_ن \times ج$

$= (-١، -٣) \times (١٢، ٤)$

$= (-١ + ٨) ج$

$\vec{ج_ن} = ٧\vec{ج}$ ← اثبات

$\vec{ك_ص} = \vec{م} - \vec{ص}$

$= (-٢، ٢) - (١، ٢)$

$= (-٣، ٠)$

$\vec{ج_ص} = (-٣) \times (١٢، ٤)$

$= (-٣، -٤) ج$

$= -٧\vec{ج}$

∴ $\vec{ج_ن} = -\vec{ج_ص}$

∴ خط عمل المحصلة ينصف ن ص

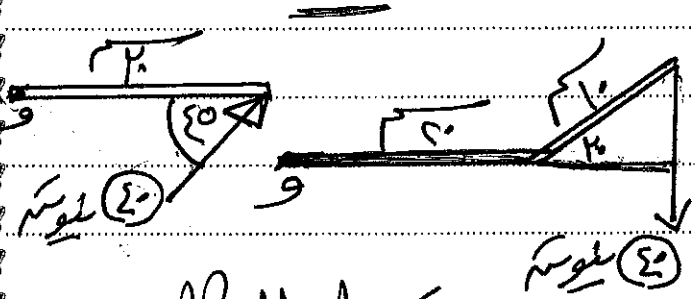
(٦) القوى $\vec{ق_1} = ٣س\vec{ت} - ص\vec{ت}$
، $\vec{ق_2} = س\vec{ت} + ٣ص\vec{ت}$ ،
$\vec{ق_3} = -٢س\vec{ت} + ٢ص\vec{ت}$ تؤثر
من م (١، ١) اثبت ان
خط عمل المحصلة يمر أيضاً
باستقامة ب ، النقطتين
(١٢، ٢) ، (٤، ٦)

حل آخر للطالب

(٧) تؤثر القوى المتلاقية $\vec{ق_1} = ٣س\vec{ت} + ٢ص\vec{ت}$
، $\vec{ق_2} = ل س\vec{ت} - ص\vec{ت}$ من
النقطتين م (١، ٢) ، م (-٢، -١)
على جسم ج ، ل ∈ ح بحيث ينعدم
مجموع عزوم هاتين القوتين
حول نقطة الأصل و حول
ن (٣، ٢)

حل آخر للطالب

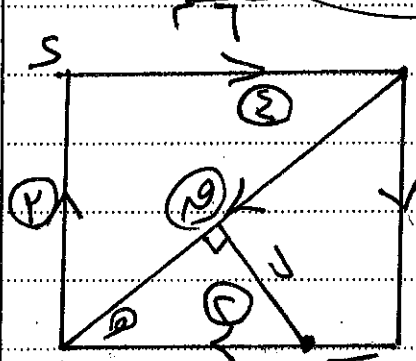
(٨) ج كل من الأطوال الآتية
أوجد المحصلة من أكبرى لعزم
القوة حول و



حل آخر للطالب

(9) أ ب ء د مربع طول ضلعه ٦ سم
هـ ∈ ب ء حيث ب هـ = ٢ سم
أثرت قوى مقاديرها
١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ق نيوتن
في أ ب ، أ ء ، ء د ، د ء ، هـ ء
فإذا كان خط عمل المحصلة
يمر بنقطة هـ أوجد ق

الحل



خط عمل المحصلة يمر بـ هـ
أي أن ∑ ع هـ = صفر

$-١ \times ١ - ٣ \times ٥ - ٤ \times ٦ + ق \times ٥ \times \frac{١}{٢} = ٠$

$\Leftarrow ق = ٣٨$ نيوتن

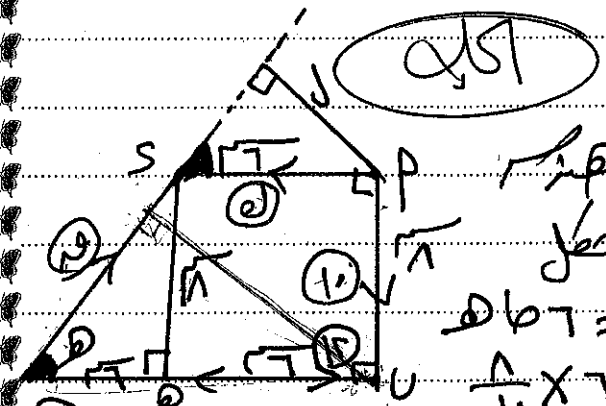
(10) إذا كانت ق = ٣٢ − ٢ سم
وكان عزم ق بالنسبة لـ (أ، ب) هو ١٨ ع
أوجد معادلة خط عمل ق

الحل

نفرض معادلة ق كما بالشكل (س، ص)
∴ ك = أ − ب
= (س، ص) − (٤، ١)
= (س − ١ ، ص − ٤)
ع هـ = ١٨ ع
∴ (س − ١ ، ص − ٤) × (٢ − ٣) = ١٨ ع
$\Leftarrow -٢ س + ٢ + ٣ ص - ١٢ = ١٨$
$\Leftarrow ٢ س + ٣ ص = ٨ + ١٢ + ١٨$
وهي معادلة خط عمل ق

(11) أ ب ء د شبه منحرف فيه
ء د // ب ء ، أ ب ⊥ ب ء
ء د = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم
ب ء = ١٢ سم أثرت القوى
١٠ ، ١٢ ، ق ، ل نيوتن
في أ ب ، أ ء ، ء د ، د ء
فإذا انعدم المجموع الجبري
لعزوم القوى حول أ ، ب
أوجد ق ، ل

الحل



عزم المجموع = عزم المحصلة
ل = ٦ ط هـ
$= ٦ \times \frac{٨}{١٠}$
$= ٤,٨$ ← ١٢ سم
وهو أن الزاوية حادة وبكتابة بالتناظر

ع م = صفر
مثلث متزن عزوم القوى حوله = ٠
⟸ ١٢ × ٨ − ٩ × ٤٨ = صفر
⟸ ٩ = ٢٠ ينتج سـ

ع ن = صفر
مثلث متزن عزوم القوى حوله = ٠
⟸ ل × ٨ − ٩ × ١٢ طا هـ
= صفر
⟸ ٨ل − ٢٠ × ١٢ × ١/١٠ = صفر
⟸ ل = ٢٤ ينتج سـ

(١٢)

أوجد عزم ق = −٣ سـ + ٢ صـ + ٥ ع
وكفاءة عن م حيث م موضع م
حول نقطة الأصل ثم = سـ + صـ + ٤ ع
أوجد عزم ق حول نقطة الأصل
ثم أوجد طول العمود المرسوم
من نقطة الأصل على خط عمل ق

الحل

أ = (١ ، ١ ، ١)
ق = (−٣ ، ٢ ، ٥)

ع و = | سـ صـ ع |
| ١ ١ ١ |
| −٣ ٢ ٥ |

= سـ (٥ − ٢) − صـ (٥ + ٣) + ع (٢ + ٣)

و، ع و = ٣ سـ − ٨ صـ + ٥ ع

|ع و| = √(٣² + ٨² + ٥²)
= √(٩ + ٦٤ + ٢٥)
= √٩٨

|ق| = √(٣² + ٢² + ٥²)
= √(٩ + ٤ + ٢٥)
= √٣٨

ل = |ع و| / |ق| = √٩٨ / √٣٨

(١٣)

إذا كانت ق = ٢ سـ + ٣ صـ − ٤ ع
كفاءة من م فجد موضع م
النقطة الأصل حيث ر = (١، ٢، ٣)
وكانت مركبتا عزم القوة حول
المحورين سـ ، صـ هما −١، −٨
أوجد ع، ل، م

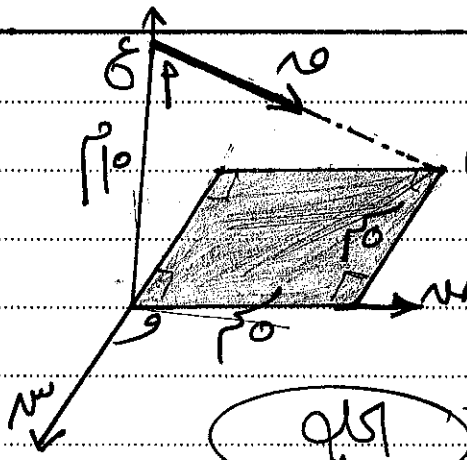
الحل

ق = (٢ ، ٣ ، −٤)
ر = (١ ، ٢ ، ٣)
* مركبة العزم حول سـ = −١
⟸ ص ق ع − ع ق ص = −١
١ × −٤ − ٣ × م = −١
⟸ م = −١
* مركبة العزم حول صـ = −٨
ع ق س − س ق ع = −٨
١ × ل − ٣ × ٢ = −٨
⟸ ل = −٢

(١٤) إذا كانت $\vec{ق} = ٥\vec{س} + ٤\vec{ص}$ ، $\vec{ع}$ تكافئ $\vec{ق}$ فجد معادلة حركة م التي تؤثر بالنسبة لنقطة الأصل $\vec{ت} = (٢\vec{ت} + ٢\vec{ع})$ فكانت مركبة العزم حول أصله = ٧ أوجد ميل $\overleftrightarrow{ل}$ ثم أوجد طول العمود المرسوم من $\vec{ص}$ على خط عمل القوة.

عدك للطالبة

(١٥)



أوجد عزم $\vec{ق}$ حول $\vec{و}$ حيث $\vec{ق}$ أصل $\vec{ل}$ ، $\vec{م}$ = ١٥ نيوتن

الحل

$\vec{ل} = (١٥ ، ٠ ، ٠)$

$\vec{م} = (٠ ، ٥ ، ٠)$

$\vec{ق} = \vec{م} - \vec{ل} = (-١٥ ، ٥ ، ٠)$

$\vec{ق} = \frac{\vec{ق}}{|\vec{ق}|} \times$ ق

$= \frac{(-١٥ ، ٥ ، ٠)}{\sqrt{٢٥ + ٢٥ + ٠}} \times ١٥$

$= (-١٥ ، ١٥ ، ٠)$

$\vec{ر} = \vec{ل} - \vec{و} = (١٥ ، ٠ ، ٠)$

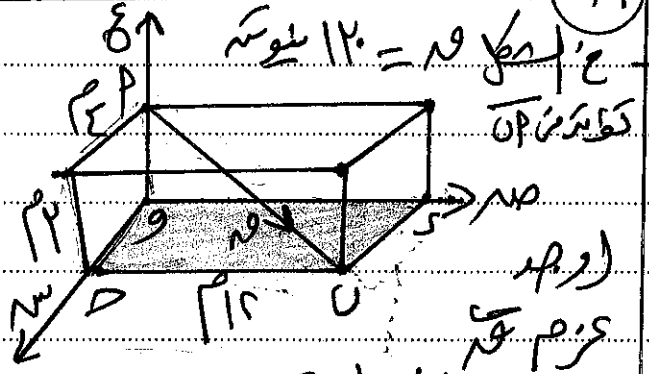
$\vec{ع} = \vec{ر} \times \vec{ق}$

$= ٢٢٥ \vec{ع}$

$|\vec{ع}| = \sqrt{(٢٢٥)^٢ + (٢٢٥)^٢}$

$= ٢٢٥\sqrt{٢}$ نيوتن.م

(١٦)



أوجد عزم $\vec{ق}$ حول نقطة $\vec{ك}$ حيث $\vec{ق}$ أصل $\vec{ل}$ ، $\vec{م}$ = ١٢٠ نيوتن تؤثر من $\vec{أ}$ إلى $\vec{ب}$

الحل

$\vec{أ} (٢ ، ٠ ، ٠)$

$\vec{ب} (٤ ، ١٢ ، ٠)$

$\vec{ك} (٠ ، ١٢ ، ٠)$

$\vec{ق} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٤ ، ١٢ ، -٢)$

$\vec{ق} = \frac{\vec{ق}}{|\vec{ق}|} \times$ ق

$= \frac{(٤ ، ١٢ ، -٢)}{\sqrt{٤ + ١٤٤ + ٤}} \times ١٣٠$

$= (٤٠ ، ١٢٠ ، -٢٠)$

$\vec{ر} = \vec{ك} - \vec{ل} = (٤٠ ، ١٢٠ ، -٢٠)$

$\vec{ع} = \vec{ر} \times \vec{ق}$

$= (٠ ، ٠ ، ٤)$

$ع_د = \begin{vmatrix} سم & صم & ع \\ ٤ & ٠ & ٠ \\ ٤٠ & ١٢٠ & -٢٠ \end{vmatrix}$

$ع_د = -٤(-٢٠ سم - ١٢٠ ع)$

$= ١٢٠ سم + ٤٨٠ ع$

(١٧)

ب د = ٥ سم ، ب ج = ٨ سم ، ق(∠ب) = ٩٠°

ج د = ٩ سم ، ج د // ب ق ، ب ق = ١٥ سم

ق ∈ ب ج ، ق ب = ٣ سم

ق(∠ج ق د) = ٦٠° ، ق(∠ب ق ا) = ٤٥°

ا ق = ٦ سم

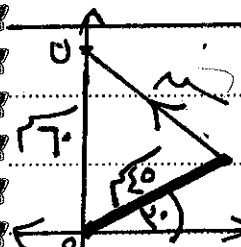
$ع_ب = \begin{vmatrix} سم & صم & ع \\ ٠ & ٨- & ٠ \\ ٦ & ٤٥- & ٠ \end{vmatrix}$

$ع_ب = ٤٨ سم + ٤٢٠ ع$

$ع_ر = ع_ب + ع_د$

$= ٢٦٠ سم + ٥٤٠ ع$

(١٨)



الحل

إحداثيات ن = (٠ ، ٦ ، ٠)

ب = (٣ جتا ٤٥° ، ٣ جا ٤٥° ، ٠)

$= (\frac{٣}{\sqrt{٢}} ، \frac{٣}{\sqrt{٢}} ، ٠)$

$\overrightarrow{ن ب} = ب - ن$

$= (\frac{٣}{\sqrt{٢}} ، -٦ + \frac{٣}{\sqrt{٢}} ، ٠)$

$ق = \frac{|\overrightarrow{ن ب}|}{|\overrightarrow{ن ب}|} \times ١٠٠$

$= \frac{\sqrt{(\frac{٣}{\sqrt{٢}})^٢ + (-٦ + \frac{٣}{\sqrt{٢}})^٢}}{\sqrt{(\frac{٣}{\sqrt{٢}})^٢ + (-٦ + \frac{٣}{\sqrt{٢}})^٢ + ٧٥^٢}} \times ١٠٠$

$= (١٠ ، -١٠٨ ، ١٠٤)$

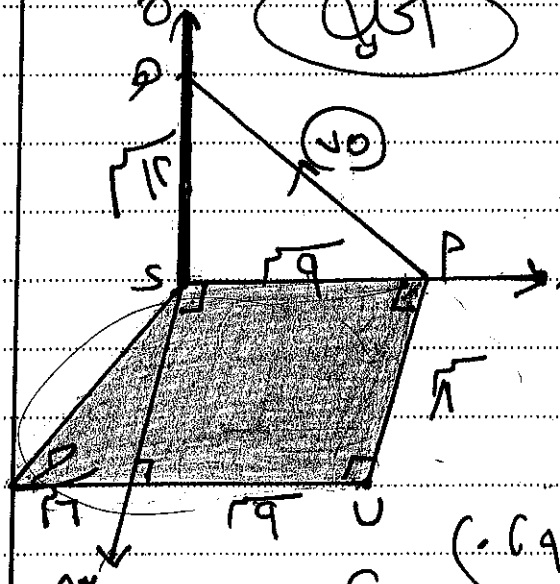
$ع_و = ق \times ش$

$= (١٠ ، -١٠٨ ، ١٠٤) \times (-٥٤ جتا ٤٥° ، -٥٤ جا ٤٥° ، ٠)$

$ع_و = -٥٤٠ سم + ٣٢٧٥ سم$

$|ع_و| = ١٩٫٦٨٥ كجم ث$

(١٧)



ا ب ج د متوازي أضلاع فيه ق(∠ب) = ٦٠°

ب ج = ٨ سم ، ب د = ٥ سم

ا ه = ١٢ سم ، ه ∈ ع ب

ق = ٧٥ نيوتن ، ق // ع ب

ن ∈ ا ب ، ن ب = ٣ سم

أوجد عزم القوة حول ن

الحل

ب = (٠ ، ٥ ، ٠)

ج = (٨ جتا ٦٠° ، ٨ جا ٦٠° ، ٠)

$= (٤ ، ٤\sqrt{٣} ، ٠)$

$\overrightarrow{ب ج} = ج - ب$

$= (٤ ، -٥ + ٤\sqrt{٣} ، ٠)$

$\overrightarrow{ب ن} = ن - ب$

$= (٣ جتا ٦٠° ، -٥ + ٣ جا ٦٠° ، ٠)$

$= (\frac{٣}{٢} ، -٥ + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$

$\overrightarrow{ق} = \frac{\overrightarrow{ب ج}}{|\overrightarrow{ب ج}|} \times ق$

$= \frac{(٤ ، -٥ + ٤\sqrt{٣} ، ٠)}{\sqrt{٤^٢ + (-٥ + ٤\sqrt{٣})^٢}} \times ٧٥$

$= (٩ ، -١٢ ، ٠)$

$ع_ن = \overrightarrow{ب ن} \times \overrightarrow{ق}$

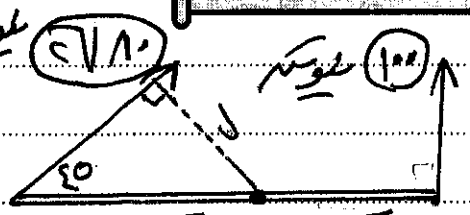
$= (\frac{٣}{٢} ، -٥ + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ، ٠) \times (٩ ، -١٢ ، ٠)$

$= (٠ ، ٠ ، -٦ + \frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢})$

$ع_ن = -٦ + \frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ سم كجم ث

$= ٢٣٫٣٧٦$ سم كجم ث

(١٩)



أثبت أن
محصلة القوتين تمر بنقطة ه

الحل

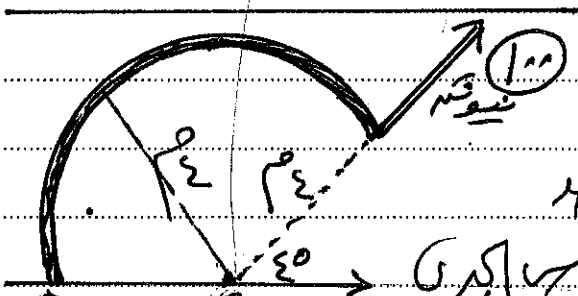
مجـ ه = ١٠٠ × ٣٠ − ٢٨٠ × $\frac{٢٥}{٢٥}$

= ٣٠٠٠ − ٣٠٠٠

= صفر

∴ المحصلة تمر بنقطة ه

(٢٠)



أوجد
المقدار المتجه
لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول
نقطة و

الحل

نحلل ١٠٠ إلى مركبتين متعامدتين
إحداهما تتجه من ب إلى و
والأخرى ١٠٠ جا ٤٥ في اتجاه العمود

∴ عزم القوة = ل × ١٠٠ جا ٤٥

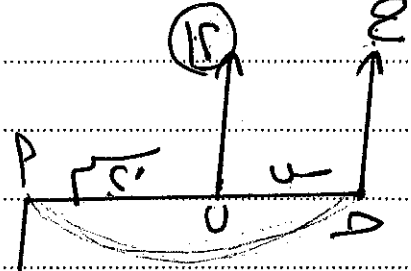
= ٤٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ١٠٠

= ٢٨٢٨ نيوتن . سم

القوى المتوازية

(١) أوجد محصلة قوتين متوازيتين
ومتضادتين في الاتجاه مقدارهما ١٢، ٧
نيوتن كما بالرسم في ا ب ج د حيث
ا ب = ٢٠ سم

الحل



ق = ١٢ − ٧ = ٥

★ ٧ (س + ٢٠) = ١٢ × س ①

١٢ س = ٧ س + ١٤٠

٥ س = ١٤٠

س = ٢٨ سم

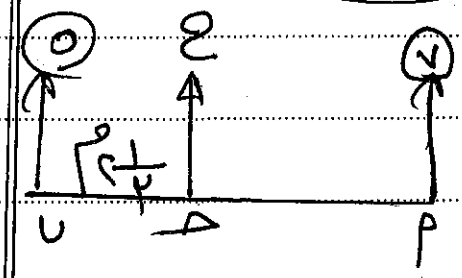
طا آخذ $\frac{ق}{٢٠} = \frac{٧}{س}$

∴ س = $\frac{٧ \times ٢٠}{٥}$ = ٢٨ سم

(٢) إذا كانت محصلة القوتين
٧ ، ٥ نيوتن
تقاطر من نقطة تبعد $\frac{١}{٤}$ م
عن خط عمل القوة الصغرى
أوجد المسافة بين خط عمل
القوتين

الحل

القوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه



∴ ع = ٧ + ٥ = ١٢ نيوتن

٧ × ٥ = ٢/٧ × ب ح

⟸ ب ح = ٥/٢

⟸ ب م = ٥/٢ + ٧/٢ = ٤ م

(٢)

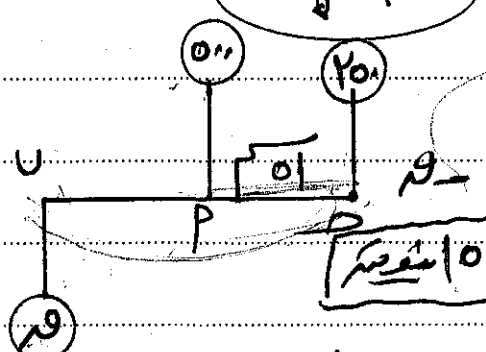
قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن ومقدار إحداهما ٥٠٠ نيوتن وتقع ع بين أ، ب على بعد ٥١ سم من الخط الذي فيه القوة الثانية والمطلوب إيجاد بعد ع عن ب إذا كانت القوة المحصلة ع خارجية وكانت القوة المحصلة تقارب

(أ) من اتجاه واحد

(ب) من اتجاهين متضادين

الحل

(أ)

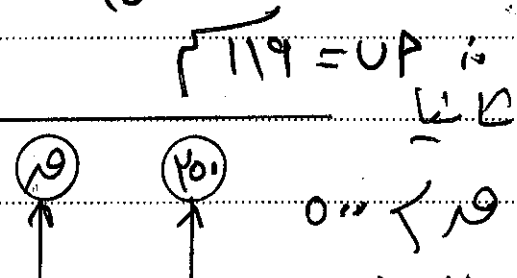


∴ ق = ٥٠٠ − ٢٥٠ = ٢٥٠ نيوتن

٥٠٠ × ٥١ = ١٥٠ × ب ح

∴ ب ح = ١٧٠ سم

(ب)



∴ ق = ٥٠٠ + ٢٥٠ = ٧٥٠ نيوتن

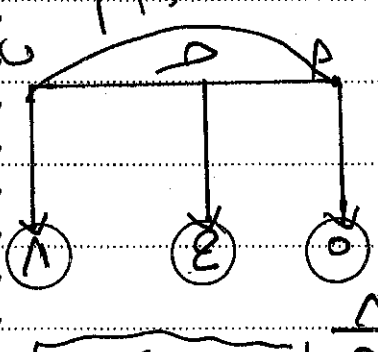
٥٠٠ × ب ح = ٢٥٠ × ٥١

∴ ب ح = ٢٥٠ × ٥١ / ٧٥٠ = ١٧ سم

(٤)

قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه مقدارهما ٨٠٠ نيوتن تعملان في جسم ب م ح حيث ب م = ٢٩ سم إذا أضيف للقوة الأولى قوة قدرها ٨ وحدات أوجد بعد خط عمل المحصلة الجديدة عن م

الحل



∵ المحصلة لم تتغير

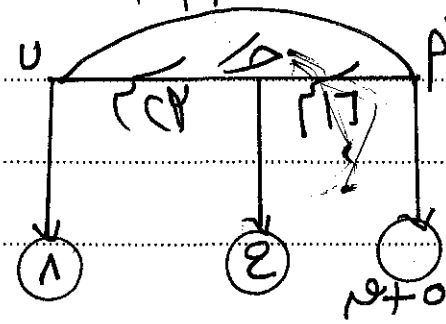
∴ ع = ٥ + ٨

∴ ع = ١٢ نيوتن

١٢/٢٩ = ٨/ب م

∴ ب م = ٢٤ سم

المثال الثالث

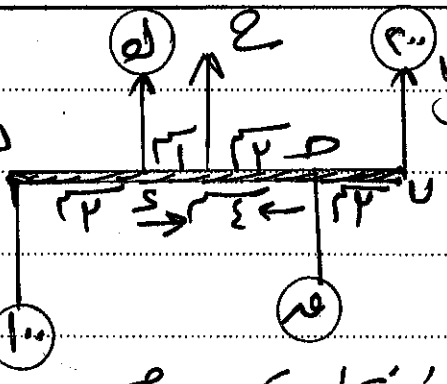


$\frac{ق+٥}{٢٤} = \frac{٨}{١٦}$

$ق + ٥ = ١٢$

$ق = ٧$ نيوتن

المثال الرابع



إذا كانت محصلة القوى ٢٠٠ نيوتن وتعمل رأسياً لأعلى من نقطة تبعد ٤ سم من م أوجد ق ، ل

الحل

$ع = ٢٠٠ + ل - (ق + ١٠٠)$

$\therefore ٢٠٠ = ل - ق + ١٠٠$

$\leftarrow ل - ق = ١٠٠$ ... (١)

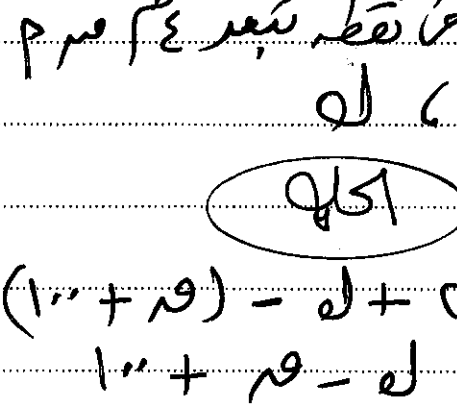
* مجموع العزوم حول م = عزم ع حول م

$٣ \times ٢٠٠ = ٢ \times ٢٠٠ + ٧ \times ١٠٠ - ٤ ل$

$\leftarrow ٦٠٠ = ٩٠٠ - ٤ ل$

$\leftarrow ل = ٥٠٠$ نيوتن

المثال الخامس



إذا كانت محصلة القوى ٢٠٠ نيوتن وتعمل رأسياً لأعلى من نقطة تبعد ٤ سم من م أوجد ق ، ل

الحل

$ع = ٢٠٠ + ل - (ق + ١٠٠)$

$\therefore ٢٠٠ = ل - ق + ١٠٠$

$\leftarrow ل - ق = ١٠٠$ ... (١)

* مجموع العزوم حول م = عزم ع حول م

$٣ \times ٢٠٠ = ٢ \times ٢٠٠ + ٧ \times ١٠٠ - ٤ ل$

$\leftarrow ٦٠٠ = ٩٠٠ - ٤ ل$

$\leftarrow ل = ٥٠٠$ نيوتن

بالتعويض في (١)

$ق = ٤٠٠$ نيوتن

اكتب اسم عدة قوة متوازية

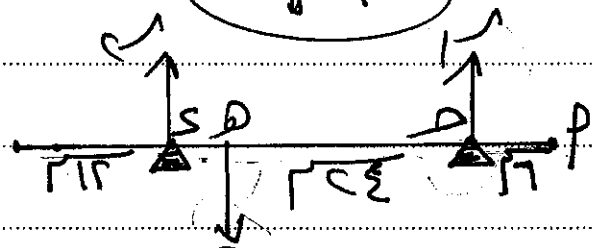
شرطا الاتزان

١ ع (القوى) = صفر

٢ ع م (أي نقطة) = صفر

يرتكز قضيب منتظم طوله ٦٠ سم وزنه ٧ كجم في وضع أفقي على حاملين أحدهما يبعد ٦ سم عن أحد طرفيه والآخر يبعد ١٢ سم عن الطرف الآخر أوجد الضغط الواقع على كل حامل ثم أوجد الثقل الذي يحمله من الطرف الذي يقع الضغط الأكبر حتى يكسر القضيب على وشك الدوران

الحل



$\therefore ق + ك = ٧$ ... (١)

مج ع = صفر العزوم

$ر_{ب} \times ٢٤ - ر_{ج} \times ١٨ = صفر$

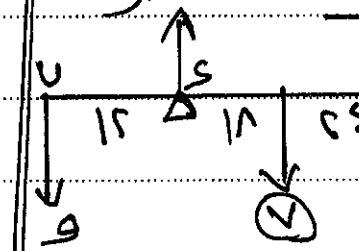
$\leftarrow \quad ٤ر_{ب} - ٣ر_{ج} = صفر$ ①

بأخذ العزوم حول ب

$\leftarrow \quad ر_{ا} = ٣ \times ٥ = ١٥$ كجم ↑

$ر_{ج} = ٤ \times ٥ = ٢٠$ كجم

ثانيا



القضيب على وشك الدوران حول ع

مج ع = صفر

$\therefore \quad و \times ١٢ - ١٨ \times ٧ = صفر$

$\leftarrow \quad و = ١٠٫٥$ كجم ↓

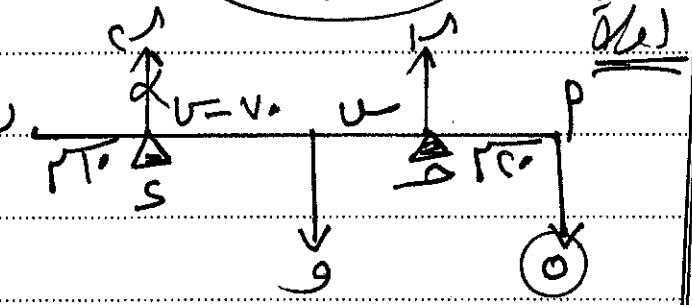
ويكون $ر_{ا} = ٧ + و$

$\leftarrow \quad ر_{ا} = ١٧٫٥$ كجم ↑

② قضيب غير منتظم طوله ١م يرتكز على حافتين أفقيتين ملساوين عند ص، ع حيث ص ع = ٢٠سم

وزنه ١٤ كجم ثقل يعلق بطرفه م أو بطرفه ب ويراد معرفة ثقل موازن القضيب حتى يكون القضيب على وشك الدوران حول أحد حافتيه ونقطة تأثيره.

الحل



عند تعليقه ثقل ٥ كجم عند م فإنه القضيب يصبح على وشك الدوران حول ص

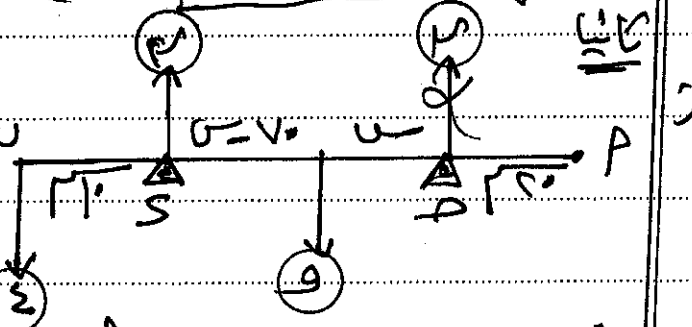
$\leftarrow \quad ر_{ب} = صفر$

$\therefore$ مج ع = صفر

$\leftarrow \quad -٥ \times ٢٠ + و \times س = صفر$

$\leftarrow \quad و س = ١٠٠$ ②

ثانيا



القضيب يصبح على وشك الدوران حول ع

عند ع $\leftarrow$ مج ع = صفر

$\therefore$ مج ع = صفر

$\therefore \quad ٤ \times ١٠ - و (٧٠ - س) = صفر$

$\therefore \quad ٤٠ - ٧٠ و + و س = صفر$

بالتعويض من ①

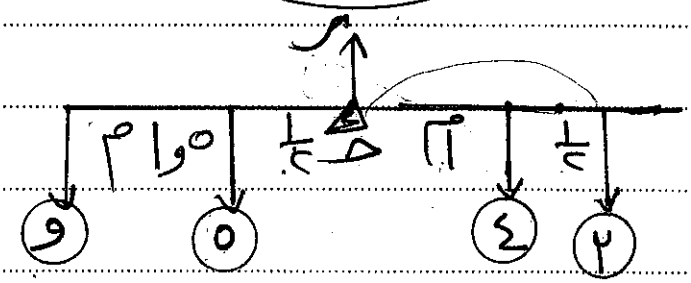
$\therefore \quad ٤٠ - ٧٠ و + ١٠٠ = صفر$

$\leftarrow \quad و = ٢$ كجم ↓

ومن ① $\leftarrow$ س = ٥٠ سم

(٢) قضيب منتظم طوله ٤م يرتكز على نقطة أ بحيث أ منتصف على ثقل به ٤ ث كجم من أحد نهايته وعلى بعد ١,٥ م منه منتصف وعلى ثقل ٥ ث كجم من النصف الآخر على بعد ١/٤ ٢م منه منتصف فإذا اتزن القضيب أفقيا فما ورد مقل الكل

الكل



القضيب متزن

$\therefore$ ر = ١٢ + و ← (١)

ن ع حـ = صفر (لأن النظام متزن)

$\therefore$ -٢ × ١,٥ + ١ × ٤ - ١/٤ × ٥ + و × ٢ = صفر

$\therefore$ -٨,٥ + ٤ + ٢و = صفر

$\therefore$ ٢و = ٤,٥

$\therefore$ و = ٣ ث كجم

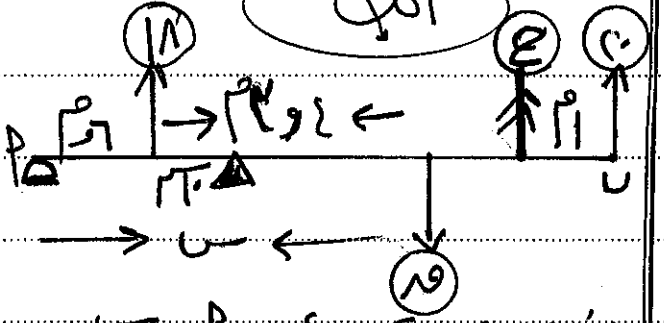
بالتعويض في (١)

$\therefore$ ر = ١٢ + ٣

$\therefore$ ر = ١٥ ث كجم

(٤) إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب ٩٠ من أول الأمر على الترتيب ١٨ ، ٢٠ ، ٦ ث كجم على الترتيب وهي متوازية وتؤثر الأولى في نقطة تبعد ٢م عن ب بحيث أ أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة الثالثة فإذا اتزن القضيب أوجد و

الكل



نوجد ع بتعدد عن أ س

$\therefore$ ع = ٢٠ + ١٨ - س

$\therefore$ ١٢,٦ = ٣٨ - س

$\therefore$ س = ٢٥,٤ ث كجم

لأن القضيب متزن تحت تأثير القوى المتوازية

$\therefore$ مجموع العزوم حول أ = صفر

$\therefore$ ٢٠ × ٤ + ١٨ × ٦ - ٢,٤ و - ٢٥,٤ × ٣ = صفر

$\therefore$ ٢,٤ و = ٣٦

$\therefore$ و = ١٥ ث كجم

اختبر

الجزأ الثاني

الإجابة أمام السؤال

(١) إذا استند قضيب بإحدى نقطتيه على حائط رأسي خشن وكان مستوى القضيب يصنع مع الحائط زاوية قياسها ٣٠° فإن معامل الاحتكاك عند نقطة التماس يساوي

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\sqrt{3}$

(٢) في الشكل المقابل:

عمل قضيب منتظم وزنه ٨ ث بحالة اتزان مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون

(أ) ٨ ث، ٨ ث (ب) ٨ ث، ٨ ث (ج) ٨ ث، ٨ ث (د) ٨ ث، ٨ ث

(٣) في الشكل المقابل:

إذا كانت ل هـ زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب فإن ظا هـ، ل =

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) $\frac{1}{2}$

(٤) في الشكل المقابل:

عجلة مهملة الكتلة طول نصف قطرها ٢ م تدور حول محور أفقي أملس ثبت عليها ثلاث أثقال كتل كل منها ٢ ل، ل، م فإذا اتزنت العجلة فإن م =

(أ) $\frac{1}{2}$ ل (ب) ل (ج) $\frac{3}{2}$ ل (د) ٢ ل

(٥) في الشكل المقابل:

إذا كانت القضيب على وشك الانزلاق فإن رد =

(أ) ٢ و (ب) $\frac{1}{2}$ و (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و (د) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و

(٦) عندما يوضع قضيب داخل إناء كروي أملس عاطل يتزن عندما يمر خط عمل الوزن بـ ـــــ

(أ) مركز الكرة (ب) طرف قطر الكرة الأعلى (ج) طرف قطر الكرة الأسفل

(٧) أي من الشروط الآتية يكفي لاتزان مجموعة القوى

(أ) $\Sigma ق_س = \Sigma ق_ص = ٠$ (ب) $\Sigma ق_س = \Sigma ق_ص \neq ٠$

(ج) $\Sigma ق = ٠$ (د) ليس أيا مما سبق

الإجابة

(١) عمودي على القضيب

(٢) $\frac{ق}{ل} = \frac{ن}{ن_٢}$

(٣) $\frac{ق}{ل} = \frac{ن}{ن_٢}$

(٤)

النقطة	أ	ب	ج
الكتلة	ك	٢ك	م
$\frac{ن}{ن_٢}$	$-\frac{١}{٢}$م	٢م	$-$م

(٥)

$\Sigma ق_ص = ٠$

$ن_٢ - \frac{١}{٢}$م $+ ٢$م $-$ م $= ٠$

$\therefore$ م $= ٠$ ك

$\Sigma ق_س = ٠$

$ن_١ - \frac{١}{٢}$ك $+ ٢$ك $-$ م $= ٠$

$\therefore$ م $= ٥٠$ ك

(٦)

$\Sigma ق_ص = ٠$

$ن_٢ = ن_١ \cos ٦٠ + ن_٣$

$\frac{٢٧}{٤} = ن_١ + ن_٣$

(٧)

$\Sigma ق_س = ٠$

$ن_١ \sin ٦٠ = ن_٢$

$ن_١ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$

$ن_١ = \frac{٩}{٢}$ ث

$ن_٣ = \frac{٢٧}{٤} - \frac{٩}{٢} = \frac{٩}{٤}$ ث

$\overrightarrow{ع_2} = \overrightarrow{ر_1} \leftarrow$ ⑤ $\overrightarrow{م_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ر_1} \leftarrow$

$\overrightarrow{ع_م} = \overrightarrow{صفر}$

$\overrightarrow{ر_1}$ ط − ٦ × ٣ ل جا٢ + $\overrightarrow{ر_1}$ جا٢ × ٦ ل جتا٢ − و × م ل جا٢ = ٠

$\frac{٩}{٤}$ ل $\overrightarrow{ر_1}$ + $\frac{٢}{٤}$ ل $\overrightarrow{ر_1}$ − و ل = صفر

$\overrightarrow{ر_1} = \frac{٢٧}{٢}$ و ⟸ (بالتعويض في ①)

و = $\frac{٢٧}{٢}$ و × $\frac{٢٧}{٤}$ + $\overrightarrow{ر_2}$ ⟸

$\overrightarrow{ر_2} = \frac{١}{٤}$ و ⟸

⑥

مركز الكرة

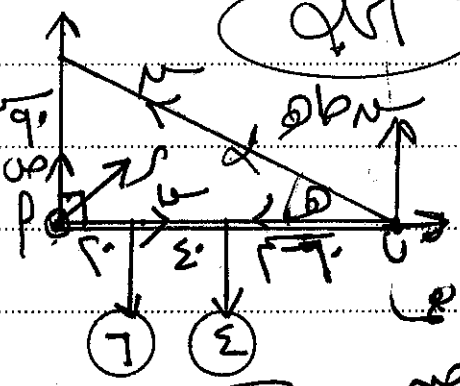
⑦ كل عمر م ما ب

أسئله	مقاليه	الحل

① أ ب قضيب وزنه وزنه ٤ ث جم وطوله ١٢٠ سم يتصل بأحد طرفيه م بمفصل مثبت علمه ثقل قدره ٦ ث جم عند نقطة ج القضيب بحيث ج م = ٩٠ سم ثم حفظ القضيب في وضع افقي بواسطة حبل ب ح مثبت طرفه ح من الحائط اعلى م وبعد عنه م ٩٠ سم اوجد

أ) الضغط المثبت

ب) مقدار واتجاه رد فعل المفصل



بفرض ان مركبتي رد الفعل هما س ، ص

وبتحليل القوى في اتجاه الرأسي

∴ ح ب = صفر ⟸ ابتدائيا

∴ س = ش حا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ش ⟸ ①

ح م = صفر

∴ ص + ش حا هـ = ٤ + ٦

ح ن = صفر (العزوم)

∴ ٤ × ٦٠ + ٦ × ١٠٠ − ص × ١٢٠ = صفر ⟸ ص = ٧ ث جم

بالتعويض في ②

$\therefore 10 = \frac{2}{5} ن + 7$

$\Leftarrow ن = 15$ كجم

بالتعويض في ①

$\therefore س = \frac{4}{5} \times 15 = 12$ كجم

$\therefore ر = \sqrt{س^2 + ص^2}$

$= \sqrt{144 + 49} = \sqrt{193}$

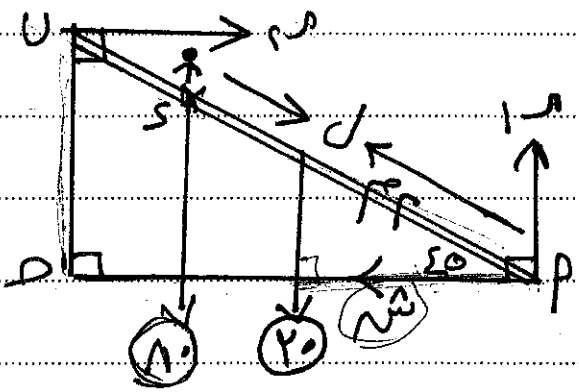
$ظا ل = \frac{ص}{س} = \frac{7}{4}$

$\Leftarrow ل = 60° 15'$

(٢)

$\overline{AB}$ سلم منتظم وزنه 30 كجم وطوله 4 م يرتكز بطرفه A على أرض أفقية ملساء وبطرفه B على حائط رأسي أملس حفظ السلم من الوقوع تحيل عليه على الأفقي بزاوية $45°$ بواسطة حبل يصل A بالنقطة C أسفل B مباشرة على الحائط إذا صعد رجل على السلم فأثبت أنه أينما يزداد كلما صعد الرجل وإذا كان أكبر حمل لا يحتمل سلماً يزيد عن 67 كجم فأوجد أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل

الحل



نفرض أن الرجل صعد مسافة ل

$\therefore$ ص = 30 كجم

$\Leftarrow$ ش ر = ش ع ← ①

ص = 30 كجم

$\therefore$ ر = 20 + 80 = 110 ← ②

ع A = صفر

$20 \times 2 \times$ جا 45 + ل × 80 جا 45 − $4 \times$ ر = صفر

$\therefore 60 + 80 ل - 4 ر = صفر$

وبحل ①

$\therefore 4 ش = 60 + 80 ل$

$\therefore \boxed{ش = 15 + 20 ل}$

$\therefore$ ش تتزايد كلما زادت ل

أي كلما صعد الرجل السلم

وعندما ش = 67

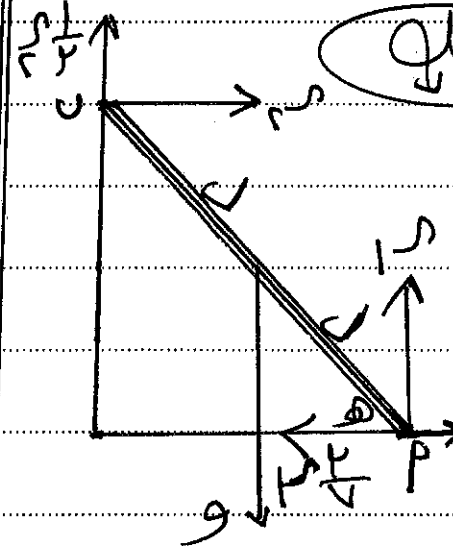
$\therefore 67 = 15 + 20 ل$

$\Leftarrow ل = 2.6$ م

$\therefore$ أكبر مسافة يصعدها الرجل هي 2.6 م

(٣) P كرة سلم منتظم وزنه و يرتكز بطرفه P على أرض خشنة وبطرفه B على حائط خشن بحيث يميل السلم على الأفقي بزاوية θ فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض $\frac{2}{7}$ وبين السلم والحائط $\frac{1}{2}$ فأوجد زاوية ميل السلم على الأرض في أقل الحالات التي يكون فيها السلم على وشك الانزلاق

الحل



نفرض أن طول السلم $= 2ل$

$\therefore ق = ق_1 = \frac{2}{7} ر_1$ ← (١)

$ر = ق$

$\therefore ر_1 + \frac{1}{2} ر_2 = و$ ← (٢)

من (١) $\therefore ر_1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} ر_1 = و$

$\therefore ر_1 = \frac{7}{8} و$ ← (٣)

$\therefore ق = ق$

$\therefore ر_2 = \frac{2}{8} و$ ← (٤)

$\therefore$ بأخذ العزوم حول P

$و \times ل \sin\theta = \frac{1}{2} ر_2 \times 2ل \sin\theta$

$\therefore و ل \sin\theta = \frac{1}{4} ل و \sin\theta$

$= \frac{2}{4} و ل \sin\theta$ = صف

بالقسمة على $ل$

$\frac{2}{4} و \sin\theta = \frac{2}{4} \sin\theta$ ←

$\sin\theta = \sin\theta$ ←

$\tan\theta = 1$ ←

$\theta = 45°$ ←

(٤) P قضيب رفيع طوله $2ل$ خفيف معلق من طرفيه في مستوى رأسي بخيطين خفيفين كل منهما طوله $ل$ فاتزن القضيب أفقيا والخيطان يميلان على الرأسي بزاويتين قياسهما $60°$ ، $30°$ على الترتيب علق من القضيب ثقلان A ، B فيكون A على بعد $\frac{1}{3}ل$ من P ، B على بعد $\frac{1}{3}ل$ من Q أوجد النسبة بين مقدار كل من الثقلين ومقدار رد فعل المستوى عليه

الحل

بتحليل مركبات القوى

$ق_1 \sin 60° + ق_2 \sin 30° = ق_1 \sin 30° + ق_2 \sin 60°$

$\frac{\sqrt{3}}{2} ق_1 + \frac{1}{2} ق_2 = \frac{1}{2} ق_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} ق_2$

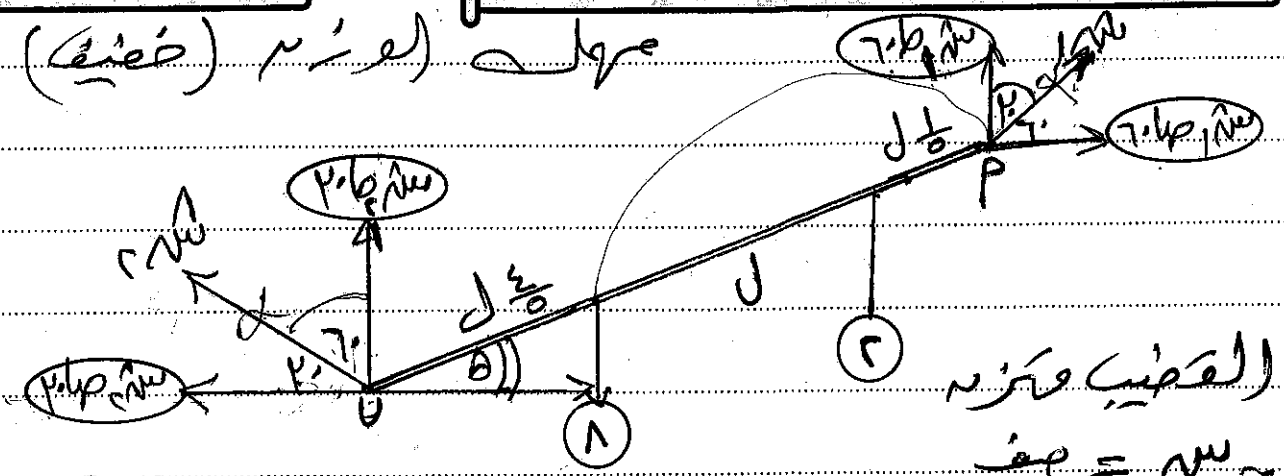
$\frac{\sqrt{3}}{2} ق_1 - \frac{1}{2} ق_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} ق_2 - \frac{1}{2} ق_2$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2} ق_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} ق_2$

$\therefore ق_1 = ق_2$

$\therefore$ النسبة بين مقدار كل من الثقلين $= 1 : 1$

مرحلة الوسط (خفيف)



القضيب متزن

$\therefore$ مج س = صفر

$\Leftarrow$ ق١ جتا٦٠ = ق٢ جتا٢٠ $\Leftarrow$ ق١ = ٢ق٢ جتا٢٠ ... (١)

$\therefore$ مج ص = صفر

$\therefore$ ق١ جا٦٠ + ق٢ جا٢٠ = ٨ + ٢ ومن (١)

$\Leftarrow$ ٢ق٢ جتا٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ق٢ جا٢٠ = ١٠

$\Leftarrow$ ٢ق٢ = ١٠ $\Leftarrow$ ق٢ = ٥

بالتعويض في (١) $\Leftarrow$ ق١ = ٢٧٥

$\therefore$ مج ع ل = صفر

$\therefore$ ق١ جا٦٠ × ٢ل جا٢٠ − ق٢ جا٢٠ × ٢ل جا٢٠ − ٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل جا٢٠ − ٢ × (ل + $\frac{٤}{٥}$ ل) جا٢٠ = صفر

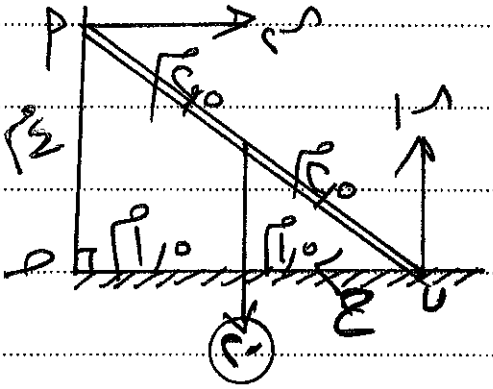
$\therefore$ ٢٧٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ل جا٢٠ − ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ل جا٢٠ − $\frac{٢٤}{٥}$ ل جا٢٠ − $\frac{١٨}{٥}$ ل جا٢٠ = صفر

$\therefore$ ٢٧٥ جا٢٠ − ١٠ − $\frac{٢٤}{٥}$ − $\frac{١٨}{٥}$ = صفر

$\Leftarrow$ جا٢٠ = $\frac{١}{٢٧}$ $\Leftarrow$ ٢٠ = ٥ ... (٥)

P ن سلم منتظم طوله ٥م ووزنه ٥٠ كجم يستند طرفه P على حائط أملس وطرفه Q على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{١}{٤}$ وكان السلم على وشك الانزلق إذا أثر على السلم عند Q رجل شخص وزنه ٧٠ كجم

الاصطدام بينه وبين الأرض $\frac{1}{5}$ بحيث $|3|$ وضع كرة لتمنع السلم من الانزلاق



الحل

من هندسة الشكل $\overline{P} = \overline{ق} = ٤م$

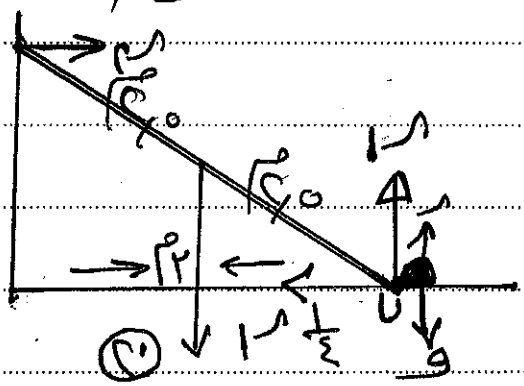
بفرض أن السلم متزن

$\overline{ر_١} = ٢٠$ ، $\overline{ر_٢} = \overline{ع}$

$\overline{ع} + \overline{ب} = صفر \Leftarrow ٢٠ \times ٦٠ - \overline{ر_٢} \times ٤ = صفر$

$\Leftarrow \overline{ر_٢} = ٧٥ \Leftarrow ع = ٧٥$

$\therefore ع > ع_{max}$ ⟵ السلم لا يتزن



الحالة الثانية

بعد وضع الجسم وكتلته $ك$

$\therefore$ الاصطدام $= \frac{1}{5} = \frac{\overline{ر_٢}}{\overline{ر_١}}$ ، $\overline{ر_١} = ٢٠$

$\therefore \overline{ر_٢} = ٤$

بأخذ العزوم للسلم

$\overline{ر_٢} = \frac{1}{4} \overline{ر_١} + \frac{1}{5} و$

$\overline{ر_١} = ٢٠$ ، $ع = ب = صفر$

$\therefore صفر = ٤ \times ٤ - ١٠ \times ٢٠ + ك \times ٢٠$

$\Leftarrow ك = ٧٥$ كجم

$\therefore ٧٥ = \frac{1}{4} \times ٢٠ \times ٥ + و \Leftarrow و = ١٢٫٥$ نيوتن

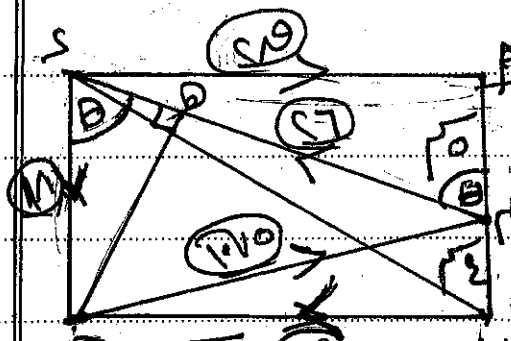
تكوير

قضيب متجانس طوله ٢ م وزنه P نيوتن مائل بوضع مفصل جذب القضيب أفقيا بقوة مقدارها $ك$ نيوتن حتى اتزن القضيب في وضع يميل على الرأسي بزاوية $٣٠°$ أوجد $ك$ ورد فعل المفصل

الحل

(٦) أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ١٢ سم
ب جـ = ٩ سم ، م ، ن منتصفا ب جـ ، جـ د
ق م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها
٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٨٦ ، ١٨٦ ، ٢٠٠ نيوتن
على الترتيب في اتجاهات أب ، ب جـ ، جـ م ، م ن ، ن د ، د جـ ، جـ أ
فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ
أو جـ عند ، جـ عند

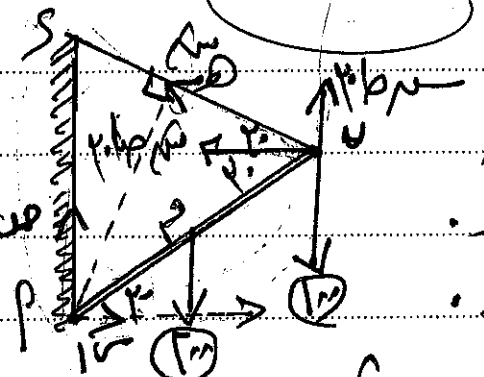
الحل



صم هندسيًا
المثلث
ن ك = ١٥
ك م = ١٢

القوى متزنة
ع م = صفر
صفر = ٥ × ٩ + ٦ × ٩ جتا هـ + ٨ × ٩ جتا هـ
← جتا هـ = ٩ / ١٥ = ٣ / ٥
جا هـ = ٤ / ٥ ← ظا هـ = ٤ / ٣
ع ن = صفر
صفر = ٤ × ٩ + ٧ × ٩ جتا هـ − ٢٠٠ × ٤ / ٥
← جتا هـ = ٣ / ٥ ، جا هـ = ٤ / ٥
ع م = صفر
صفر = ١٨ × ١٢ − ١٨٦ × ٤ − ٨ جا هـ × ٩ − ٥ × ٩
← جا هـ = ١ / ٥ = ٠,٢ متر

(٧) أن قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن
يستند أحد طرفيه على مستوى أفقي
خشن ، والطرف الآخر مربوط بخيط
خفيف يمر على بكرة ملساء ثابتة
والجزء المستقيم من الخيط رأسي
وحمل معلق بالطرف الآخر مقداره ١٠٠ نيوتن
فإذا ظل القضيب في وضع توازن
مع الأفق بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة خيط
أفقي يقع في المستوى الرأسي
المار بالقضيب ، أوجد طول الخيط
الأفقي ، ومقدار رد فعل المستوى

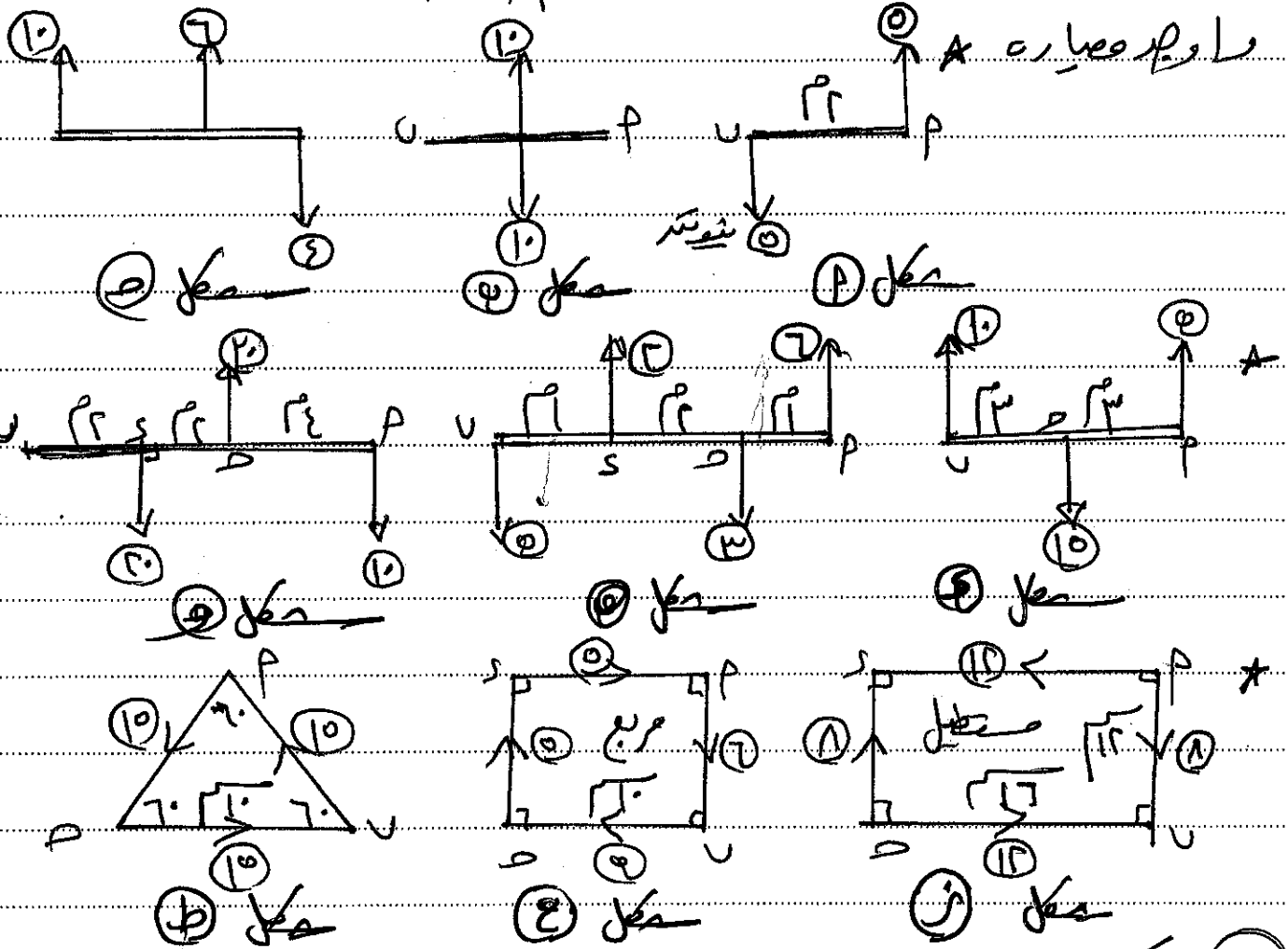


ع م = ٠
ق م = ٠
ع ن = ٠
∴ ١٠٠ = ش ، صفر = ش جا ٣٠
ق ب ← ش × ٢٧ / ٢٠ = ١٠٠ × ١٢ / ١٦
ق أ ← ١٠٠ + ش × ١٢ / ١٦ = ٢٠ × ٢٠ / ٢٠
ع م = ٠
ق ب ← ٢٠ × ٢٠ / ٢٠ − ش × ٢٧ / ٢٠ = ٠
ق م ← ٢٠ × ٢٠ / ٢٠ − ٢٠ جا ٣٠ = ٠
∴ ١٠٠ = ٢٠ جتا ٣٠ × ق ، ق = ٥ √٣ نيوتن

الازدواج ومركز الثقل

اختر

(١) يسمى اى النظم الاتيه يكافئ ازدواجا وليس محصلة ؟



(٢) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية كل منها ٢ كجم موضوعة عند رءوس Δ قائم طول ضلع القائمة ١٢ سم هو

(أ) $(\frac{4}{3}, 6)$ (ب) $(2, 12)$ (جـ) $(4, 10)$ (د) $(2, \frac{2}{3})$

(٣) مركز ثقل لوحة مستطيلة تتصل بنيزك مساوية ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسمها بنسبة :

(أ) طردية (ب) عكسية (جـ) عشوائية (د) ثابتة

(٤) مركز ثقل النظام المكون من $ك_1$ = ٤ كجم عند $(2, 2)$ ، $ك_2$ = ٢ كجم عند $(-4, 1)$ ، $ك_3$ = ٢ كجم عند $(0, 10)$ هو

(أ) $(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ (ب) $(\frac{7}{6}, \frac{4}{3})$ (جـ) $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$ (د) $(0, 10)$

(٥) مركز ثقل نظام مكون من كتلتين ٩، ٦ كجم والبعد بينهما ١٠ سم يبعد عن الكتلة الأولى مسافة ـــــ

(أ) ٢ سم (ب) ٤ سم (ج) ٥ سم (د) ٦ سم

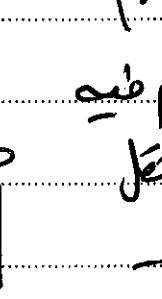
(٦) يتحرك ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل Δ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم عند أحد رؤوس Δ = ـــــ

(أ) ٣٧٢ سم (ب) ٢٧٤ سم (ج) ٦ سم (د) ٦٧٢ سم

(٧) إذا علقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل Δ متساوي الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أضلاعه (أضلع) تنصف ١ : ٢ فإن زاوية ميل هذا الضلع عن الرأسي =

(أ) ٢٢,٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

(٨) في الشكل المقابل ا ب = ٢٤ سم، ب ج = ١٦ سم فإن بعد مركز ثقل الشكل عن كل من ا ب، ب ج على الترتيب هو ـــــ



(أ) (٢، ٢) (ب) (٤، ٤) (ج) (٢، ٥) (د) (٤، ٨)

(٩) في تكوين الأزواج مقدار أحدهما ١٥ نيوتن ومحصلة الأزواج تساوي صفر ١٥ نيوتن سم فإن البعد العمودي بينهما هو ـــــ

(أ) ٧٥ سم (ب) ٦٠ سم (ج) ٣ سم (د) ٢٠ سم

(١٠) مركز ثقل جسيم كتلته كافئ مزدوج ٦، ٢ نيوتن ومتجاوره بمقدار ١٥ سم يبعد عن الجسيم ٢ نيوتن مسافة ـــ سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٧,٥ (د) ٩

(١١) تؤثر الكتلة ٥ كجم عند النقطة (٢، ٤-١) وتؤثر الكتلة ٧ كجم في النقطة (١، ٢) فإن مركز ثقل الكتلتين يؤثر عند النقطة ـــ

(أ) (١٧، ٩) (ب) $(\frac{17}{12}، \frac{2}{4})$ (ج) (١٩، ١٢) (د) $(\frac{19}{12}، \frac{1}{4})$

(١٢) يؤثر على الجسم ازدواجان الاول مقداره احدى قوتيه ٣٠ ث كجم وذراع العزم ٤ م واتجاه دورانه عكس عقارب الساعه والثانى مقداره احدى قوتيه ٢٠ ث كجم وذراع العزم ١ م واتجاه دورانه مع عقارب الساعه فإن محصلة الازدواج تساوى :

(أ) ٢٠ ث كجم.م فى اتجاه عكس عقارب الساعه (ب) ٢٠ كجم.م فى اتجاه عكس عقارب الساعه

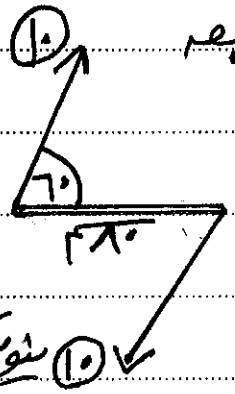
(ج) ٤٠ ث كجم.م فى اتجاه عقارب الساعه (د) ٤٠ ث كجم.م فى اتجاه عكس عقارب الساعه

(١٣) مركز ثقل الصفيحه المنتظمه المثلثه الشكل يقع عند ـــــ

(أ) نقطه تقاطع ارتفاعاته (ب) نقطه تقاطع متوسطاته

(ج) " " منصفات زواياه (د) كل ما سبق

(١٤) عزم الازدواج المقابل = ـــــ

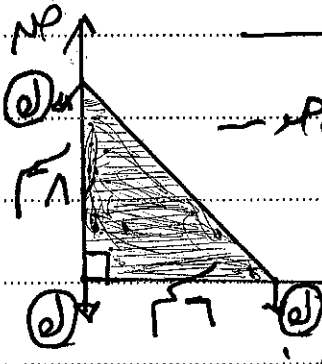


(أ) ٨٠٠ سنتيمتر.سم (ب) ٣٧٨٠٠ سنتيمتر.سم

(ج) ٤٠٠ سنتيمتر.سم (د) ٣٧٤٠٠ سنتيمتر.سم

(١٥) مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقا حرا يقع على الخط المستقيم المار بـــــ

(١٦) مركز ثقل الصفيحه المظلله فى الشكل المقابل هو ـــــ



(أ) $(\frac{2}{3}, 2)$ (ب) (٤، ٢)

(ج) (٦، ٨) (د) (٨، ٦)

(١٧) تتوازن الازدواجان ع١، ع٢ ، ع٣ ، ع٤ اذا كان :

(أ) ع١ - ع٣ = صفر (ب) ع١ + ع٣ = صفر (ج) ع١ × ع٣ = صفر (د) ع١ ÷ ع٣ = صفر

(١٨) اذا كانت المقاومه $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}$ فإن $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = (٢، -٦)$

ازدواجاً قوامه $\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج} =$ ـــــ (٨، ١٥، ٢، -٨)

(١٩) أ ب ج د صفيحه رقيقه على شكل Δ منتظم السمك والكثافه وزنها ٢ سنتيمتر حيث أ (٢، -٥) ، ب (٢، -١) ، ج (٤، ٠) فإن مركز ثقل الشكل هو ـــــ

(أ) (-٩، -٦) (ب) (٥، ٣) (ج) (١٨، -١٢) (د) (٢، -٢)

(٢٠) أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج ك أكبر
(أ) إزاحة الازدواج لأى موضع جديد فى مستواه (ب) جميع الازدواج فى قيمتها
(ج) إزاحة الازدواج لأى مستوى آخر يوازى مستواه (د) كل ما سبق

(٢١) العتبة هى المؤشر الذى عليه عجلة القيادة وعند تدوير العجلة القيادة تكون ـــ (أ) ازدواجاً (ب) اصطكاك
(ج) عزم مقاومة على عجلة القيادة (د) محصلة غير صفرية

(٢٢) لإصدار ازدواج مرفق فيه يجب أن تكون العتبة ـــ
(أ) متماسكة فى البداية (ب) ليس على خط عمل واحد
(ج) خطوط عمل الازدواج (د) كل ما سبق

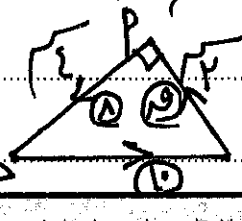
(٢٣) إذا كانت ق١، ق٢، ق٣ هى ازدواجيين وكانت ق١ + ق٢ = صفر فإن
(أ) الازدواجيين متكافئين (ب) الازدواجيين غير متزنين
(ج) الازدواجيين متزنان (د) الازدواجيين ليس متكافئين

(٢٤) إذا كانت ق١ = ٢ س ـ ٥ ص ، ق٢ = ٣ س ـ ٥ ص فإن
تكون ازدواجاً قيمة (أ، ب) = ـــ
(أ) (٢، ٤ـ) (ب) (٢، ٥) (ج) (٢ـ، ٥) (د) (٢ـ، ٥ـ)

(٢٥) إذا كانت ازدواج مقياس عزمه ٢٥٠ نيوتن.م ومقياس (صدى) مقاومته ٧٠ نيوتن فإن طول ذراع الازدواج = ـــ
(أ) ٥٠ م (ب) ٥ م (ج) ٥ سم (د) ٤٥٠٠ سم

(٢٦) حاصل ضرب مقياس (صدى) المقاومة للازدواج فى ذراع الازدواج = ـــ
(أ) محصلة الازدواج (ب) عزم الازدواج
(ج) عزم إحدى قوى الازدواج (د) كل ما سبق

(٢٧) فى الشكل المقابل تكافئ ازدواجاً قيمة ـــ نيوتن مقياس الازدواج ـــ



الباب الثالث

(١) (أ) تعامد ازدواج

عزمه = ٢٠ × ٥ = ١٠٠ نيوتن.سم

وبما أن تعامد ازدواج

∴ مجموع عزوم ازدواج = صفر

★ شكل (ب) بالنسبة لـ ازدواج

ع للعوتيه = ١٠

ويبعد عنه ١٠

∴ الازدواج مقداره = ١٠ × ١٥ −

= −١٥٠ نيوتن.سم

★ شكل (ج)

ع = ٨ ، ع = ٦

∴ س = ٤,٥ سم

∴ س = ٣/٢ = ٨/٢ ∴ س = ٩/٨

العزم تعامد ازدواج

س = ١٧/٨ + ١/٤

س = ١٧/٨

∴ الازدواج مقداره

= ٨ × ١٧/٨ = ١٧

★ شكل و ع ∈ ر يكافئان

ازدواج

★ شكل ن بالنسبة ازدواج

= ١٢ × ١٢ − ٨ × ١٦ = ١٦

بالنسبة ازدواج

مقداره = ٢ × ١٠ × ١٥/١٠ × ٢٧/٤

= ٢٧,٥ نيوتن.سم

(٢)

م	ن	ص
٢	٢	٢
٠	٤	٠
٠	٠	٢

الاحداثي = (٤×٢/٢+٢+٢ ، ٢×٢/٢+٢+٢)

= (٨/٤ ، ٦/٢) = (١/٢ ، ٣)

عكس

(٤)

س = (١×٢ + ٢×٢ + ٢×٠) / (١+٢+٢)

= ٨/٥

∴ ٣ = ١/٢

ص = (١×٢ + ١×٢ + ٢×١) / (١+٢+٢)

= ٤/٢

∴ ٥ = ٤/٢ الاحداثي = (١/٢ ، ٤/٢)

(٥)

س = لو١ ف / (لو١ + لو٩)

لو١ = ٠

لو٩ = ٢ لو٣

(٦) $س = \frac{٩ \times ١٠}{٩+٦}$

$س = \frac{٩٠}{١٥} = ٦$ سم

(٧) $ق(\angle ب) = ٣٠$

$ق(\angle ج) = ٦٠$

$ق(\angle ا) = ٩٠$

$\therefore$ م نقطة تقاطع متوسطات

$\therefore ا م = \frac{٢}{٣} ا د = \frac{٢}{٣} \times ٦\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$

(٨) الشكل مثلث متساوي الأضلاع

$ا ب = ٨$ سم

$ب د = د ج = ٤$ سم

$٨\vec{ك}$	$٨\vec{ك}$	$١٦\vec{ك}$
$٤\vec{ك}$	٤	٠
$-٤\vec{ك}$	٠	٨

$ع = \frac{٠ + ٢٢\vec{ك} + ٦٤\vec{ك}}{٢٢\vec{ك}}$

$م = \frac{١٦ \times ٨ - ٨ \times ٤}{٢٢\vec{ك}}$

$م$ المطلوب $= (٣, ٢)$

(٩) $ل = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$ سم

(١٠) $س = \frac{١٥ \times ٦}{٦+٢} = ١٠$ سم

(١١) $س = \frac{٢٥ \times ١٧ + ٧ \times ١٨}{٧+٥}$

$س = \frac{١٧}{١٢}$

$س = \frac{٢٥ \times ١ - ٧ \times ٢}{١٢}$

$ص = \frac{٩}{١٢}$

$\therefore$ المطلوب $= \left(\frac{١٧}{١٢}, \frac{٩}{١٢}\right)$

(١٢) الاتزان الكلي $= ٤ + ٤ = ٨$

$= ٢٠ \times \frac{١}{٢} - ٢٠ \times ١$

$= ١٠ - ٢٠ = -١٠$

$\therefore$ الاتزان الكلي

٢٠ في اتجاه عقارب الساعة

(١٣) كما سبق في Δ سابق

مساحة المثلث

$ل = ٦٠ \sin ٨٠$

$ل = ٣٤٠ \sin ٦٠$

مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٣٤٠ \sin ٦٠ = ٣٤٠٠\sqrt{٣}$

(١٥) نقطة التقليعة

(١٦)

المتغير	l_0	l_1	l_2
س	٠	٦	٠
ص	٠	٠	٨

$$س = \frac{٦ l_1}{٢ l_0} = ٣$$

$$ص = \frac{٨ l_2}{٣ l_0} = \frac{٨}{٣}$$

الاحداثيات $(٣ ، \frac{٨}{٣})$

(١٧) تتوازن الأجزاء إذا كان $ق_١ + ق_٢ = ق_ص$

(١٨) $ق_١ = -ق_٢$

$\therefore ٢ - ٢ب = ٥$

$\therefore ٢ + ب = ٢$

(١٩) الصفيحة فتطح السمك
المتجانسة ∴ الاحداثي
يقع عند نقطة تقاطع متوسطات

$$= \left(\frac{٤ + ٢ + ٣}{٣} ، \frac{٠ + ١ - ٥}{٣} \right)$$

$$= (٣ ، -٤)$$

(٢٠) كل ما سبق

(٢١) الأجزاء المتجانسة

(٢٢) كل ما سبق

(٢٣) الأجزاء المتجانسة متزنة

(٢٤) $ق_١ = -ق_٢$

$٢ = -٢ ، ب = -٥$

$\therefore (٢ ، ب) = (-٢ ، -٥)$

(٢٥) $ل = \frac{ك ع^٢}{ه} = \frac{١١ ع^٢}{٢٥٠} = \frac{٧٠}{٢٥٠}$

$\therefore ل = ٥ سم$

(٢٦) مركز الأجزاء

(٢٧) $\frac{ه}{٢} = \frac{٨}{٤}$

$\Leftarrow ه = ٦ سم$

مقياس الأجزاء $= ٢$ عامة المتجه $\times \frac{٨}{٤}$

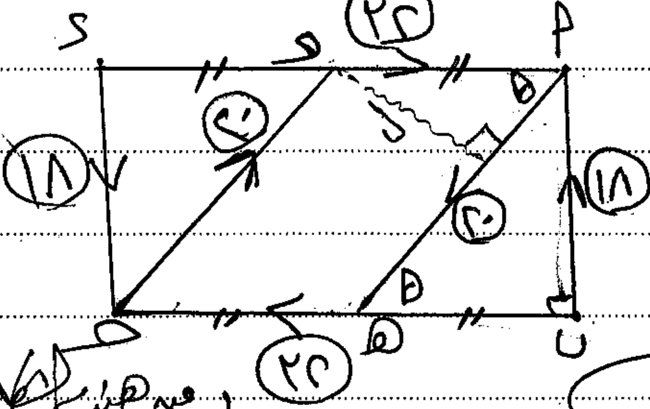
$= ٢ \times \frac{١}{٤} \times ٢ \times ٤ \times ٢$

$= ٤ سم$

اسئلة متنوعة على الازدواج ومركز الشكل

(١) في الشكل المقابل

ا ب جـ د مستطيل ، اب = ٦ سم
بجـ = ١٦ سم ، هـ ، و منتصفا
بجـ ، اد اثبت ان القوى كما
بالشكل اثبت ان المجموعة متزنة .



من هندسة الشكل
به = ٨
اب = ٦
∴ اهـ = ١٠

الحل

* $ج_1 = ١٨ \times ١٦ = ٢٨٨$
* $ج_2 = -٣٢ \times ٦ = -١٩٢$
* $ج_3 = -٢٠ \times ل = -٢٠ \times اهـ$ جا هـ

$= -٢٠ \times ٨ \times \frac{٦}{١٠} = -٩٦$

∴ $ج_1 + ج_2 + ج_3 = ٢٨٨ - ١٩٢ - ٩٦ =$ صفر

∴ المجموعة متزنة

(٢) إذا كانت $\vec{ق_1}$ ، $\vec{ق_2}$ قوتي ازدواج ، بحيث $\vec{ق_1} = -٣\vec{س} + ٢\vec{ص}$ تؤثر في ا (١ ، ١) ، $\vec{ق_2}$ تؤثر في ب (−١ ، ٢) اوجد $\vec{ق_2}$ ثم اوجد عزم الازدواج وكذلك طول العمود المرسوم من ا على $\vec{ق_2}$

الحل

$\vec{ق_1}$ ، $\vec{ق_2}$ تكونان ازدواج ⟸ $\vec{ق_1} = -\vec{ق_2}$

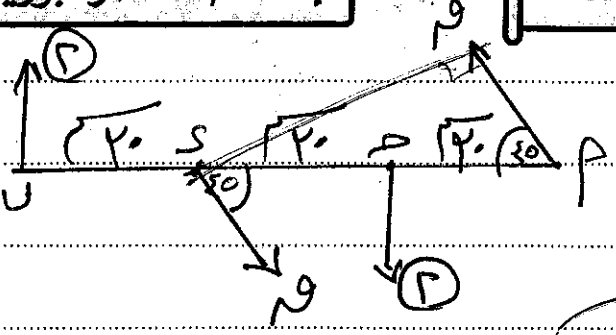
∴ $\vec{ق_2} = ٣\vec{س} - ٢\vec{ص}$

عزم الازدواج = عزم $\vec{ق_2}$ حول ا أو عزم $\vec{ق_1}$ حول ب

* $\vec{ج} = \vec{اب} \times \vec{ق_2}$ حيث $\vec{اب} = \vec{ب} - \vec{ا} = (-٢ ، ١)$
* $\vec{ج} = (-٢ ، ١) \times (٣ ، -٢) = (٤ - ٣)\vec{ع} = \vec{ع}$ ، $\|\vec{ج}\| = ١$
* $\|\vec{ج}\| = ق \times ل$ ⟸ $ل = \frac{١}{ق} = \frac{١}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

(٢) ع أ ك ا ك

قضيب طوله ٩٠ سم وزنه
تحت تأثير أربع قوى
أوجد ق



الحل

★ ع١ = -٢ × ٦٠ = -١٢٠ وحدة عزم

∴ ل (البعد العمودي بين القوتين ق، ٢ق) = ٦٠ جا ٤٥ = ٢٠√٢ وحدة طول

∴ ع٢ = ق × ل = ق × ٢٠√٢ = ٢٠√٢ ق وحدة عزم

★ بما أن وتر تحت تأثير الأزواج يميل

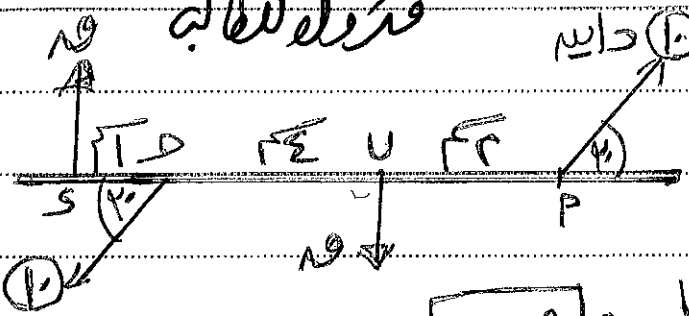
∴ ع١ + ع٢ = صفر ⟵ -١٢٠ + ٢٠√٢ ق = صفر

⟵ ق = ١٢٠ / ٢٠√٢ = ٣√٢ وحدة قوة

(٤)

ع أ ك ا ك

قضيب وتره تحت تأثير
أربع قوى أوجد ق



الجواب ق = ٦

(٥)

مرفوع للطالب

أ ب ء د هو سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوى
٧ ث، ٤ ث، ٧ ث، ٤ ث على التوالي في اتجاه أ ب، ب ء، ء د، د ه، ه أ
وأثرت القوة ق في اتجاه ه أ عين ق إذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج وتريره

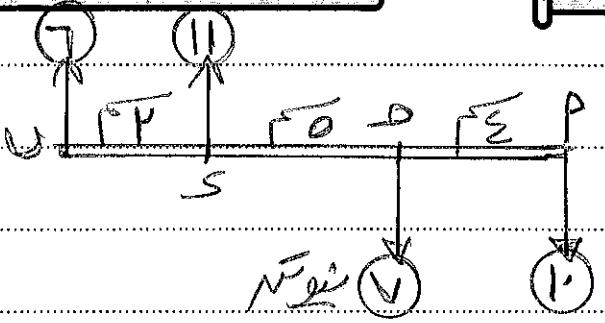
الجواب ق = ٣

تذكر أن

★ طول القطر الرئيسي للسداسي = ٢ ل (حيث ل طول الضلع المتقابل)

★ " " القطر الرئيسي " = ٢√٣ ل (حيث ل طول الضلع غير المتقابل)

(٦)



الحل

بفرض ي محور و صورة على

∴ مج ي (المحصلة) = ١١ ي٦ + ٦ ي٧ − ٧ ي١٠ − ي

= مج ي = ٠ ∴ القوى متزنة أو تكافئ ازدواج

★ لإيجاد عزم الازدواج ← نوجد عزم القوى حول م

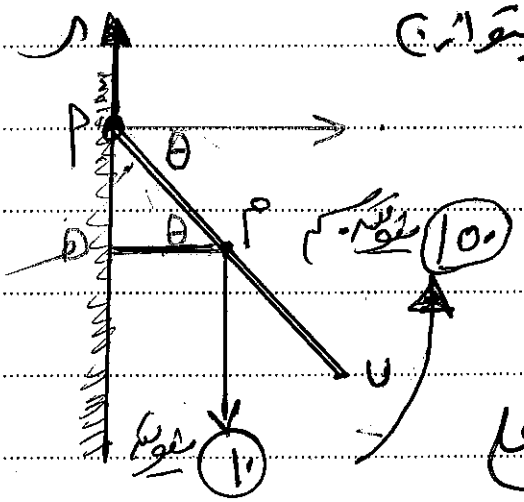
ع م = ٤ × ٧ − ١١ × ٩ − ١٢ × ٦ = −١٤٢

∴ المقدار الكبرى لعزم الازدواج = ١٤٢ نيوتن سم

ومقداره = ١٤٢ نيوتن سم

(٧)

م ق قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن يرتكز على مستوى أفقي وقد حفر عند أحد طرفيه ثقب ملس عمقه ٥٠ سم بحيث كان القضيب مائلا على الأفق بزاوية قياسها θ حيث ظا θ = ٣/٤ أوجد مقدار واتجاه رد فعل الثقب على القضيب



الحل

الازدواج الناتج عن رد الفعل مع ازدواج آخر

∴ ع (الازدواج) المؤثر = ١٠٠

∴ الوزن لا بد وأن يكون ازدواج آخر ع

∴ ر = ق وتكون على

∴ ر = ١٠ نيوتن رأسي على

القضيب متزنة ← مج ع = صفر

∴ ١٠٠ = ١٠ × م ط ← صفر ← م ط = ١٠ سم

∴ ظا θ = $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٤}$ ⟵ θ = ± ٣٧°

أى يتعين وضع الجسم على المستوى المائل ويميل فيها بزاوية ٣٧° مع الأفقى لكى يظل متزن

(٨)

ب ص ع ∆ قائم فى ب ، ب ص = ٢٠ سم ، ب ع = ١٥ سم ، كتلة الجسم = ٦ كجم ، ق = ١٠ نيوتن ، ق ، ك ، ع ، م على استقامة واحدة ، أوجد مقدار رد فعل المستوى المائل على الجسم

الحل

فى هندسة الشكل م ع = ٢٥ سم

∴ المقوى فى تزنيها حول ب واحد

∴ ٦ × $\frac{٨}{٤٠}$ = ق × $\frac{١}{٥}$ ، ق = $\frac{٦}{٢٠}$ × ١٠ = $\frac{١٠}{٥}$ × $\frac{١}{٥}$

∴ المجموع = مقدار رد فعل

مقدار رد فعل = طول المقوى (البعد) × ∆ حفظ عامة

= $\frac{١}{٥}$ × ٤٠ × ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ٤٠ نيوتن . سم

(٩)

ب ص ع ∆ متساوى الساقين فيه ب ص = ب ع = ١٣ سم ، ص ع = ١٠ سم أثرت المقوى ٦٥ ، ق ، ٦٥ نيوتن فى ب ، ك ، ع على الترتيب ، كانت المجموعة مكافئة لمزدوج حاصل ق ، م مقدار عزم المزدوج

الحل

المجموعة مكافئة لمزدوج

∴ $\frac{\text{ق}}{١٠}$ = $\frac{٦٥}{١٣}$ ⟵ ق = ٥٠ نيوتن

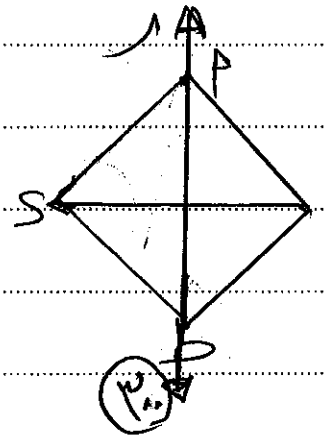
مقدار المزدوج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × $\frac{٤٨}{١٠}$ × ٢٥

∴ ضلع المربع = ١٢ سم

∴ مقدار الازدواج = ٥ × ١٢ × ١٠ × ½ × √٢ = ٦٠٠ √٢ نيوتن سم

(١٠)

أب ج د صفيحة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم وزنها ٢٠٠ نيوتن وتؤثر في نقطة من القطر ب د ثبتت الصفيحة أفقيا بالرأسين أ ، ج وعلقت من هذا الثقب في مسمار أفقي طولي بحيث انزلقت في مستوى رأسي أوجد الضغط على المسمار واذا أثر على الصفيحة ازدواج مقداره ٧٥٠٠ نيوتن سم وأبقاها محمولة في مستوى الصفيحة أثبت أن الضغط على المسمار لا يتغير ثم أوجد ميل أ ج على الرأسي في وضع الاتزان.



الحل

* أولا قبل تأثير الازدواج

الصفيحة متزنة ⟵ أ = و = ٣٠٠ نيوتن

ثانيا

* بعد تأثير الازدواج

الصفيحة متزنة تحت تأثير

الوتر ب د ، ورد الفعل عند ج معلوم الاتجاه

* الازدواج لا يتزن إلا مع آخر

∴ الوتر و ورد الفعل يكونا ازدواج

∴ و = أ = ٣٠٠ ويكونا ر على ⟵

∴ ق١ ، ق٢ ⟵ ص = ٧٥٠٠ − ٢٠٠ × م م = ٠

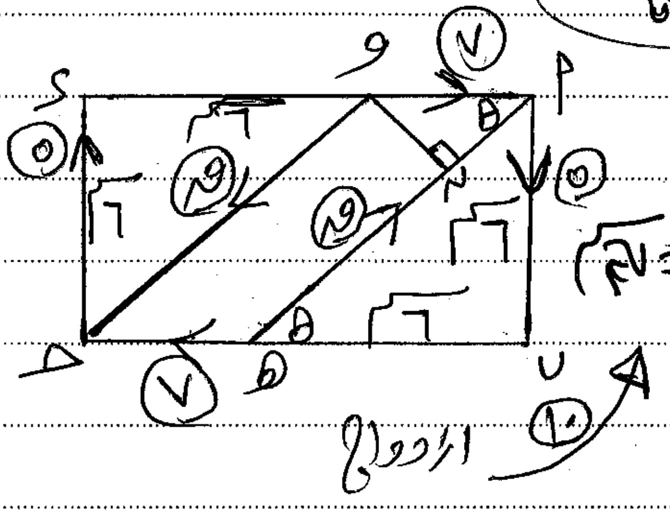
∴ م م = ٧٥٠٠ / ٢٠٠ = ٣٧,٥ سم ∴ ظا هـ = ٣٧,٥ / ٥٠ = ٣/٤ ⟵ ق(هـ) = ٣٧°

ضلع المربع = ٥٠ √٢ سم ← م م = ٣٧,٥ سم

ص = ٧٥٠٠ ل ق

(11) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ ب جـ ، و ∈ أ د بحيث ب هـ = د و = ٦ سم أثرت القوى ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ق ، ق نيوتن في اتجاهات أ ب ، جـ د ، د أ ، ب جـ ، هـ أ ، و جـ وكانت المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ نيوتن.سم في اتجاه جـ ب أ د أوجد ق

الحل



من هندسة الشكل ق(هـ) = ٤٥° ، أ و = ٢ سم

∴ و ن = أ و جا ٤٥ = ٢ × $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\sqrt{2}$ سم

★ جـ١ للقوتان (٥ ، ٥) = −٥ × ٨ = −٤٠ نيوتن.سم

★ جـ٢ للقوتان (٧ ، ٧) = −٧ × ٦ = −٤٢ نيوتن.سم

★ جـ٣ = ق × $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$ ق نيوتن.سم

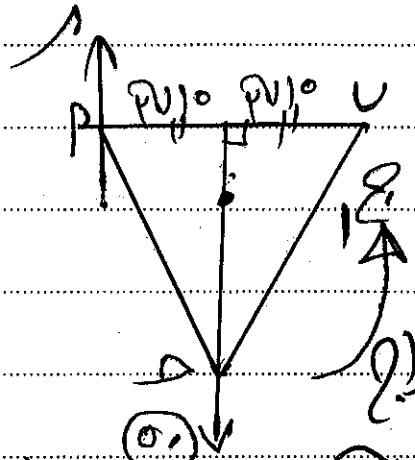
المجموعة تكافئ ازدواج قياس عزمه = ١٠

∴ ١٠ = −٤٠ − ٤٢ + $\sqrt{2}$ ق

⟸ $\sqrt{2}$ ق = ٩٢ ⟸ ق = ٤٦$\sqrt{2}$ نيوتن

(12) أ ب جـ صفيحة منتظمة على شكل ∆ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠$\sqrt{3}$ سم ، ووزنها ٥٠ نيوتن علقت الصفيحة من مسمار أفقي بالقرب من أ فاتزنت رأسياً ، أثر على الصفيحة ازدواج عمودي على مستواها فاتزنت في وضع يكون فيه أ ب أفقياً أوجد عزم الازدواج المؤثر ورد فعل المسمار

الحل

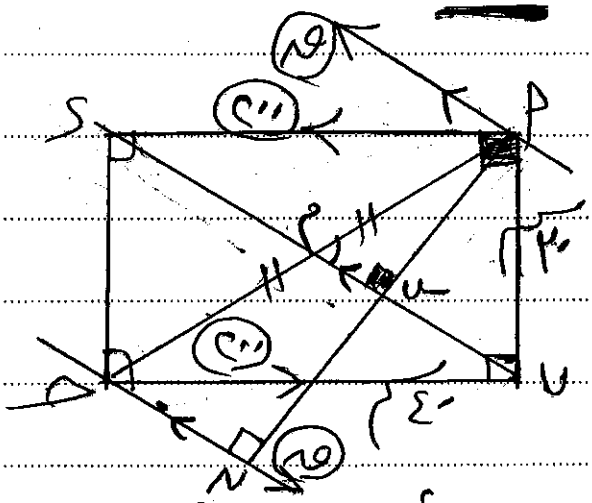


الصفيحة متزنة تحت تأثير
الأزواج ق١ ، ق٢ ، ق٣
∴ العزم (أ ، ب ، جـ) = صفر
أزواج القوى المؤثرة في الصفيحة
∴ أ = ٥٠ نيوتن وتؤثر لأعلى
ق٢ = ٢٧٥ × ٥٠ = ٢٧٥٠ نيوتن.سم
∴ ق١ (الأزواج المطلوب) = ٢٧٥٠ نيوتن.سم

(١٢)

أ ب د هـ متوازي أضلاع فيه أب = ٤٠ سم ، ب د = ٣٠ سم ، أثر العزم
٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ في أب ، ب د ، هـ د على الترتيب هو صفر
وتقاس بالسالب. عين ما يكافئ الأزواج بالنسبة لـ أ

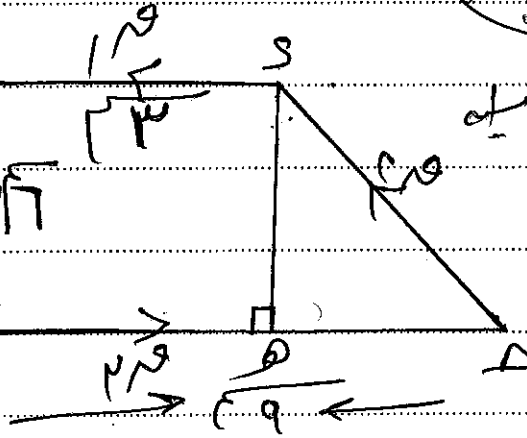
الحل



* من الشكل
ب د = أ جـ = ٣٠ سم
أ ب = ٤٠ سم
∴ أ جـ = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$ = ٢٤ سم
من المثلث أ ب جـ
∴ ب جـ = ٣٢ سم
* العزم (ب ، د) يكافئ ازدواج عزمه ق١
∴ ق١ × ٣٢ = ٣٠ × ٥٠ = ١٥٠٠ نيوتن.سم
* العزم (هـ ، د) يكافئ ازدواج عزمه ق٢
∴ ق٢ × ٢٤ = هـ د × ٢٤ ∴ الأزواج يجب أن تكافئ بعضها
∴ ق١ = ق٢ ⟸ ١٥٠٠ = ٢٤ هـ د
⟸ هـ د = ٦٢,٥ نيوتن

(١٤) أ ب ء د جسم مستوى فيه ك ∈ ب ء ، ك ∈ أ ب ، ك ∈ أ د ، ك ∈ ب د
أ ب = ٦ سم ، ب ء = ٩ سم ، ء د = ٢ سم ، أ د = ٣ سم
القوى ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ ، ق٥ ، ق٦ ، ق٧ ، ق٨ ، ق٩ ، ق١٠ ، ق١١ ، ق١٢
ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ ، ق٥ ، ق٦ ، ق٧ ، ق٨ ، ق٩ ، ق١٠ ، ق١١ ، ق١٢ في اتجاهات ك م ، ك ء ، ب ء ، ك د ، أ د ، أ ب على الترتيب
المجموعة تكافئ ازدواجاً مقياس عزمه ٢٦٠ نيوتن . سم في اتجاه
أ ب ء د فأوجد كل من ق١ ، ق٢ ، ق٣ ، ق٤ ، ق٥ ، ق٦

الحل



القوى في اتجاه د ء هي المسببة لدوران الجسم
∴ مقياس العزم الازدواج = ضعف عامل المسببة × عزم ك م
= ٢ × ½ (٩ + ٢) × ٦ × م
= ٣٣ م
وهو يساوي مقياس العزم الازدواج الذي مقياسه ٢٦٠
∴ ٣٣ م = ٢٦٠ ← م = ٨
∴ ق١ / ٣ = ق٢ / ٩ = ق٣ / ٦√٥ = ق٤ / ٦ = ٥
∴ ق١ = ١٥ نيوتن ، ق٢ = ٤٥ نيوتن ، ق٣ = ٣٠√٥ نيوتن
ق٤ = ٣٠ نيوتن ، ق٥ = ٢٠ نيوتن

(١٥) تؤثر القوى ق١ = ٤ س + ٢ ص ، ق٢ = ٢ س − ٢ ص ،
ق٣ = −٦ س + ص ، ق٤ = ٣ (٢ ، ٢) ، (−٢ ، ٣) ، (٤ ، −٦)
على الترتيب في المجموعة تكافئ ازدواج واوجد مقياس عزمه

الحل

∑ المحصلة = ٤ س + ٢ ص + ٢ س − ٢ ص − ٦ س + ص = ق
∴ القوى تكون ازدوج

مثلوث مصباح هو عزم القوى حول أى نقطة وتكتب هكذا
يكون عزم ق١ حول أ = صفر لأن خط عمل ق١ يمر بـ أ

$$\text{مجـ}_{أ} = \text{مـ}_{أ}(\text{ق}_1) + \text{مـ}_{أ}(\text{ق}_2)$$
$$= (-٤٠)\times(٢-٢) + (٩-٢)\times(-١٦)$$
$$= ٠ + (٧-)\times(١٦-)$$
$$= ١١٢ \text{ ث.ن}$$

صفر لأن
$\overline{أب} = ٢ - ٢ = ٠$
$= (-٤٠)$
$\overline{أب} = ص - ص = ٩ - ٢$
$= (٩-٢)$

∴ القوى تكافئ أزدواج إحصاءه ٤٠ ث.ن

تمرين

(١٦) $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ ضلعان متجاوران من $\square أبجد$ حيث $أب = ٣٠$ سم ، $أد = ٤٠$ سم ، $\overline{أب} \perp \overline{أد}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ منصفا $\angle أ$ ، $\angle د$ على الترتيب وكانت مقادير هذه القوى ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٠٠ نيوتن على $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{جد}$ ، $\overline{دأ}$ على الترتيب فى اتجاه $أ$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه العزم الكلى لهذه القوى.

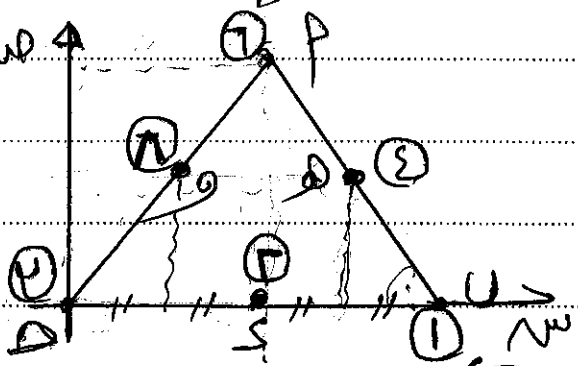
الحل: $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ ضلعان متجاوران من $\square أبجد$ حيث $أب = ٣٠$ سم ، $أد = ٤٠$ سم ، $\overline{أب} \perp \overline{أد}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ منصفا $\angle أ$ ، $\angle د$ على الترتيب وكانت مقادير هذه القوى ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٠٠ نيوتن على $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ ، $\overline{جد}$ ، $\overline{دأ}$ على الترتيب فى اتجاه $أ$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه العزم الكلى لهذه القوى.

(١٧) $\square أبجد$ متوازى أضلاع فيه $أب = ٥$ سم ، $أد = ١٢$ سم ، $د$ منتصف $\overline{أج}$ ، $ق_1 = ٢٠$ ، $ق_2 = ٤٨$ نيوتن على الترتيب فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جد}$ أثبت أن المجموعة تكافئ أزدواج وأوجد العزم الكلى لهذه القوى ثم أوجد مقدار معين تؤثر أحداها فى $أب$ والأخرى عند $د$ فى اتجاه $\overrightarrow{دأ}$ بحيث تكون المجموعة

الحل: عزم الأزدواج = ٤٠ ث.ن ، $ق_3 = ٢٦$ نيوتن

مركز الثقل

(١) أ ب ح د متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤ سم، وأ هـ منتصف ب ح، ب و = ١ سم، وضعت الأثقال ٦، ١، ٢، ٤ نيوتن عند أ، ب، ح، د على الترتيب أوجد مركز ثقل المجموعة



الحل

نوصل ا ص نقطة الأصل

$= ٤ \times ٦ = ٢٤$ ، $ا ح = ٤ \times \sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$

$\therefore أ (٤\sqrt{٣}، ٠، ٠)$

$و (٣\sqrt{٣}، ١، ٠)$ ، $هـ (٣\sqrt{٣}، ٢، ٠)$

	ص	ب	د	أ	هـ	و
الثقل	٢	١	٦	٢	٤	٨
س	٠	٤	٢	٢	٢	١
ص	٠	٠	$٢\sqrt{٣}$	$٢\sqrt{٣}$	٠	$٢\sqrt{٣}$

$\bar{س} = \frac{٠ + ٤ + ٢ + ٦ + ٢ + ٤ + ٨}{٢ + ١ + ٦ + ٢ + ٤ + ٨}$

$= \frac{٠ + ٤ + ١٢ + ١٢ + ٨ + ٨}{٢٣} = \frac{٤٠}{٢٣}$

$\bar{ص} = \frac{٠ + ٠ + ١٢\sqrt{٣} + ١٢\sqrt{٣} + ٠ + ٢\sqrt{٣}}{٢٣}$

$\therefore$ مركز الثقل $= (\frac{٥}{٢}، \sqrt{٣})$

ملاحظات

★ أوزان القضبان المنتظمة الكثافة تتناسب مع أطوالها

★ أوزان الصفائح " " " " مع مساحاتها

★ أوزان المجسمات " " " " مع أحجامها

(٦) سلك رفيع منتظم الكثافة والمقطع على شكل شبه منحرف أ ب ج د فيه أ ب = ١٥ سم ، ب ج = ١٢ سم ، ج د = ١٠ سم ، ق(أ) = ق(د) = ٩٠° أوجد بعد مركز الثقل عن الضلع أ د

الحل

نفرض أن ب هي نقطة الأصل

* السلك منتظم الكثافة والسمك ∴ الكتل تتناسب مع الأطوال

* من الشكل ء د = ١٢ سم

نفرض الكتل المعطاة تكون بالترتيب الآتي

الكتلة	ك١٢	ك١٠	ك١٢	ك١٠
س	٦	١٢	٦	٠
ص	٠	٥	١٢٫٥	٧٫٥

* ∴ ٣ س = (٦×١٢ + ١٢×١٠ + ٦×١٢) ك / (ك١٢ + ك١٠ + ك١٢ + ك١٠)

∴ ٣ س = ٢٧٠ ك / ٥٠ ك = ٥٫٤

∴ ٣ ص = (٧٫٥×١٠ + ١٢٫٥×١٢ + ٥×١٠ + ٠×١٢) ك / ٥٠ ك = ٦٫٥

∴ مركز الثقل يبعد ٥٫٤ سم عن أ ب ، ٦٫٥ سم عن ب ج

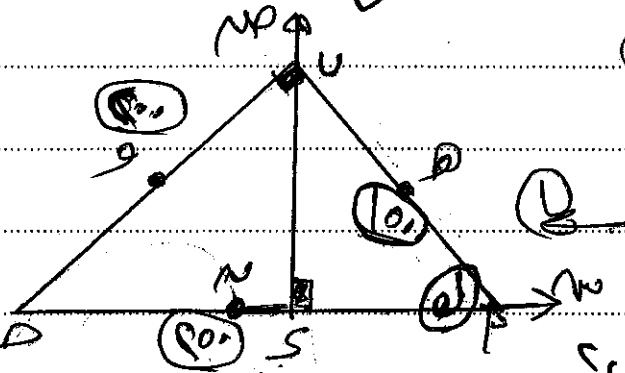
تمرين

(٧) أ ب ج د مساحة الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم اتزن الأوزان ٢ ، ٦ ، ٩ جم عند ب ، ء ، د على الترتيب مركز الثقل (٢٥/٦ ، ٢٥/٦) الجواب

---

(٤) أ ب ج د صفيحة على شكل مربع مساحة الأضلاع كتلتها ٢ كجم ، ٣ مركز ثقل وصلات الكتل ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١ كجم عند أ ، ب ، ج ، د على الترتيب مركز ثقل المجموعة يقع عند منتصف م ص

(٥) كلة منتظم السمك والكثافة طوله ٢٠ سم وكتلته ٣٠ جرام، ثبت على سطح ⊿ قائم ف ب ص ب = ٣٠ سم إذا ثبت كتلة ك جرام عند م ثم علق السلك تعليقاً حراً عند ب فاتزن عندما كانت أكبر زاوية ممكنة



الحل

مركز ثقل السلك ب = ٣٠ سم

∴ ف م + م ب = ٢٠ − ١٥ = ٥ سم ←(١)

ومن فيثاغورث

(ف م)^{٢} − (ب ن)^{٢} = (ف ب)^{٢} = (٢٠)^{٢} = ٤٠٠ ←(٢)

بحل المعادلتين معاً بالتعويض (١) في (٢) ← ف م − ب ن = ٣٠ ←(٣)

بحل (١)، (٣) معاً ⟸ ف م = ٥ سم ، ب ن = ٤ سم

* ∴ ن ك = $\frac{٤ \times ٢٠}{٥}$ = ١٦ سم من اقليدس

* ف ك = ٢٨ سم ، ف ص = ٣٢ سم من فيثاغورث

* ك ص = ٣٢ − ٢٥ = ٧ سم

* السلك منتظم السمك والكثافة

∴ كتلة وحدة الأطوال = $\frac{٦٠٠}{١٢٠}$ = ٥ جم

* ∴ كتلة ف م = ٥ × ٢٠ = ١٠٠ جم * كتلة ب ن = ٥ × ٤ = ٢٠ جم

* كتلة ف ص = ٥ × ٥٠ = ٢٥٠ جم وبالتعويض في الجدول

الكتلة	ل	ف م	ف	ن
ك	١٨	٩	١٦−	٧−
ص	٠	١٢	١٢	٢٥٠

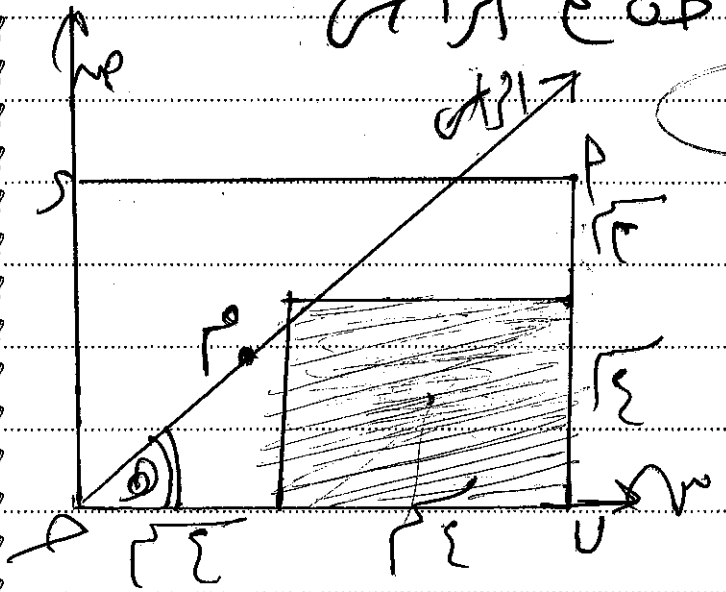
مركز الثقل يقع على الخط الرأسي الذي ينطبق على العمود ب

∴ س م = صفر

∴ صفر = $\frac{\text{ل} \times ١٨ + ١٠٠ \times ٩ - ٢٥٠ \times ١٦ - ٧ \times ٢٥٠}{\text{ل} + ٦٠٠}$ ⟸ ١٨ ل = ٢٦٠٠

⟸ ل = ١٤٤ جم

(٦) ب ج د هـ مستطيل فيه ب ج = ٦ سم ، ب د = ٨ سم ، وضعت منه قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ٤ سم أوجد بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من د ج ، د هـ ثم إذا علقت الباقي تعليقاً حراً من ج فأوجد ميل وضع القائمة ظل زاوية ميل ج د مع الرأسي



الحل

* نقسم الشكل لـ ٢ مستطيل

مساحة المستطيل = ٦ × ٨ = ٤٨ سم٢

" المربع = ٤ × ٤ = ١٦ سم٢

* نقسم الشكل المستطيل لـ

" الشكل المربع المطلوب

ك١ = $\frac{١٦}{٤٨}$ ل = $\frac{١}{٣}$ ل

* مركز ثقل المستطيل هو نقطة تقاطع القطرين (٤ ، ٢)

" " المربع " " " " (٦ ، ٢)

الشكل	المستطيل	المربع
الكتلة	ل	$-\frac{١}{٣}$ ل
س	٤	٦
ص	٢	٢

∴ س = $\frac{٤ \times ل - ٦ \times \frac{١}{٣} ل}{ل - \frac{١}{٣} ل}$ = ٣ ∴ [٣]

ص = $\frac{٢ \times ل - ٢ \times \frac{١}{٣} ل}{ل - \frac{١}{٣} ل}$ = ٢,٥ [٢,٥]

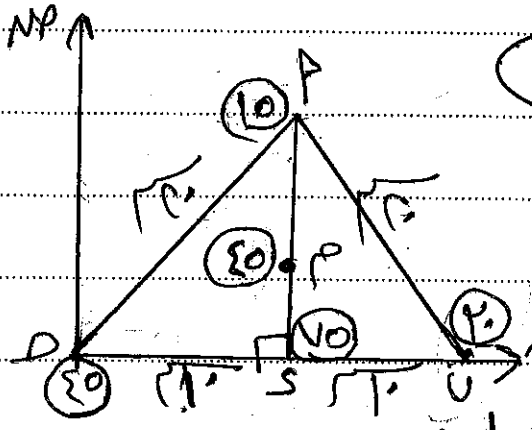
∴ مركز الشكل هو (٢ ، ٢,٥)

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ← ظا هـ = $\frac{٢,٥}{٣}$ = $\frac{٧}{٦}$

∴ ق(هـ) = ٤٩° ٢٤' هـ زاوية ميل ب د على الرأسي

استاتيكا

(٧) Δ ب ص منتظم الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم، ثم تقطيعه بقاطع مستقيم ب ء حيث الكتل ١٠، ٢٠، ٧٥، ٤٥ جم على النقط أ، ب، ء، ص على الترتيب ثم تعليق المجموعة من ب فأصبح مركز ثقل المجموعة والمطلوب مركز ثقل المجموعة المتبقية



الحل

نوجد ص من تقاطع الأضلاع

سم نفترض الشكل

$\therefore$ ص ء = ٢٠ جتا ٦٠ = ١٠ $\sqrt{٣}$

م (١٠، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٢}$) منتصف ص ء = $\frac{١}{٢}$ ص ء

	ص	ء	ب	أ	م
الكتلة	٤٥	٧٥	٢٠	١٠	٤٥
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٢}$

$$\text{س} = \frac{٤٥ \times ١٠ + ٧٥ \times ١٠ + ٢٠ \times ٢٠ + ١٠ \times ١٠ + ٤٥ \times ١٠}{٤٥ + ٧٥ + ٢٠ + ١٠ + ٤٥} = \frac{٦٥}{٧}$$

$$\text{ص} = \frac{٤٥ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٢} + ١٠ \times ١٠\sqrt{٣} + ٠ + ٠ + ٠}{١٢٠} = \frac{٢٧٥}{٧}$$

* سم فصل الكتلة ٢٠ سم ب

الكتلة	١٢٠	٢٠-
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$	٠

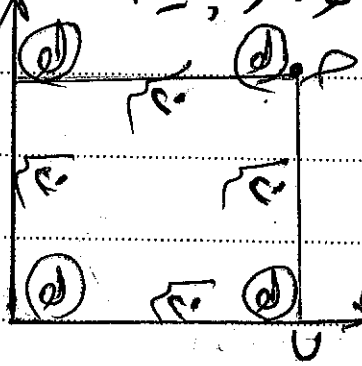
$$\text{* س} = \frac{٦٥}{٧} \times ١٢٠ - ٢٠ \times ٢٠ = \frac{٢٠ - ١٢٠}{٢٠ - ١٢٠}$$

$$\text{س} = \frac{١٥}{٢} = ٧٫٥$$

$$\text{ص} = \frac{١٠\sqrt{٣} \times ١٢٠}{٧} = \frac{٢٧٥}{٧} \quad \frac{٢٠ - ١٢٠}{٧}$$

$\therefore$ مركز الكتلة = (٧٫٥، $\frac{٢٧٥}{٧}$)

(٨) أ ب ء د مربع طول ضلعه ٤٠ سم وضعت كتل متساوية مقدارها ٢ كجم عند رءوسه عدا رأس ء حيث مركز ثقل المجموع واذا وضعت الكتلة الموجودة عند أحد رءوسه فإنه يقع مركز الثقل المجموع المتبقي



الحل

نوجد أ ص نقطة الأصل

نكون جدول

الكتلة	أ	ب	ء	د
س	٠	٤٠	٤٠	٤٠
ص	٠	٠	٤٠	٤٠
	ك	ك	ك	ك

$$\bar{س} = \frac{ك \times ٤٠ + ك \times ٤٠}{٤ ك} = ٣٠$$

$$\therefore \bar{ص} = ١٠$$

$$\bar{ص} = \frac{ك \times ٤٠ + ك \times ٤٠}{٤ ك} = ١٠$$

∴ إحداثي مركز الثقل = (١٠، ١٠)

* عند رفع الكتلة أ سنة ٥ مثلاً

نلف ٥ ص الأصل السابق

$$\bar{س} = \frac{ك \times ٤٠}{٣ ك} = \frac{٤٠}{٣} \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{ك \times ٤٠}{٢ ك} = \frac{٤٠}{٢}$$

∴ إحداثي مركز الثقل المجموع المتبقي = $(\frac{٤٠}{٣}, \frac{٤٠}{٢})$

(٩) أوجد مركز الثقل للمربع الآتي و = ٢٠ نيوتن

تؤثر ق (٢، ١) ، ق = ١٥ نيوتن تؤثر ق (-٢، ١)

ق٣ = ١٥ نيوتن تؤثر ق (١، -١)

انتهت المراجعة مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح