مذكرة شرح منهج

الاحصاء

المنهج الجديد 2017

الصف الثالث الثانوى

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

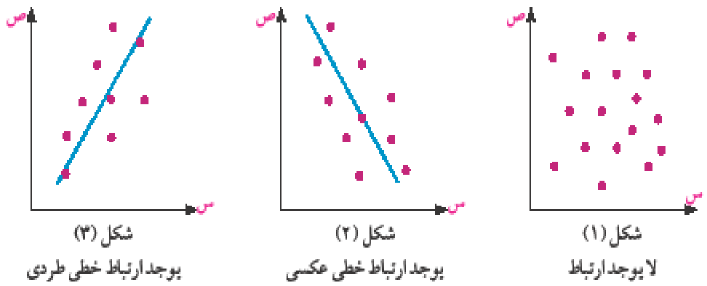
الارتباط (ارتباط بيرسون)

الإرتباط :

هو طريقة احصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين

شكل الأنتشار:

هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س ، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين



الارتباط الخطى:

يعرف الارتباط الخطى البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين

درجات الإرتباط :

(١) **الإرتباط التام** : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

(٢) **الإرتباط الصفرى (المنعدم)** : و الذى يعنى عدم وجود أى علاقة بين المتغيرين

(٣) **الإرتباط غير التام** : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :

(١) **الإرتباط الطردى** : وفيه يكون المتغيرين فى إتجاه واحد أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص مثل : الإرتباط بين أجر عامل و مدة خبرته

(٢) **الإرتباط العكسى** : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين بحيث أن أى زيادة فى أحدهما يتبعها نقص فى الآخر أو العكس مثل : العلاقة بين عدد ساعات التدريب على إستخدام الآلة الكاتبة و عدد الأخطاء فى الكتابة عليها

معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة :

بفرض إيجاد معامل الإرتباط بين متغيرين س ، ص حيث يكون :

للمتغير س قيم عددها ن هى : $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، . . . ، $س_ن$

، للمتغير ص قيم عددها ن هى : $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، . . . ، $ص_ن$

فإن : معامل الإرتباط الخطى أو معامل إرتباط بيرسون (ر) بين المتغيرين س ، ص يتعين من القانون :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2} \times \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^2 - (\sum \text{ص})^2}}$$

مثـ١ــال (٢٠٠١م) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س , ص , وحدد نوعه إذا كان : مجـ س = ٢٨ , مجـ ص = ١٦٧, مجـ س ص = ٨٤٩ , مجـ $\text{س}^{٢}$ = ١٤١ , مجـ $\text{ص}^{٢}$ = ٥١٧٩ , ن = ٧ .

الحـــــــــــــل

$$\text{ر} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن}\sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \times \sqrt{\text{ن}\sum \text{ص}^{٢} - (\sum \text{ص})^{٢}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{٧} \times \text{٨٤٩} - \text{٢٨} \times \text{١٦٧}}{\sqrt{\text{٧} \times \text{١٤١} - (\text{٢٨})^{٢}} \times \sqrt{\text{٧} \times \text{٥١٧٩} - (\text{١٦٧})^{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١٢٦٧}}{\sqrt{\text{٢٠٣}} \times \sqrt{\text{٨٣٦٤}}} = \text{٠,٩٧}$$

(ارتباط طردى قوى)

مثـ٢ــال أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س , ص , وحدد نوعه إذا كان : مجـ س = ٦٨ , مجـ ص = ٣٦ , مجـ س ص = ٣٤٨ , مجـ $\text{س}^{٢}$ = ٦٢٠ , مجـ $\text{ص}^{٢}$ = ٢٠٤ , ن = ٨ .

الحـــــــــــــل

$$\text{ر} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن}\sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \times \sqrt{\text{ن}\sum \text{ص}^{٢} - (\sum \text{ص})^{٢}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{٨} \times \text{٣٤٨} - \text{٦٨} \times \text{٣٦}}{\sqrt{\text{٨} \times \text{٦٢٠} - (\text{٦٨})^{٢}} \times \sqrt{\text{٨} \times \text{٢٠٤} - (\text{٣٦})^{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٣٣٦}}{\sqrt{\text{٣٣٦}} \times \sqrt{\text{٣٣٦}}} = \text{١}$$

(ارتباط طردى تام)

تدريب (يونيه ٢٠١٥م) إذا كان : مجـ س = ١٣٥ , مجـ ص= ٢١٠ , مجـ س ص= ٥٦٠٠ , مجـ $\text{س}^{٢}$ = ٣٤٧٥ , مجـ $\text{ص}^{٢}$ = ٩١٠٠ , ن = ٦ . أحسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س , ص , وحدد نوعه [١ طردى تام]

مثــ٣ــال : أحسب معامل إرتباط بيرسون " معامل الإرتباط الخطى " بين س ، ص من الجدول الآتى :

س	١٠	١٥	١٧	٢٠	١٧	١٥	١٧	١١	٢٠
ص	٨	١٠	١٥	١٣	١٥	٧	١٠	١١	١٤

الحـــــــــل

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
١٠	٨	١٠٠	٦٤	٨٠
١٥	١٠	٢٢٥	١٠٠	١٥٠
١٧	١٥	٢٨٩	٢٢٥	٢٥٥
٢٠	١٣	٤٠٠	١٦٩	٢٦٠
١٧	١٥	٢٨٩	٢٢٥	٢٥٥
١٥	٧	٢٢٥	٤٩	١٠٥
١٧	١٠	٢٨٩	١٠٠	١٧٠
١١	١١	١٢١	١٢١	١٢١
٢٠	١٤	٤٠٠	١٩٦	٢٨٠
Σ ١٤٢	Σ ١٠٣	Σ ٢٣٣٨	Σ ١٢٤٩	Σ ١٦٧٦

$$ر = \frac{ن \sum س\,ص - \sum س \times \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \times \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٩ \times ١٦٧٦ - ١٤٢ \times ١٠٣}{\sqrt{٩ \times ٢٣٣٨ - (١٤٢)^2} \times \sqrt{٩ \times ١٢٤٩ - (١٠٣)^2}}$$

$$ر = \frac{٤٥٨}{\sqrt{٨٧٨} \times \sqrt{٦٣٢}} = ٠,٦١$$

(ارتباط طردى قوى)

تدريب : (٢٠٠٣م) من الجدول الأتى . احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون

عدد الوحدات س	٢	٤	٥	٣	١١
عدد الوحدات ص	٦	٥	٣	٤	٢

الارتباط لسبيرمان

معامل إرتباط الرتب لسبيرمان :

يعتبر من المقاييس التقريبية فيجاد معامل الإرتباط بين متغيرين لنه يعتمد على رتب ة ليس قيم المتغيرين و يتعين معامل الإرتباط من القانون :

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

حيث : ن عدد قيم المتغيرين ، ف الفرق بين كل رتبتين متناظرتين

مثـــال : (٢٠١٥) من بيانات الجدول الآتى

س	٤٥	٢٥	٣٢	٤٠	٥٠	٣٢
ص	٢٨	٣٥	٤٠	٢٨	٢٢	٤٤

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س , ص

الحـــــــل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
٤٥	٢٨	٢	٤,٥	-٢,٥	٦,٢٥
٢٥	٣٥	٦	٣	٣	٩
٣٢	٤٠	٤,٥	٢	٢,٥	٦,٢٥
٤٠	٢٨	٣	٤,٥	-١,٥	٢,٢٥
٥٠	٢٢	١	٦	-٥	٢٥
٣٢	٤٤	٤,٥	١	٣,٥	١٢,٢٥
				$\sum ف^{٢} = ٦١$	

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٦١}{٦ \times ٣٥} = -٠,٧٤$$ (ارتباط عكسى قوى)

مثــ٢ــال : (٢٠١٢) من بيانات الجدول الآتى

س	٥	٨	٧	٩	٩	١٠
ص	١٠	٧	٨	٧	٦	٤

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س , ص

الحـــــــل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{٢}
٥	١٠	٦	١	٥	٢٥
٨	٧	٤	٣,٥	٠,٥	٠,٢٥
٧	٨	٥	٢	٣	٩
٩	٧	٢,٥	٣,٥	١ـ	١
٩	٦	٢,٥	٥	٢,٥ـ	٦,٢٥
١٠	٤	١	٦	٥ـ	٢٥
				$\sum$ ف^{٢} = ٦٦,٥	

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢}-١)} = ١ - \frac{٦ \times ٦٦,٥}{٦ \times ٣٥} = -٠,٩$$ (ارتباط عكسى قوى)

تدريب (١) : (٢٠١٤مصر) من بيانات الجدول الآتى

س	٧	٩	١١	٧	١٠	٨
ص	٥	٩	٩	٨	١٠	٨

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س , ص

تدريب (٢) : (٢٠١٦ سودان) من بيانات الجدول الآتى

س	٧	٤	٢	٨	٦	٢
ص	٣	٥	٧	٣	٦	٥

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س , ص

مثـــ٣ـــال : (٢٠١٢) من بيانات الجدول الآتى

س	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جداً
ص	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	مقبول

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س , ص

الحـــــــــل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^2
ضعيف	ضعيف	٦	٦,٥	ـ٠,٥	٠,٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	٠	٠
ضعيف	جيد	٦	٢	٤	١٦
جيد	مقبول	٣	٤	ـ١	١
ضعيف	ضعيف	٦	٦,٥	ـ٠,٥	٠,٢٥
ممتاز	جيد جداً	١	١	٠	٠
جيد جداً	مقبول	٢	٤	ـ٢	٤
				$\sum$ ف^2 = ٢١,٥	

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2 - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٢١,٥}{٧ \times ٤٨} = ٠,٣٨$$ (طردى ضعيف)

تدريب (٢٠٠٩) فى دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطالب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد بإحد الكليات وجد أن تقديرات ستة طلاب فى المادتين كالتالى

س	مقبول	ضعيف	جيد جداً	جيد	مقبول	ممتاز
ص	جيد جداً	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد	جيد جداً

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين التقديرات مبينا نوعه [٠,٤٤ طردى]

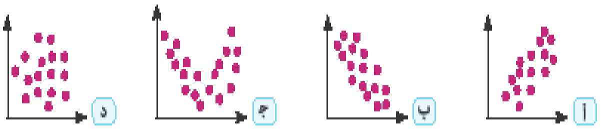
تمارين :

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) أقوى معامل الارتباط العكسى هو [ـ ٠,٤ ، ـ ٠,٥ ، ـ ٠,٦ ، ـ٠,٣]

(٢) معامل الارتباط الأضعف هو [ـ ١,١ ، ٠ ، ٠,٣ ، ٠،٥٤]

(٣) شكل الانتشار الذى يمثل ارتباط طردى هو



ثانياً :

(١) يونيه ٢٠٠٢م : إذا كان : مجـ س = ٣٣ , مجـ ص = ٢٤ , مجـ س ص = ١٣٥ , مجـ س^{٢} = ١٩٦ , مجـ ص^{٢} = ١٠٦ , ن = ٦ . أوجد معامل الارتباط لبيرسون بين المتغيرين س , ص , واستنتج قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س , ص حيث : س = س ـ ٥ , ص = ص ـ ٤

(٢) أغسطس ٢٠٠٢م : الجدول الأتى يبين الدخل والاستهلاك لعينة مكونة من ٦ أسر , والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب لبيرسون بين الدخل والاستهلاك :

الدخل بعشرات الجنيهات	١٥	٩	١٢	١٨	١٦	٢٠
الاستهلاك بعشرات الجنيهات	١٢	٧	٨	١٥	١٢	١٥

(٣) يونيه ٢٠٠٣م : الجدول الأتى يمثل حجم المبيعات س , والربح الناتج ص لمجموعة مكونة من ٦ شركات والمطلوب حساب معامل الارتباط بين الرتب لقيم س , ص :

حجم المبيعات س	٥٠٠	٦٠٠	٤٠٠	٤٨٠	٥٥٠	١٠٠
الربح ص	٣٠٠	٤٠٠	٢٥٠	٢٠٠	٤٠٠	٩٠

(٤) يونيه ٢٠٠٣م : الجدول الأتى يوضح سعر الوحدة س جنيه وعدد الوحدات المطلوبة ص من سلعة ما , احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين سعر الوحدة وعدد الوحدات المطلوبة .

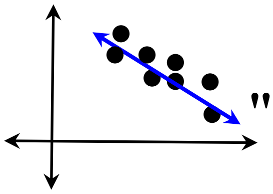
سعر الوحدة س	٢	٤	٥	٣	١١
عدد الوحدات ص	٦	٥	٣	٤	٢

(٥) أغسطس ٢٠٠٣م : الجدول الأتى يوضح توزيع مجموعة مكونة من ٦ كتب طبقاً لسعرها (س) وحجم المبيعات (ص) . احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين سعر الكتاب وحجم مبيعاته .

السعر س	منخفض	منخفض جداً	متوسط	مرتفع جداً	مرتفع	مرتفع جداً
حجم المبيعات ص	مرتفع	مرتفع	مرتفع جداً	منخفض	متوسط	منخفض

الأنحدار

عند دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن تمثيل الأزواج المرتبة الممثلة لهذه العلاقة بنقط فى المستوى و يسمى الشكل الناتج " شكل الإنتشار " للمتغيرين س ، ص و قد يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم ، منحنى "



و قد تقع جميع هذه النقط على الخط المستقيم " المنحنى "
أو تنتشر فى جميع أرجاء المستوى دون رابط بينها " إرتباط منعدم "
أو تبدو أنها تقع بنسب متفوتة على خط مستقيم كما بالشكل
و بالتالى تكون العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية و يسمى الخط المستقيم " خط الإنحدار "

طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار :

(١) طريقة المربعات الصغرى :

تعتمد هذه الطريقة على توفيق أفضل خط مستقيم لمجموعة من النقط على جعل مجموع مربعات إنحرفات النقط عن هذا المستقيم أصغر ما يمكن

معادلة إنحدار ص على س :

ص = أ س + ب " حيث أ معامل إنحدار ص على س "

$$\text{أ} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن}\sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2} \quad ، \quad \text{ب} = \frac{\sum \text{ص} - \text{أ}\sum \text{س}}{\text{ن}}$$

معادلة إنحدار س على ص:

س = حـ ص + ء " حيث حـ معامل إنحدار س على ص "

$$\text{حـ} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن}\sum \text{ص}^2 - (\sum \text{ص})^2} \quad ، \quad \text{ء} = \frac{\sum \text{س} - \text{حـ}\sum \text{ص}}{\text{ن}}$$

مثـــال١ (نماذج ٢٠١٥) إذا كان : $\sum \text{س} = ٥٠$ ، $\sum \text{ص} = ٦٠$ ، $\text{ن} = ١٠$ ،

$\sum \text{س}^{٢} = ٣١٠$, $\sum \text{ص}^{٢} = ٤٩٨$ ، $\sum \text{س ص} = ٣٦١$

(أ) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س , ص , وحدد نوعه

(ب) أوجد معادلة انحدار ص على س

الحـــــــــل

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \times \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^{٢} - (\sum \text{ص})^{٢}}}$$

$$\text{ر} = \frac{١٠ \times ٣٦١ - ٥٠ \times ٦٠}{\sqrt{١٠ \times ٣١٠ - (٥٠)^{٢}} \times \sqrt{١٠ \times ٤٩٨ - (٦٠)^{٢}}}$$

$$= \frac{٦١٠}{\sqrt{٦٠٠} \times \sqrt{١٣٠٠}} = ٠,٦٩$$

(ارتباط طردى قوى)

(ب) معادلة انحدار ص على س

$$\text{أ} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}}$$

$$\text{أ} = \frac{١٠ \times ٣٦١ - ٥٠ \times ٦٠}{١٠ \times ٣١٠ - (٥٠)^{٢}} = \frac{٦١٠}{٦٠٠} = \frac{٦١}{٦٠}$$

$$\text{ب} = \frac{\sum \text{ص} - \text{أ} \sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٦٠ - \frac{٦١}{٦٠} \times ٥٠}{١٠} = \frac{١١}{١٢}$$

$$\text{معادلة الأنحدار ص} = \frac{٦١}{٦٠}\text{س} + \frac{١١}{١٢}$$

تدريب(٢٠٠٣) : إذا كان : $\sum \text{س} = ٦٠$ ، $\sum \text{ص} = ٧٠$ ، $\sum \text{س ص} = ٣٧١$ ،

$\sum \text{س}^{٢} = ٤٢٠$ ، $\sum \text{ص}^{٢} = ٥٩٨$ ، $\text{ن} = ١٠$. فأوجد :

أولا : قيمة معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س , ص .

ثانيـا : معادلة خط انحدار ص على س .

مثــ٢ــال (٢٠١٥) إذا كان : $\sum$ س = ١٣٥ ، $\sum$ ص = ٢١٠ ، ن = ٦ ،

$\sum$ س^{٢} = ٣٤٧٥ , $\sum$ ص^{٢} = ٩١٠٠ ، $\sum$ س ص = ٥٦٠٠

أوجد معادلة انحدار ص على س ومن ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤٠

الحـــــــــــل

معادلة انحدار ص على س

$$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}}$$

$$أ = \frac{٦ \times ٥٦٠٠ - ١٣٥ \times ٢١٠}{٦ \times ٣٤٧٥ - (١٣٥)^{٢}} = \frac{٥٢٥٠}{٢٦٢٥} = ٢$$

$$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٢١٠ - ٢ \times ١٣٥}{٦} = -١٠$$

معادلة الأنحدار ص = ٢ س - ١٠

عندما س = ٤٠ $\therefore$ ص = ٢ × ٤٠ - ١٠ = ٧٠

مثــ٣ــال (٢٠١٢) فى دراسة العلاقة بين المتغيرين أ ، جـ حصلنا على البيانات الآتية

إذا كان : $\sum$ س = ٦ ، $\sum$ ص = ٤ ، ن = ٦ ، $\sum$ س^{٢} = ٦٦

, $\sum$ ص^{٢} = ٤٠ ، $\sum$ س ص = -٢٤ فأذا كان س = أ - ٤ ، ص = جـ - ٦

أوجد معادلة انحدار جـ على أ عندما ص عندما س = ٧

الحـــــــــــل

معادلة انحدار ص على س هى ص = أ س + ب

$$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}}$$

$$أ = \frac{٦ \times (-٢٤) - ٦ \times ٤}{٦ \times ٦٦ - (٦)^{٢}} = \frac{-١٦٨}{٣٦٠} = -٠,٤٦٦٧$$

$$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٤ + ٠,٤٦٦٧ \times ٦}{٦} = ١,١٣٣٧$$

معادلة الأنحدار ص - ٦ = أ (س - ٤) + ب

∴ ص = ـ ٠,٤٦٦٧ س + ٤ × ٠,٤٦٦٧ + ١,١٣٣٧ + ٦

∴ ص = ـ ٠,٤٦٦٧ س + ٩,٠٠١٧

عندما س = ٧   ∴ ص = ٠,٤٦٦٧ × ٧ + ٩,٠٠١٧ ≃ ٥,٧٣

مثـــ٤ـــال من بيانات الجدول الأتى

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

أوجد معادلة خط الانحدار ثم قدر قيمة ص عندما س = ١٣

الحـــــــــــل

قيم س	قيم ص	س^2	ص^2	س×ص
٩	١٥	٨١	٢٢٥	١٣٥
١٢	٢٠	١٤٤	٤٠٠	٢٤٠
١١	١٩	١٢١	٣٦١	٢٠٩
١٤	٢٣	١٩٦	٥٢٩	٣٢٢
١٠	١٧	١٠٠	٢٨٩	١٧٠
١٢	١٨	١٤٤	٣٢٤	٢١٦
مج ٦٨	١١٢	٧٨٦	٢١٢٨	١٢٩٢

$$\text{م} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س} \times \text{مج ص}}{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2}$$

$$\text{م} = \frac{٦ \times ١٢٩٢ - ٦٨ \times ١١٢}{٦ \times ٧٨٦ - (٦٨)^2} = \frac{١٣٦}{٩٢} = ١,٤٧٨$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مج ص} - \text{م مج س}}{\text{ن}} = \frac{١١٢ - ١,٤٧٨ \times ٦٨}{٦} = ١,٩١٦$$

معادلة الأنحدار ص = ١,٤٧٨ س + ١,٩١٦

عندما س = ١٣   ∴ ص = ١,٤٧٨ × ١٣ + ١,٩١٦ = ٢١,١٣

مثــال: إذا كان : $\sum$ س = ١٤ ، $\sum$ ص = ٩ ، ن = ٧ ، $\sum$ س^2 = ٢٥٢
، $\sum$ ص^2 = ١٧١ ، $\sum$ س ص = ١٩٢
أوجد معادلة انحدار ص على س ومن ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

الحـــــــــل

معادلة انحدار ص على س

$$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

$$أ = \frac{٧ \times ١٩٢ - ٩ \times ١٤}{٧ \times ٢٥٢ - (١٤)^2} = \frac{١٢١٨}{١٥٦٨} \simeq ٠,٧٧$$

$$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٩ - ٠,٧٨ \times ١٤}{٧} = -٠,٢٨$$

معادلة الأنحدار ص = ٠,٧٨ س - ٠,٢٨

عندما س = ٤ ∴ ص = ٠,٧٧ × ٤ - ٠,٢٨ = ٢,٨

مثــال (٢٠١٦) فى دراسة العلاقة بين حجم الدخل الشهرى(س) وحجم الأدخار الشهرى (ص) بالجنية لعينة ٢٠ أسرة وكانت $\sum$ س = ٣٠٠٠ ، $\sum$ ص = ٣٠٠ ،
$\sum$ س^2 = ٨٠٠٠٠٠ ، $\sum$ ص^2 = ٥٥٠٠ ، $\sum$ س ص = ٦٠٠٠٠
أوجد معادلة خط انحدار الأدخار الشهرى وقدر الأدخار عندما الدخل = ٢٠٠٠

الحـــــــــل

معادلة خط انحدار الأدخار (ص) على الدخل س هى ص = أ س + ب

$$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

$$أ = \frac{٢٠ \times ٦٠٠٠٠ - ٣٠٠٠ \times ٣٠٠}{٢٠ \times ٨٠٠٠٠٠ - (٣٠٠٠)^2} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{٧٠٠٠٠٠٠} = ٠,٠٤٢٩$$

$$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٣٠٠ - ٠,٠٤٢٩ \times ٣٠٠٠}{٢٠} = ٨,٥٦٥$$

معادلة الأنحدار ص = ٠,٠٤٢٩ س - ٨,٥٦٥

عندما س = ٢٠٠٠ ∴ ص = ٠,٠٤٢٩ × ٢٠٠٠ - ٨,٥٦٥ $\simeq$ ٧٧,٢٣٥

تمـــــــارين :

أولا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) إذا كانت معادلة خط الأنحدار هى ص = ٦ + ٠,٢٥س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ١٠ [٣,٥ ، ٨,٥ ، ٦٠,٢٥ ، ٦٢,٥]

(٢) إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص [طردياً ، عكسياً , تاماً ، منعدماً]

(٣) إذا كانت جميع النقاط فى شكل الأنتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين س ، ص يساوى [١ ، صفر ، ـ ٠,٥ ، ـ١]

ثانياً:

(١) ١٩٩٩م : إذا كان : مج س = ١٤ , مج ص = ٩ , مج س ص = ١٩٢ , مج س^{٢} = ٢٥٢ , مج ص^{٢} = ١٧١ , ن = ٧ أوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ٩ .

(٢) ١٩٩٩م : من بيانات الجدول الآتى قدر قيمة ص عند س = ٣ بإستخدام خط الانحدار المناسب

س	٥	١٠	٣	٨	٦	٧
ص	٤	٨	٢	٦	٤	٥

(٣) ٢٠٠٠م : إذا كان : مج س = ٤١ , مج ص = ٥٥ , مج س ص = ٣٦٢ , مج س^{٢} = ٢٥٦ , مج ص^{٢} = ٥٢٣ , ن = ٨ أوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ١٠ .

(٤) ٢٠٠٠م : إذا كان : مج س = ٦٧ , مج ص = ٥٨ , مج س ص = ٣٨٦ , مج س^{٢} = ١٣١٢ , مج ص^{٢} = ٥٨٧ , ن = ٧ . أوجد : أولا : معامل انحدار ص على س .

ثانيا : معادلة خط انحدار س على ص .

ثالثا : معامل الارتباط الخطى بين س , ص مستخدما معاملى الانحدار ومبينا نوع الارتباط .

(٤) ٢٠٠١م : من بيانات الجدول التالى بإستخدام خط الانحدار و قدر قيمة ص عندما س = ١٣

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

(٥) ٢٠٠٢م : الجدول الأتى يبين الدخل والاستهلاك لعينة مكونة من ٦ أسر , والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين الدخل والاستهلاك , احسب استهلاك أسرة دخلها ١٤٠ جنيها

الدخـــل بعشرات الجنيهات س	١٥	٩	١٢	١٨	١٦	٢٠
الاستهلاك بعشرات الجنيهات ص	١٢	٧	٨	١٥	١٢	١٥

(٦) يونيه ٢٠٠٣م : الجدول الأتى يوضح سعر الوحدة س جنيه وعدد الوحدات المطلوبة ص من سلعة ما . أوجد : (١) معادلة خط انحدار ص على س , ثم قدر عدد الوحدات المطلوبة من السلعة إذا كان سعر الوحدة ٦ جنيهات .

(٢) احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين سعر الوحدة وعدد الوحدات المطلوبة .

سعـر الوحدة س	٢	٤	٥	٣	١١
عدد الوحدات ص	٦	٥	٣	٤	٢

(٧) ١٩٩٦م : من بيانات الجدول الآتى أوجد معادلة خط الانحدار المناسب لتقدير قيمة ص عند س = ٢٠

س	٨	٦	١٠	٧	٨	٥
ص	٨	٧	١٣	٩	١٠	٥

(٨) ١٩٩٦م : من بيانات الجدول الآتى أوجد معادلة خط انحدار ص على س :

س	٩	٣	٤	٩	١٠	١١
ص	٧	٩	١٠	٦	٥	٤

(٩) ١٩٩٧م : من بيانات الجدول الآتى أوجد معادلة خط انحدار ص على س , ثم قدر قيمة س عند س = ٧ .

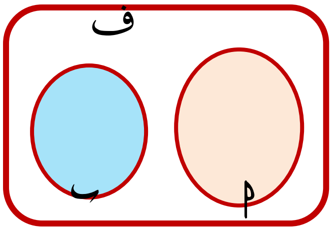
س	٨	٧	٦	٥	٩	٧
ص	٦	٥	٨	٤	١٠	٣

الوحدة الثانية

مقدمة

احتمال وقوع الحدث (أ) $\quad \text{ل}(\text{أ}) = \dfrac{\text{عدد عناصر الحدث } \text{ن}(\text{أ})}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } \text{ن}(\text{ف})}$

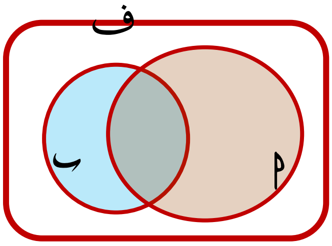
الحدثان المتنافيان



هما الحدثان اللذان لايشتركا فى أى عنصر فإذا كان أ ، ب حدثين فإن $\text{أ} \cap \text{ب} = \varnothing$ ، $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) =$ صفر

الحدثان الغير المتنافيان

هما الحدثان اللذان لايمنع وقوع أحداهما وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة)



(١) $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

(٢) $\text{ل}(\text{أ}^{/}) = 1 - \text{ل}(\text{أ})$

(٣) $\text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

(٤) $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}^{/}) = \text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

الاحتمال الشرطى

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإنه فى بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حدثاً ما مثل (ب) قد وقع فى هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث (ب) تأثير على احتمال وقوع (أ) ويمكن حساب احتمال وقوع (أ) بشرط وقوع (ب) من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحدث (أ) ونواتج الحدث (ب)

❖ ويرمز له بالرمز $\text{ل}(\text{أ} | \text{ب})$ ويقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب بتحدد بالعلاقة

$$\boxed{\text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} \quad \text{حيث } \text{ل}(\text{ب}) \neq \text{صفر}}$$

مثـ١ـال فى تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة . احسب احتمال ظهور عدد زوجى علماً بأن العدد الظاهر عدد أولى

بفرض أن فضاء العينة ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ب عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، أ = {٢} $\quad \text{ل}(\text{أ}) = \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{1}{6}$

$\text{ل}(\text{أ}|\text{ب}) = \dfrac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

مثـ٢ـال إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث ل(أ) = ٤ر٠ ، ل(ب) = ٧ر٠

ل(أ/ب) = ٣ر٠ احسب (أ) ل(أ ∩ ب) (ب) ل(أ ∪ ب) (جـ) ل(ب|أ) (د) ل(أ|ب$'$)

(أ) ∵ ل(أ|ب) = $\frac{\text{ل(أ∩ب)}}{\text{ل(ب)}}$ ⇐ ٣ر٠ = $\frac{\text{ل(أ∩ب)}}{\text{٧ر٠}}$ ∴ ل(أ ∩ ب) = ٢١ر٠

(ب) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) ـ ل(أ ∩ ب) = ٤ر٠ + ٧ر٠ ـ ٢١ر٠ = ٨٩ر٠

(جـ) ∵ ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ∩ب)}}{\text{ل(أ)}}$ = $\frac{\text{٢١ر٠}}{\text{٤ر٠}}$ = ٥٢٥ر٠

(د) ∵ ل(ب$'$) = ١ ـ ل(ب) = ١ ـ ٧ر٠ = ٣ر٠ ، ل(أ ∩ ب$'$) = ل(أ) ـ ل(أ ∩ ب) = ١٩ر٠

ل(أ|ب$'$) = $\frac{\text{ل(أ∩ب}'\text{)}}{\text{ل(ب}'\text{)}}$ = $\frac{\text{١٩ر٠}}{\text{٣ر٠}}$ = $\frac{\text{١٩}}{\text{٣٠}}$

لاحظ أن : الاحتمال الشرطى يتمتع بنفس خواص الاحتمال الغير شرطى أى أن

(١) ٠ ≤ ل(أ|ب) ≤ ١ (٢) ل(ف/ب) = $\frac{\text{ل(ف∩ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = $\frac{\text{ل(ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = ١

(٣) إذا كان أ$_١$ ∩ أ$_٢$ = ∅ فإن ل [(أ$_١$ ∪ أ$_٢$) | ب] = ل(أ$_١$/ب) + ل(أ$_٢$|ب)

1. ل(أ|ب) ≠ ل(ب|أ)
2. ل(أ$'$|ب) = ١ ـ ل(أ|ب)
3. ل(أ ∩ ب) = ل(أ|ب) × ل(ب) بشرط ل(ب) > ٠
4. ل(أ ∩ ب) = ل(ب|أ) × ل(أ) بشرط ل(أ) > ٠

مثـ٣ـال إذا كان ل(أ$'$) = ٤ر٠ ، ل(ب) = ٥ر٠ ، ل(أ ∪ ب) = ٨ر٠ احسب ل(أ|ب$'$)

∵ ل(ب$'$) = ١ ـ ل(ب) = ١ ـ ٥ر٠ = ٥ر٠

، ل(أ ∩ ب$'$) = ل(أ∪ب) ـ ل(ب) = ٨ر٠ ـ ٥ر٠ = ٣ر٠

ل(أ|ب$'$) = $\frac{\text{ل(أ∩ب}'\text{)}}{\text{ل(ب}'\text{)}}$ = $\frac{\text{٣ر٠}}{\text{٥ر٠}}$ = $\frac{\text{١٩}}{\text{٣٠}}$

مثـ٤ـال إذا كان ل(ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ب | أ َ) = $\frac{٤}{٧}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$

احسب (أ) ل(أ ∩ ب) (ب) ل(أ ∪ ب)

(أ) ∵ ل(ب ∩ أ) = ل(ب | أ) × ل(أ) = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ∵ ل(ب ∩ أ َ) = ل(ب | أ َ) × ل(أ َ) = $\frac{٤}{٧}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٨}{٣٥}$

∵ ل(ب ∩ أ َ) = ل(أ ∪ ب) ـ ل(أ)

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب ∩ أ َ) + ل(أ) = $\frac{٨}{٣٥}$ + $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢٩}{٣٥}$

مثـ٥ـال ألقى حجر نرد مرة واحدة أحسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عدداً أولياً بشرط أن يكون العدد الظاهر عدداً فردياً

بفرض أن فضاء العينة ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ب عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، أ = {٣ ، ٥} ل(أ) = ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٣}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

مثـ٦ـال فى تجربة جرى نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون

(أ) العدد الظاهر على الحجر الثانى يساوى ٤ علماً بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٢

(ب) مجموع العددين الظاهرين زوجياً علماً بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٦

(أ) بفرض أن فضاء العينة ن (ف) = ٣٦ ، ن(ب) ظهو العدد ٢ فى الحجر الأول = ٦

ل(ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$ ، أ ظهو العدد ٢ فى الحجر الثانى = ٤ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣٦}$

ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٣٦}$ ÷ $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{٦}$

(ب) ن(ء) = ٦ عدد ظهور العدد ٦ فى الحجر الأول ل(ء) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

(حـ) مجموع العددين زوجياً ن(حـ ∩ ء) = ٣ ل(حـ ∩ ء) = $\frac{٣}{٣٦}$ = $\frac{١}{١٢}$

ل(حـ | ء) = $\frac{ل(حـ ∩ ء)}{ل(ء)}$ = $\frac{١}{١٢}$ ÷ $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

مثــال٧ إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان هو ٠٫٧ واحتمال سفره للخارج إذا نجح ٠٫٦
فما احتمال نجاحه وسفره للخارج

نفرض أن الحدث ب (نجاح الطالب) ⟸ ل(ب) = ٠٫٧

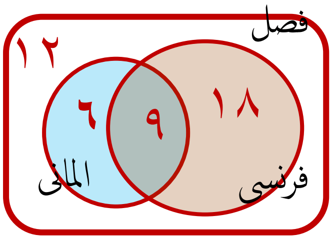
∵ احتمال سفره للخارج إذا نجح (احتمال شرطى) ل(أ | ب) = ٠٫٦

∴ احتمال نجاحه وسفره للخارج ل(أ ∩ ب) = ل(ب) × ل(أ | ب) = ٠٫٧ × ٠٫٦ = ٠٫٤٢

مثــال٨ فصل دراسى به ٤٥ طالباً منهم ٢٧ يدرسون اللغة الفرنسية ، ١٥ يدرسون اللغة الألمانية ، ٩ يدرسون اللغتين معاً اختير طالب من هذا الفصل عشوائياً ، أحسب احتمال أن يدرس الطالب المختار

(أ) مادة واحدة على الأقل من المادتين (ب) يكون دارساً اللغة الفرنسية إذا كان دارساً اللغة الألمانية

(جـ) يكون دارساً اللغة الألمانية إذا كان دارساً اللغة الفرنسية .



الطالب يدرس اللغة الفرنسية ن(أ) = ٢٧ ل(أ) = $\frac{٢٧}{٤٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

الطالب يدرس اللغة الألمانية ن(ب) = ١٥ ل(ب) = $\frac{١٥}{٤٥}$ = $\frac{١}{٣}$

الطالب يدرس اللغتين معاً ن(أ ∩ ب) = ٩ ل(أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٤٥}$ = $\frac{١}{٥}$

(أ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) ـ ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١١}{١٥}$

(ب) دارساً اللغة الفرنسية إذا كان دارساً اللغة الألمانية ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٥}$ ÷ $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٣}{٥}$

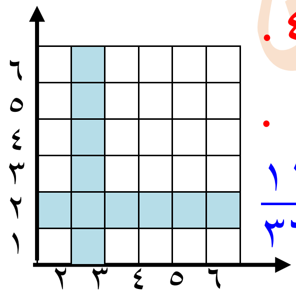
(جـ) دارساً اللغة الألمانية إذا كان دارساً اللغة الفرنسية . ل(ب | أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ = $\frac{١}{٥}$ ÷ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١}{٣}$

مثــال٩ ألقى حجرا نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون

(أ) ظهور العدد ٢ على الوجهين معاً علماً بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما

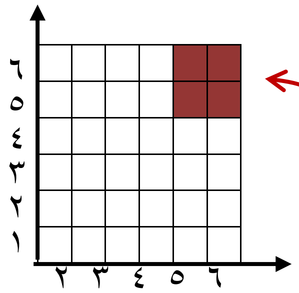
(ب) ظهور العدد ٥ على الوجهين علماً بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤ .

(جـ) عدم ظهور العدد ٣ على أى من الوجهين علماً بأن العددين الظاهرين فرديان .



(أ) ب = {(٢،٢)} ⟸ ل(ب) = $\frac{١}{٣٦}$ ظهور العدد ٢ فى احداهما ل(أ ∩ ب) = $\frac{١١}{٣٦}$

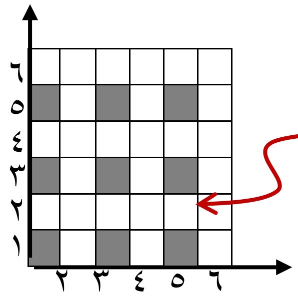
ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٣٦}$ ÷ $\frac{١١}{٣٦}$ = $\frac{١}{١١}$



(ب) ء = (٥،٥)   ل(ء) = $\frac{١}{٣٦}$

العددين الظاهرين > ٤   ل(حـ ∩ ء) = $\frac{٤}{٣٦}$

ل(حـ | ء) = $\frac{ل(حـ ∩ ء)}{ل(ء)}$ = $\frac{١}{٣٦}$ ÷ $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$



(حـ) م = عدم ظهور العدد ٣   ل(م) = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

العددين الظاهرين كل منها فرديان   ل(ك ∩ م) = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

ل(ك | م) = $\frac{ل(ك ∩ م)}{ل(م)}$ = $\frac{١}{٩}$ ÷ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{٩}$

مثـال ١٠ رُقمت قطاعات دائرية متساوية من ١ الى ٨ فى لعبة الدوارة . ما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ أذا عُلم أنه أستقر عند عدد فردى ؟

ب يستقر عند العدد ٥ ⟸ ل(ب) = $\frac{١}{٨}$

إذا أستقر عند عدد فردى   ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$

ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٨}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

مثـال ١١ يبين الجدول التالى أعداد الفرق الرياضية المشاركة فى الألعاب الرياضية المختلفة

اللعبة الرياضية	كرة اليد	كرة القدم	الكرة الطائرة	كرة السلة	كرة الهوكى
عدد الفرق المشاركة	٤	١٠	٦	٧	٣

إذا أختيرت إحدى هذه الألعاب عشوائياً فما احتمال أن تكون من الألعاب

(أ) كرة الهوكى علماً بأنها ليست من ألعاب الكرة الطائرة

(ب) كرة السلة علماً بأنها ليست من ألعاب الكرة القدم وليست من ألعاب كرة اليد

(أ) ب ليس من ألعاب كرة الطائرة ⟸ ل(ب) = $\frac{٢٤}{٣٠}$ لعبة كرة الهوكى ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٣٠}$

ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٣}{٣٠}$ ÷ $\frac{٢٤}{٣٠}$ = $\frac{١}{٨}$

(ب) ليست كرة قدم وليست كرة يد = ل(ء) = $\frac{١٦}{٣٠}$ ء لعبة كرة السلة ل(حـ ∩ ء) = $\frac{٧}{٣٠}$

ل(حـ | ء) = $\frac{ل(حـ ∩ ء)}{ل(ء)}$ = $\frac{٧}{٣٠}$ ÷ $\frac{١٦}{٣٠}$ = $\frac{٧}{١٦}$

مثـــال ١٢ اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٣٠ طالباً و ٢٠ طالبة للمشاركة فى الإجابة عن الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت على النحو التالى

الإجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	٢٠	٦	٤	٣٠
طالبات	١٥	٣	٢	٢٠

إذا أختير إحدى أفراد العينة عشوائياً فما احتمال أن يكون الشخص المختار "طالبة" إجابتها نعم

ب الفرد من الطالبات ⟸ ل(ب) = $\frac{٢٠}{٥٠}$ طالبة وقالت نعم ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٥}{٥٠}$

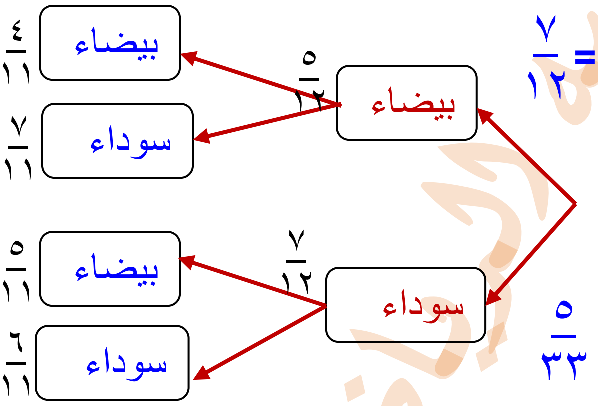
ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل}(أ \cap ب)}{\text{ل}(ب)}$ = $\frac{١٥}{٥٠} \div \frac{٢٠}{٥٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

مثـــال ١٣ صندوق يحتوى على ٥ كرات بيضاء ، ٧ كرات سوداء . سُحبت كُرتان منه على التوالى دون إحلال(دون إرجاع) أوجد احتمال أ، تكون (أ) الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الكرة الأولى بيضاء

(ب) الكرة الأولى والثانية بيضاء   (جـ) الكرة الثانية سوداء والكرة الأولى بيضاء

(أ) احتمال الكرة الأولى بيضاء ل(أ) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ل(ب) = $\frac{٧}{١٢}$

احتمال الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الأولى بيضاء = $\frac{٤}{١١}$



(ب) احتمال الكرة الأولى بيضاء والكرة الثانية بيضاء

ل(أ ∩ ب) = ل(ب/أ) × ل(أ) = $\frac{٤}{١١} \times \frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٥}{٣٣}$

(جـ) احتمال الكرة الثانية سوداء و الكرة الأولى بيضاء

ل(ب ∩ أ) = ل(أ / ب) × ل(ب) = $\frac{٧}{١١} \times \frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٣٥}{١٣٢}$

مثـــال ١٤ يتنافس كريم وزياد فى الترشيح لرئاسة اتحاد طلاب المدرسة ضمن ثلاث صفوف دراسية والجدول التالى يمثل الأصوات التى حصل عليها كل منهما

	الصف الأول	الصف الثانى	الصف الثالث	المجموع
كريم	١٩٦	١٦٥	١٣٠	٥٠٠
زياد	٢٤٠	١٦٥	١٣٥	٥٤٠

إذا أختير طالب من طلاب الفصل عشوائياً فما احتمال أن تكون الطالب

(أ) انتخب المرشح "كريم" علماً بأنه من طلاب الصف الثالث

(ب) أنتخب المرشح " زياد" علماً بأنه من طلاب الصف الثانى

(أ) ب الطالب اختار كريم $\Leftarrow$ $\text{ل(ب)} = \frac{١٦٥}{١٠٤٠}$ كريم بالصف الثالث $\text{ل(أ} \cap \text{ب)} = \frac{١٣٠}{١٠٤٠}$

$$\text{ل(أ|ب)} = \frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{١٣٠}{١٠٤٠} \div \frac{١٦٥}{١٠٤٠} = \frac{٢٦}{٣٣}$$

(ب) د الطالب اختار "زياد" $\text{ل(ء)} = \frac{٣٣٩}{١٠٤٠}$ زياد فى لبصف الثانى $\text{ل(ح} \cap \text{ء)} = \frac{١٦٥}{١٠٤٠}$

$$\text{ل(ح|ء)} = \frac{\text{ل(ح} \cap \text{ء)}}{\text{ل(ء)}} = \frac{١٦٥}{١٠٤٠} \div \frac{٣٣٩}{١٠٤٠} = \frac{٥٥}{١١٣}$$

مثـال ١٥ أُعلن عن وظيفة تقدم لها ١٠٠ شخص ، رُتبت بياناتهم كالآتى . أحسب احتمال أن يكون

	مؤهلون			غير مؤهلين	
	متزوج	أعزب		متزوج	أعزب
ذكر	٤٠	١٠	ذكر	٣	١٢
أنثى	١٠	١٠	أنثى	١٠	٥

(أ) الموظف المختار متزوجاً بشرط أن يكون مؤهلاً (ب) الموظف المختار متزوجا ومؤهلاً

(ج) الموظف المختار متزوجاً بشرط أن يكون غير مؤهل

(أ) بشرط الموظف مؤهلاً $\Leftarrow$ $\text{ل(ب)} = \frac{٧٠}{١٠٠}$ الموظف متزوج $\text{ل(أ} \cap \text{ب)} = \frac{٥٠}{١٠٠}$

$$\text{ل(أ|ب)} = \frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{٥٠}{١٠٠} \div \frac{٧٠}{١٠٠} = \frac{٥}{٧}$$

(ب) الموظف المختار متزوجاً ومؤهلاً $\text{ل(أ} \cap \text{ب)} = \frac{٥٠}{١٠٠}$

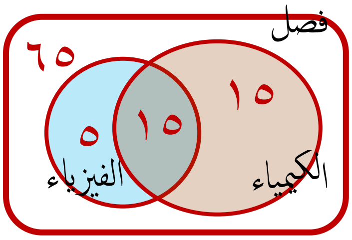
(ج) د بشرط الموظف غير مؤهلاً $\text{ل(ء)} = \frac{٣٠}{١٠٠}$ الموظف متزوج $\text{ل(ح} \cap \text{ء)} = \frac{١٣}{١٠٠}$

$$\text{ل(ح|ء)} = \frac{\text{ل(ح} \cap \text{ء)}}{\text{ل(ء)}} = \frac{١٣}{١٠٠} \div \frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{١٣}{٣٠}$$

مثـال ١٦ فى اختبار آخر العام وجد أن ٣٠٪ من الطلبة رسبوا فى الكيمياء ، ٢٠٪ رسبوا فى الفيزياء ، ١٥٪ رسبوا فى المادتين . اختير أحد الطلبة عشوائياً إذا كان الطالب

(أ) المختار راسباً فى الكيمياء ،فما احتمال رسوبه فى الفيزياء (جـ) رسوبة فى الكيمياء بشرط عدم رسوبه فى الفيزياء

(ب) المختار راسباً فى الفيزياء ،فما احتمال رسوبه فى الكيمياء (د) نجاحه فى الفيزياء بشرط نجاحه فى الكيمياء



الطالب يرسب فى الكيمياء ل (أ) = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ ناجح ل (أ$'$) = $\frac{٧٠}{١٠٠}$

الطالب يرسب فى الفيزياء ل (ب) = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ ناجح ل (ب$'$) = $\frac{٨٠}{١٠٠}$

الطالب يرسب فى المادتين معاً ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١٥}{١٠٠}$

(أ) راسباً فى الكيمياء ،فما احتمال رسوبه فى الفيزياء ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = $\frac{١٥}{١٠٠} \div \frac{٢٠}{١٠٠}$ =

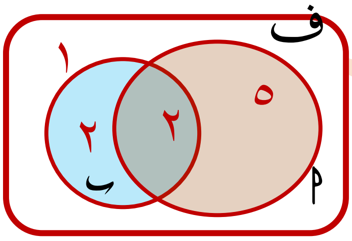
(ب) راسباً فى الفيزياء ،فما احتمال رسوبه فى الكيمياء (ب | أ) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(أ)}}$ = $\frac{١٥}{١٠٠} \div \frac{٣٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(جـ) رسوبة فى الكيمياء بشرط عدم رسوبه فى الفيزياء . ل(أ | ب$'$) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب}'\text{)}}{\text{ل(ب}'\text{)}}$ = $\frac{١٥}{١٠٠} \div \frac{٨٠}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{١٦}$

(د) نجاحه فى الفيزياء بشرط نجاحه فى الكيمياء . ل(ب$'$ | أ$'$) = $\frac{\text{ل (أ}' \cap \text{ب}'\text{)}}{\text{ل(أ}'\text{)}}$ = $\frac{٦٥}{١٠٠} \div \frac{٧٠}{١٠٠}$ = $\frac{١٣}{١٤}$

مثـال ١٧ استخدم شكل فن : أ ، ب حدثان فى فضاء عينة حيث ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٢ . أوجد احتمالات الاحداث الآتية

(أ) وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب (ب) وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ



ل (أ) = $\frac{٧}{١٠}$ $\Leftarrow$ ل (أ$'$) = ١ - $\frac{٧}{١٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ل (ب) = $\frac{٤}{١٠}$ $\Leftarrow$ ل (ب$'$) = ١ - $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٦}{١٠}$

ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{٢}{١٠}$ $\Leftarrow$ ل (أ $\cap$ ب$'$) = $\frac{٧}{١٠}$ - $\frac{٢}{١٠}$ = $\frac{٥}{١٠}$

(أ) وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب ل(أ | ب$'$) = $\frac{\text{ل (أ} \cap \text{ب}'\text{)}}{\text{ل(ب}'\text{)}}$ = $\frac{٥}{١٠} \div \frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٥}{٦}$

(ب) وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ (ب | أ$'$) = $\frac{\text{ل (أ}' \cap \text{ب)}}{\text{ل(أ}'\text{)}}$ = $\frac{٢}{١٠} \div \frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٢}{٣}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور كتابة فى الرمية الثانية إذا ظهرت صورة فى الرمية الأولى تساوى:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

ب ظهور صورة فى الرمية الأولى ⟸ ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ظهور كتابة فى الرمية الثانية ل(م ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

ل(م | ب) = $\frac{ل(م \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٤} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجى أولى إذا ظهر عدد أكبر من ١ هو:

أ) $\frac{١}{٥}$ ب) $\frac{٢}{٥}$ ج) $\frac{٣}{٥}$ د) $\frac{٤}{٥}$

ب عدد أكبر من ١ ⟸ ل(ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ظهور عدد زوجى أولى ل(م) = ل(م ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(م | ب) = $\frac{ل(م \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦} \div \frac{٥}{٦} = \frac{١}{٥}$

٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور العدد ٣ علمًا بأن العدد الظاهر فردى هو:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٣}{٤}$

ب ظهور عدد فردى ⟸ ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ ، ظهور العدد ٣ ل(م) = ل(م ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(م | ب) = $\frac{ل(م \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦} \div \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٣}$

٤) إذا كان ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(أ) = $\frac{٤}{٥}$ فإن ل(ب | أ) =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{٨}{٢٥}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{٢}{٥}$

ل(ب | م) = $\frac{ل(م \cap ب)}{ل(م)}$ = $\frac{٢}{٥} \div \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٢}$

٥) إذا كان ل(أ | ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ) $\frac{٤}{٢٥}$ ب) $\frac{١}{٤}$ ج) $\frac{٢٥}{٣٦}$ د) $\frac{١٦}{٢٥}$

ل(م ∩ ب) = ل(م | ب) × ل(ب) = $\frac{١}{٣} \times \frac{١٢}{٢٥} = \frac{٤}{٢٥}$

الحدثان المستقلان

أى أن حدوث الحدث ب لم يؤثر على احتمال حدوث الحدث م يعنى أن احتمال م لا يعتمد معلوميته أن الحدث ب قد وقع لذا نقول إن الحدثين م ، ب مستقلان

تعريف يقال إن الحدثين م ، ب مستقلان إذا وإذا كان ل (م ∩ ب) = ل (م) × ل (ب)

يلاحظ أن (١) إذا كان الحدثان م ، ب مستقلين وكان ل(ب) ≠ صفر فإن ل (م | ب) = ل (م)

(٢) الحدثين المتنافيان م ، ب مستقلين إذا وإذا كان ل (م) × ل (ب) = صفر

مثـ١ـال إذا ألقيت قطعة نقود ثم ألقى حجر نرد مرة واحدة . فما احتمال ظهور صورة والعدد ٣ ؟

م ، ب حدثان مستقلان ، م ظهور العدد ٣ ل (م) = $\frac{١}{٦}$ ، ب ظهور صورة ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

احتمال ظهور صورة والعدد ٣ = ل (م ∩ ب) = ل (م) × ل(ب) = $\frac{١}{٦}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٢}$

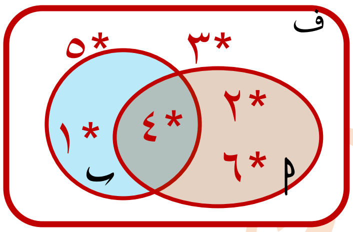
حل آخر ف = {(ص،١) ، (ص ،٢) ، (ص،٣) ، (ص ،٤) ، (ص،٥) ، (ص،٦) ، (ك،١) ، (ك،٢) ، (ك،٣) ، (ك،٤) ، (ك،٥) ، (ك،٦) } ∴ احتمال ظهور صورة والعدد ٣ = $\frac{١}{١٢}$

مثـ٢ـال إذا ألقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية . فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات ؟

، م ظهور كتابة فى الرمية الأولى ل (م) = $\frac{١}{٢}$ ، ب ظهور كتابة فى الرمية الثانية ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

تكرار ٤ مرات احتمال الحصول على كتابة أربع مرات = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٦}$

مثـ٣ـال ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإذا كان م حدث ظهور عدد زوجى . ب حدث ظهور عدد مربع هل م ، ب حدثان مستقلان ؟ فسر إجابتك ؟



، م حدث ظهور عدد زوجى = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ل (م) = $\frac{١}{٢}$

، ب حدث ظهور عدد مربع = { ١ ، ٤ } ل(ب) = $\frac{١}{٣}$

∴ ل (م ∩ ب) = ل (م) × ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$ ---- (١)

من شكل فن ل (م ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ --- (٢) من (١) ، (٢) ∴ م ، ب هما حدثان مستقلان

مثـ٤ـال إذا كان م ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(م ∪ ب) = ٠,٥

أوجد قيمة ل(أ) إذا كان أ ، ب حدثين (أ) حدثان متنافيان (ب) حدثين مستقلين

(أ) ∵ أ ، ب متنافيان ∴ ل(أ) = ل(أ ∪ ب) ـ ل(ب) = ٠,٥ ـ ٠,٣ = ٠,٢

(ب) ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) ـ ل(أ ∩ ب) ⟸ ٠,٥ = ل(أ) + ٠,٣ ـ ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ـ ٠,٢ ----- (١)

∵ أ ، ب مستقلين ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ٠,٣ -- (٢) من (١)، (٢) ∴ ل(أ) = $\frac{٢}{٧}$

مثـ٥ـال يحتوى كيس على مجموعة من البلى موزعة على النحو التالى ٢ حمراء ، ٣ خضراء ، واحدة زرقاء. اختيرت عشوائياً بلية واحدة مع الأحلال ، ثم اختيرت بلية ثانية . أوجد احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين ؟

أ ظهور البلية الأولى خضراء ل (أ) = $\frac{٣}{٦}$ ، ب ظهور البلية الثانية خضراء ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$

احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

مثـ٦ـال يحتوى كيس على مجموعة من البلى موزعة على النحو التالى ٢ حمراء ، ٣ خضراء ، واحدة زرقاء. اختيرت عشوائياً بلية واحدة بدون الأحلال ، ثم اختيرت بلية ثانية . أوجد احتمال إن تكون الأولى زرقاء والثانية حمراء ؟

أ ظهور البلية الأولى زرقاء ل (أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ب ظهور البلية الثانية حمراء ل(ب) = $\frac{٢}{٥}$

احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{١}{٦} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١}{١٥}$

الأحداث غير المستقلة

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان $\boxed{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) \neq \text{ل}(\text{أ}) \times \text{ل}(\text{ب})}$

بمعنى أن الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما فى احتمال حدوث الآخر

الفرق بين الحدثين المستقلين والحدثين المتنافيين

فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإن فضاء العينة ف = { ص ، ك } ونعلم أن

ل(ص) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ك) = $\frac{١}{٢}$ ونعلم أيضاً ل (ص ∩ ك) = صفر (لأنهما متنافيان)

ولكن ل(ص) × ل(ك) = $\frac{١}{٤}$ ≠ صفر نستنتج إن ص ، ك متنافيان إلا انهما غير مستقلين

مثـ٧ـال يحتوى كيس على الكرات التالية ٦ حمراء ، ٤ برتقالية ، ٣ صفراء ، ٥ خضراء ، ٢ زرقاء.
اختيرت عشوائياً كرة واحدة بدون الأحلال ، ثم اختيرت كرة ثانية . أوجد احتمال إن تكون الكرات المسحوبة

(أ) حمراء وزرقاء (ب) حمراء وصفراء (جـ) حمراء وحمراء (د) برتقالية وزرقاء

(أ) أ ظهور الكرة الأولى حمراء ل (أ) = $\frac{٦}{٢٠}$ ، ب ظهور الكرة الثانية زرقاء ل(ب) = $\frac{٢}{١٩}$

احتمال الكرات المسحوبة حمراء وزرقاء = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{٦}{٢٠} \times \frac{٢}{١٩} = \frac{٣}{٩٥}$

(ب) أ ظهور الكرة الأولى حمراء ل (أ) = $\frac{٦}{٢٠}$ ، ب ظهور الكرة الثانية صفراء ل(ب) = $\frac{٣}{١٩}$

احتمال الكرات المسحوبة حمراء وصفراء = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{٦}{٢٠} \times \frac{٣}{١٩} = \frac{٩}{١٩٠}$

(جـ) أ ظهور الكرة الأولى حمراء ل (أ) = $\frac{٦}{٢٠}$ ، ب ظهور الكرة الثانية حمراء ل(ب) = $\frac{٥}{١٩}$

احتمال الكرات المسحوبة حمراء وحمراء = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{٦}{٢٠} \times \frac{٥}{١٩} = \frac{١٥}{١٩٠}$

(د) أ ظهور الكرة الأولى برتقالية ل (أ) = $\frac{٤}{٢٠}$ ، ب ظهور الكرة الثانية زرقاء ل(ب) = $\frac{٢}{١٩}$

احتمال الكرات المسحوبة برتقالية وزرقاء = ل (أ) × ل(ب) = $\frac{٤}{٢٠} \times \frac{٢}{١٩} = \frac{٢}{٩٥}$

مثـ٨ـال يصوب جنديان أ ، ب طلقة واحدة نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب الجندى الأول الهدف هو ٠٫٤ واحتمال أن يصيب الجندى الثانى الهدف هو ٠٫٧ أولاً أوجد احتمال أن يصيب

(أ) الجنديان الهدف (ب) احداهما الهدف على الأقل (جـ) أحدهما فقط الهدف (د) أحدهما الهدف على الأكثر

(أ) أ يصيب الأول الهدف ل (أ) = ٠٫٤ ، ب يصيب الثانى الهدف ل(ب) = ٠٫٧

احتمال أن يصيب الجنديان الهدف = ل (أ) × ل(ب) = ل (أ ∩ ب) = ٠٫٤ × ٠٫٧ = ٠٫٢٨

(ب) احتمال أن يصيب احداهما الهدف على الأقل ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) ـ ل (أ ∩ ب)

= ٠٫٤ + ٠٫٧ ـ ٠٫٢٨ = ٠٫٨٢

(جـ) احتمال أحدهما فقط الهدف = ل (أ ∪ ب) ـ ل (أ ∩ ب) = ٠٫٨٢ ـ ٠٫٢٨ = ٠٫٥٤

(د) احتمال أحدهما الهدف على الأكثر = ١ ـ ل (أ ∩ ب) = ١ ـ ٠٫٢٨ = ٠٫٧٢

الوحدة الثالثة

المتغير العشوائى

المتغير العشوائى :

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية

فـــإن : أى دالة س : ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

المتغير العشوائى المتقطع " المنفصل ، الوثاب " :

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى :

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_١$ ، $س_٢$ ، ...، $س_ر$ }

فإن الدالة د المعرفة كالآتى : د : { $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ..... ، $س_ر$ } ← ح

حيث : د ($س_ر$) = ل (س = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ ، ن

تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د

ملاحظات :

(١) الدالة د تحقق الشرطين :

١ – د ($س_ر$) ⩾ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ ، ن

٢ – د ($س_١$) + د ($س_٢$) + د ($س_٣$) +...... + د ($س_ن$) = ١

و أى دالة تحقق هذين الشرطين تصلح أن تكون توزيعاً إحتمالياً لمتغير عشوائى متقطع س مداه هو { $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ٠٠٠ ، $س_ن$

(٢) يكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س بالصورة :

$س_ر$	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	٠٠٠	$س_ن$
د ($س_ر$)	د ($س_١$)	د ($س_٢$)	د ($س_٣$)	٠٠٠	د ($س_ن$)

فمثلاً : فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد الصور نجد أن :

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

① ② ①

مدى المتغير العشوائى س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ن (ف) = ٤

، د (٢) = $\frac{1}{4}$ ، د (١) = $\frac{1}{2}$ ، د (٠) = $\frac{1}{4}$

التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى من الجدول :

س	٢	١	٠
د (س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

الوسط الحسابى و الإنحراف المعيارى للمتغير العشوائى المتقطع

إذا كان س متغير عشوائى له توزيع إحتمالى فإن أى دراسة إحصائية لهذا التوزيع تعتمد على التعرف على
مقياسين من المقاييس الإحصائية هما :

- **النزعة المركزية** : و هى القيمة التى تتمركز عندها قيم هذا المتغير العشوائى
- **التشتت** : و هو يبين إلى أى مدى تتشتت قيم المتغير العشوائى حول نزعته المركزية

الوسط الحسابى هو أحد مقاييس النزعة المركزية ، التباين هو أحد مقاييس التشتت و كذلك إنحراف المعيارى

الوسط الحسابى و التباين و الإنحراف المعيارى :

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_١$ ، $س_٢$ ، .... ، $س_ر$ }

بإحتمالات د ($س_١$) ، د ($س_٢$) ، د ($س_٣$) ، ...... ، د ($س_ر$) على الترتيب فإن

الوسط الحسابى " التوقع " (μ) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر$. د ($س_ر$)

أى أن : μ = $س_١$. د ($س_١$) + $س_٢$. د ($س_٢$) + ... + $س_ر$. د ($س_ر$)

التباين : (σ^2) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر^2$. د ($س_ر$) − μ^2

الإنحراف المعيارى : (σ) = $\sqrt{\sigma^2}$

معامل الإختلاف : إذا إختلفت وحدات كل من الوسط الحسابى و الإنحراف المعيارى نستخدم معامل الإختلاف للمقارنة بين تشتت المجموعتين

معامل الإختلاف = $\frac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$ × ١٠٠

مثـــ١ــال(٢٠١٥) إذا كان س متغير عشوائياً متقطعاًتوزيعة الاحتمالى بالجدول التالى

$س_ر$	٢-	١-	١	٣
$د(س_ر)$	٠,١٥	٠,٢٥	٠,٢٥	ك

(أ) أوجد قيمة ك (ب) أحسب قيمة توقع المتغير س ثم أستنتج معامل الأختلاف

الحـــــــــــــل

∵ مجموع القيم الأحتمالية =١ ∴ ك = ١ ـ (٠,١٥+ ٠,٢٥ + ٠,٢٥)=٠,٣٥

المتوسط الحسابى

$\mu = \sum س_ر . د(س_ر) =$ ٠,٧٥

التباين $\sigma^2 = \sum س_ر^2 . د(س_ر) - \mu^2$

$\sigma^2 =$ ٤,٢٥ ـ (٠,٧٥)^2 = ٣,٦٨٧٥

الأنحراف المعيارى = $\sqrt{\sigma^2}$ = ١,٩٢

معامل الإختلاف = $\frac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$ × ١٠٠ = $\frac{١,٩٢}{٠,٧٥}$ × ١٠٠ ٪ ≃ ٢٥٦٪

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر د(س_ر)$	$س_ر^2 \times د(س_ر)$
٢-	٠,١٥	٠,٣٠-	٠,٦
١-	٠,٢٥	٠,٢٥ ـ	٠,٢٥
١	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥
٣	٠,٣٥	١,٠٥	٣.١٥
$\sum$	١	٠,٧٥	٤,٢٥

مثـــ٢ــال (٢٠١٣) إذا كان س متغيرا عشوائياً متقطعاً مداه { ـ٣ ، ـ٢ ، ١ ، ٢} وكان

د(س = ـ٣) = د(س = ـ٢) = $\frac{١}{٨}$ ، د(س = ٢) = $\frac{١}{٢}$ أحسب

(أ) د(س = ١) (ب) المتوسط والتباين للمتغير العشوائى س

الحـــــــــــــل

∵ مجموع القيم الأحتمالية =١

∴ د(س = ١) = ١ ـ ($\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$)= $\frac{١}{٤}$

المتوسط الحسابى

$\mu = \sum س_ر . د(س_ر) =$ ٠,٦٢٥

التباين $\sigma^2 = \sum س_ر^2 . د(س_ر) - \mu^2$

$\sigma^2 =$ ٣,٨٧٥ ـ (٠,٦٢٥)^2 ≃ ٣,٤٨

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر د(س_ر)$	$س_ر^2 \times د(س_ر)$
٣-	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$ ـ	$\frac{٩}{٨}$
٢-	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$ ـ	$\frac{٤}{٨}$
١	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$
٢	$\frac{١}{٢}$	١	٢
$\sum$	١	$\frac{٥}{٨}$ = ٠,٦٢٥	٣,٨٧٥

مثــ٣ــال(٢٠١٢) إذا كان س متغير عشوائياً متقطعاًتوزيعة الاحتمالى بالجدول التالى

$س_ر$	ـ٢	ـ١	صفر	٣	٤
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$ ك	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$ك	$\frac{٣}{٨}$

(أ) أوجد قيمة ك (ب) أحسب قيمة الوسط الحسابى والتباين المتغير س

الحـــــــــــل

∵ مجموع القيم الأحتمالية = ١

$$\frac{١}{٤}ك + \frac{١}{١٦} + \frac{٣}{١٦} + \frac{١}{٨}ك + \frac{٣}{٨} = ١$$

∴ $\frac{٣}{٨}ك = \frac{٣}{٨}$ ∴ ك = ١

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر د(س_ر)$	$س_ر^٢ \times د(س_ر)$
ـ٢	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٢}$	١
ـ١	$\frac{١}{١٦}$	$-\frac{١}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$
٠	$\frac{٣}{١٦}$	٠	٠
٣	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$١\frac{١}{٨}$
٤	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٢}$	٦
Σ	١	$١\frac{٥}{١٦}$	$٨\frac{٣}{١٦}$

المتوسط الحسابى

$$\mu = \Sigma\, س_ر . د(س_ر) = ١\frac{٥}{١٦}$$

التباين $\sigma^٢ = \Sigma\, س_ر^٢ . د(س_ر) - \mu^٢$

$$\sigma^٢ = ٨\frac{٣}{١٦} - (١\frac{٥}{١٦})^٢ = ٦,٤٦٥$$

مثــ٤ــال (٢٠١٥) إذا كان س متغيرا عشوائياً متقطعاً مداه { ـ٢ ، ـ١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

وكان د(س = ر) = $\frac{أ + ر}{١٥}$ لكل ر تنتمى إلى مدى س

(أ) أوجد قيمة أ (ب) المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير س

الحـــــــــــل

∵ مجموع القيم الأحتمالية = ١

$$∴ \frac{أ-٢}{١٥} + \frac{أ-١}{١٥} + \frac{أ}{١٥} + \frac{أ+١}{١٥} + \frac{أ+٢}{١٥} = ١$$

$\Leftarrow \frac{٥أ}{١٥} = ١$ أ∴ = ٣

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر د(س_ر)$	$س_ر^٢ \times د(س_ر)$
ـ٢	$\frac{١}{١٥}$	$-\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$
ـ١	$\frac{٢}{١٥}$	$-\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٢}{١٥}$
٠	$\frac{٣}{١٥}$	٠	٠
١	$\frac{٤}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$
٢	$\frac{٥}{١٥}$	$\frac{١٠}{١٥}$	$١\frac{٥}{١٥}$
Σ	١	$\frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$	٢

الوسط الحسابى

$$\mu = \Sigma\, س_ر . د(س_ر) = \frac{٢}{٣}$$

التباين $\sigma^٢ = \Sigma\, س_ر^٢ . د(س_ر) - \mu^٢$

$\sigma^٢ = ٢ - (\frac{٢}{٣})^٢ \simeq ١\frac{٥}{٩}$ الانحراف المعيارى∴ $\sigma = ١,٢٤٧$

تمارين : أولاً أكمـــل ما يأتى

(١) إذا كان س متغيراً عشوائياً متوسطه ٢٥ ، معامل الاختلاف له يساوى ١٢ ٪ فإن التباين له هو ....

(٢) فى المتغير العشوائى المتقطع يكون معامل الاختلاف غير معرف عندما ....

(٣) إذا كان س متغير عشوائى مداه = { ٢ ، ٣ } وكانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س هى د(س) = م س فإن م = ...

(٤) إذا كان معامل الاختلاف لمتغيرعشوائى متقطع يساوى ٥٠ ٪ وكان وسطه الحسابى ٣ ، فإن تباينه هو ....

ثانياً:

[١] (٢٠١١) إذا كان س متغير عشوائياً متقطعاًتوزيعة الاحتمالى بالجدول التالى

$س_ر$	صفر	١	٢	٣	٤
د($س_ر$)	٠,٢٥	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١٥

أحسب المتوسط (μ) و الأنحراف المعيارى (σ) للمتغير س

[٢] (٢٠١٤) إذا كان س متغير عشوائياً متقطعاًتوزيعة الاحتمالى بالجدول التالى

$س_ر$	صفر	١	٢	٣
د($س_ر$)	٠,١	٠,٢	٠,٣	ك

(أ) أوجد قيمة ك (ب) أحسب المتوسط (μ) و معامل الأختلاف للمتغير س

[٣] (٢٠١١) إذا كان س متغير عشوائياً متقطعاًتوزيعة الاحتمالى بالجدول التالى

$س_ر$	ـ١	صفر	١	٢	٣
د($س_ر$)	٢ل	ل	٣ل	٢ل	ل

(ب) أوجد قيمة ل (ب) أحسب المتوسط (μ) و التباين للمتغير العشوائى س

[٤] (٢٠١٠) إذا كان س متغيرا عشوائياً متقطعاً مداه { ـ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤} وكان

ل(س = ر) = $\frac{م + ر}{٢٠}$ لكل ر تنتمى إلى مدى س

(أ) أوجد قيمة م (ب) المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير س

المتغير العشوائى المتصل " المستمر "

المتغير العشوائى المتصل :

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى المتصل :

إذا كان س متغير عشوائى متصل مداه الفترة [أ ، ب] ،

الدالة د حيث د : [أ ، ب] ← ح بحيث تحقق :

(١) د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

(٢) الشكل البيانى لهذه الدالة هو منحنى متصل بحيث تكون مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة و فوق [أ ، ب] مساوية للواحد الصحيح

دالة الكثافة :

إذا كان س متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية د تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان : ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى د و فوق محور السينات فى [أ ، ب]

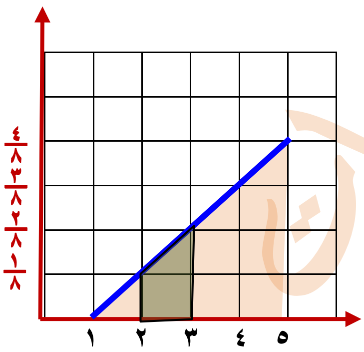
و ذلك لكل عددين حقيقين أ ، ب حيث أ ≤ ب

مثـــال١ (٢٠١٥) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (س) = { (س − ١)/٨ : ١ ≤ س ≤ ٥ ، صفر فيما عدا ذلك }

(أ) أثبت أن د(س) هى دالة كثافة الاحتمال (ب) أحسب ل(٢ < س < ٣)

الحـــــــــــل



د(١) = (١ − ١)/٨ = ٠ ، د(٥) = (٥ − ١)/٨ = ٤/٨ = ١/٢

ل(١ ≤ س ≤ ٥) = ١/٢ [٠ + ١/٢] (٥ − ١) = ١/٤ × ٤ = ١

∴ الدالة دالة كثافة

د(٢) = (٢ − ١)/٨ = ١/٨ ، د(٣) = (٣ − ١)/٨ = ٢/٨

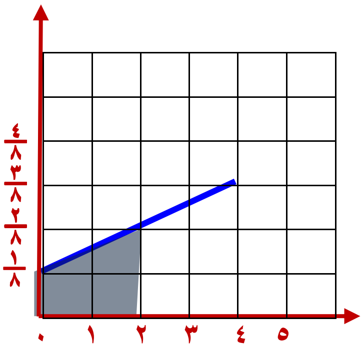
ل(٢ < س < ٣) = ١/٢ [١/٨ + ٢/٨] (٣ − ٢) = ١/٢ × ٣/٨ = ٣/١٦

مثـــ٢ـــال (٢٠١٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{١٦}(\text{س} + ٢) & : ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(أ) أحسب ل(س < ٢) (ب) إذا كان ل(ك < س < ك + ٢) = $\frac{١}{٢}$ أوجد ك

الحــــــــــــــــــــل



$\text{د}(٠) = \frac{٠+٢}{١٦} = \frac{٢}{١٦}$ ، $\text{د}(٢) = \frac{٢+٢}{١٦} = \frac{٤}{١٦}$

$\text{ل}(\text{س} \leqslant ٢) = \text{ل}(٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢)$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{٢}{١٦} + \frac{٤}{١٦}\right](٢ - ٠) = \frac{٣}{٨} \times ١ = \frac{٣}{٨}$

$\text{د}(\text{ك}) = \frac{\text{ك} + ٢}{١٦}$ ، $\text{د}(\text{ك} + ٢) = \frac{\text{ك} + ٤}{١٦}$

$\text{ل}(\text{ك} \leqslant \text{س} \leqslant \text{ك} + ٢) = \frac{١}{٢}\left[\frac{\text{ك} + ٢}{١٦} + \frac{\text{ك} + ٤}{١٦}\right](\text{ك} + ٢ - \text{ك}) = \frac{١}{٢}$

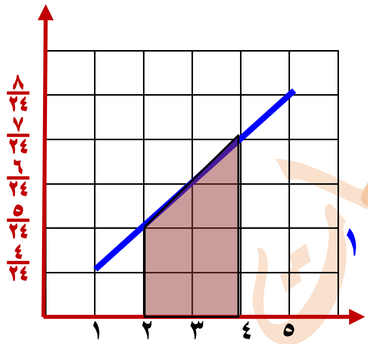
$\frac{٢\text{ك} + ٦}{١٦} \times ١ = \frac{١}{٢} \Longleftarrow ٤\text{ك} + ١٢ = ١٦ \quad \therefore \text{ك} = ١$

مثـــ٣ـــال (٢٠١٣) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤}\text{س} + \text{ك} & : ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(أ) أحسب قيمة ك ثم أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٤)

الحــــــــــــــــــــل



∵ الدالة دالة كثافة ، $\text{د}(١) = \frac{١}{٢٤} + \text{ك}$ ، $\text{د}(٥) = \frac{٥}{٢٤} + \text{ك}$

$\text{ل}(١ \leqslant \text{س} \leqslant ٥) = \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٢٤} + \text{ك} + \frac{٥}{٢٤} + \text{ك}\right](٥ - ١) = ١$

$= \left(\frac{١}{٤} + ٢\text{ك}\right) \times ٢ = \frac{١}{٢} + ٤\text{ك} = ١ \quad \therefore \text{ك} = \frac{١}{٨}$

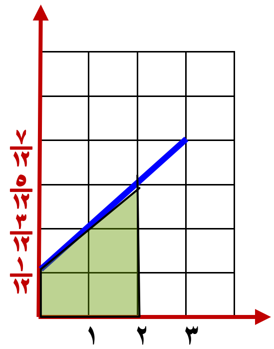
$\text{د}(٢) = \frac{٢}{٢٤} + \frac{١}{٨} = \frac{٥}{٢٤}$ ، $\text{د}(٤) = \frac{٤}{٢٤} + \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٢٤}$

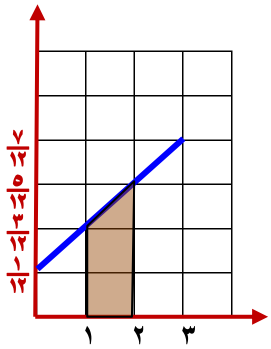
$\text{ل}(٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤) = \frac{١}{٢}\left[\frac{٥}{٢٤} + \frac{٧}{٢٤}\right](٤ - ٢) = \frac{١}{٢}$

مثــ٤ــال (٢٠١٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (س) = { ١/١٢ (٢س + ١) : ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

(أ) أحسب (أ) ل(س ≤ ٢) (ب) ل(١ ≤ س ≤ ٢)





الحـــــــــــــــل

، د(٠) = ١/١٢ (١) ، د(٢) = ١/١٢ (٤+١)

ل(س ≤ ٢) = ل(٠ ≤ س ≤ ٢)

= ١/٢ (١/١٢ + ٥/١٢) × (٢ − ٠) = ١/٢

، د(١) = ١/١٢ (٢+١)

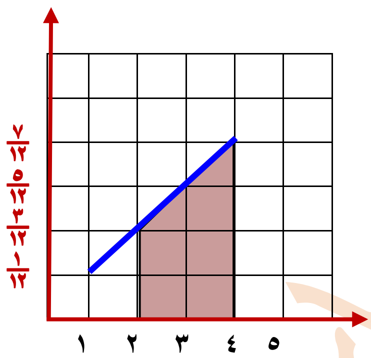
ل(١ ≤ س ≤ ٢) = ١/٢ [٣/١٢ + ٥/١٢] (٢ −١) = ١/٢ × ٢/٣ = ١/٣

مثــ٥ــال (٢٠١٥) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (س) = { ١/١٢ (٢س − ١) : ١ ≤ س ≤ ٤ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أحسب (أ) ل(٢ < س < ٤) (ب) إذا كان ل(س ≤ م) = ١/٦ أوجد قيمة م

الحـــــــــــــــل



، د(٢) = ١/١٢ (٤ − ١) ، د(٤) = ١/١٢ (٨ − ١)

ل(٢ ≤ س ≤ ٤) = ١/٢ (٣/١٢ + ٧/١٢) × (٤ − ٢) = ٥/٦

، د(م) = ١/١٢ (٢م − ١)

ل(١ ≤ س ≤ م) = ١/٢ [١/١٢ + ٢/١٢ م − ١/١٢] × (م − ١) = ١/٦

⟸ ١/١٢ م (م − ١) = ١/٦ ×١٢ ∴ م² − م − ٢ = ٠

(م −٢)(م + ١) = ٠ ∴ م = ٢ ، أ م = −١ مرفوض

تمارين: أولاً إختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه لكى تكون العبارات صحيحة

(١) إذا كانت د(س) = ك س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤
صفر فيما عدا ذلك

دالة كثافة لمتغير عشوائى متصل . فإن ك = ... [$\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{12}$]

(٢) إذا كانت د(س) = $\frac{1}{50}$ (١٧ ـ ٢س) عندما ١ ⩽ س ⩽ ٦
صفر فيما عدا ذلك

فإن ل (٢ < س ⩽ ٥) = ... [$\frac{7}{25}$ ، $\frac{11}{25}$ ، ٠,٦ ، ١]

---

[١] (٢٠١٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (س) = $\frac{1}{4}$ (س + أ) : ٠ ⩽ س ⩽ ٢
صفر فيما عدا ذلك

(أ) أوجد قيمة أ (ب) أحسب ل($\frac{1}{2}$ ⩽ س ⩽ $\frac{3}{2}$)

---

[٢] (٢٠١١) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (أ) = $\frac{1}{18}$ (أ + ٢) : ـ٢ ⩽ أ ⩽ ٤
صفر فيما عدا ذلك

(أ) أثبت أن د(أ) دالة كثافة (ب) أحسب ل(٠ ⩽ أ ⩽ ٢)

---

[٣] (٢٠١١) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

د (س) = $\frac{1}{24}$ (س + ك) : ٢ ⩽ س ⩽ ٦
صفر فيما عدا ذلك

(أ) أوجد قيمة ك (ب) أحسب ل(س ⩽ ٤)

---

[٤] (٢٠١٠) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت دالة كثافة الاحتمال هى

د (س) = $\frac{1}{32}$ (س + ٤) : ـ ك ⩽ س ⩽ ك
صفر فيما عدا ذلك

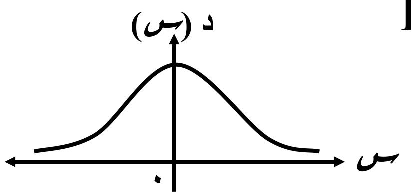
أوجد (أ) قيمة ك (ب) ل(س ⩽ ٠) (جـ) ل(ـ٢ ⩽ س ⩽ ٢)

الوحدة الرابعة

التوزيع الطبيعى "الإعتدالى"

التوزيع الطبيعى :

هو توزيع لمتغير عشوائى س متصل مداه] − ∞ ، ∞ [
و دالة كثافة الإحتمال له دالة أسية تعتمد على القيمتين
μ " الوسط الحسابى " ، σ " الإنحراف المعيارى "
لهذا المتغير العشوائى س و منحنى هذه
الدالة يسمى بالمنحنى الطبيعى و يطلق عليه منحنى جاوس
و يأخذ شكل الجرس

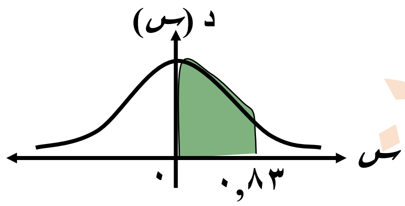


خواص المنحنى الطبيعى :

١ – المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
٢ – متماثل بالنسبة للمستقيم : س = μ
٣ – له قيمة واحدة عند س = μ
٤ – يتزايد فى] − ∞ ، μ [، و يتناقص فى] μ ، ∞ [
٥ – يقترب طرفاه من محور السينات دون أن يقطعه

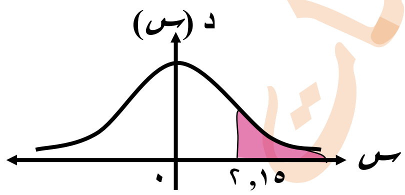
التوزيع الطبيعى المعيارى :

هو توزيع طبيعى وسطه الحسابى μ = صفر ، و إنحرافه المعيارى σ = ١



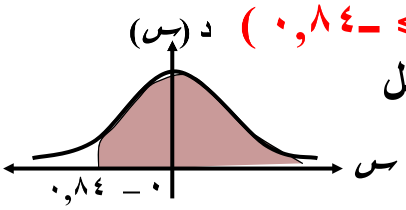
مثــ١ــال ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٣) = ٠,٢٩٦٧

مثــ٢ــال إذا كان ص متغير طبيعى معيارى أوجد : ل (ص ≥ ٢,١٥)



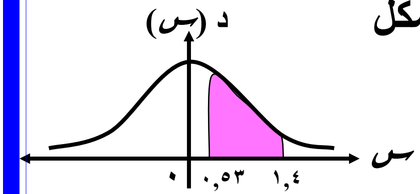
ل (ص ≥ ٢,١٥) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل
= ٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,١٥)
= ٠.٥ – ٠,٤٨٤٢ = ٠,٠١٥٨

مثــ٣ــال إذا كان ص متغير طبيعى معيارى أوجد : ل (ص ≥ -٠,٨٤)



ل (ص ≥ – ٠,٨٤) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل
= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٤)
= ٠.٥ + ٠,٢٠٠٥ = ٠,٧٠٠٥

مثـ٤ـال إذا كان ص متغير طبيعى معيارى أوجد : ل (٠,٥٣ ≤ ص ≤ ١,٤)

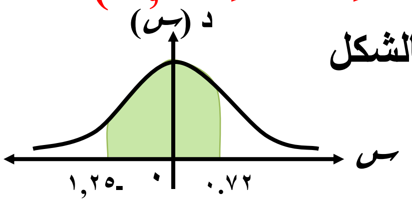


ل (٠,٥٣ ≤ ص ≤ ١,٤) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤) – ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٥٣)

= ٠,٤١٩٢ – ٠,٢٠١٩ = ٠,٢١٧٣

مثـ٥ـال إذا كان ص متغير طبيعى معيارى أوجد : ل (-١,٢٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٢)



ل (-١,٢٥ ≤ ص ≤ ٠,٧٢) = مساحة المنطقة المظللة بالشكل

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥) + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧٢)

= ٠,٣٩٤٤ + ٠,٢٦٤٢ = ٠,٦٥٨٦

حساب الإحتمالات لمتغير طبيعى غير معيارى

قاعدة التحويل إلى متغير طبيعى معيارى :

إذا كان س متغير طبيعى غير معيارى و سطه الحسابى μ و إنحرافه المعيارى σ نحول هذا المتغير إلى متغير طبيعى معيارى ص بالقاعدة

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

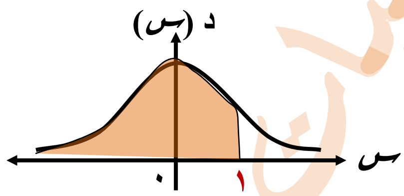
و يكون : ل (أ ≤ س ≤ ب) = ل ($\frac{\text{أ} - \mu}{\sigma}$ ≤ ص ≤ $\frac{\text{ب} - \mu}{\sigma}$)

مثـــ١ـــال(٢٠١٥) إذا كان متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠ وانحرافه المعيارى σ = ٢,٥

(أ) أوجد ل(س ≤ ١٢,٥)

(ب) إذا كان ل(س ≥ ك)= ٠,١٠٥٦ أوجد قيمة ك

الحـــل



(أ) ل(س ≤ ١٢,٥) = ل(ص ≤ $\frac{\text{١٢,٥} - \text{١٠}}{\text{٢,٥}}$)

ل(ص ≤ ١) = ٠,٥ + (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

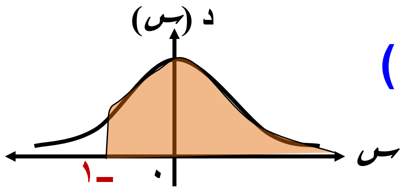
(ب) ∵ ل(س ≥ ك)= ٠,١٠٥٦ ∴ ل(ص ≥ $\frac{\text{ك} - \text{١٠}}{\text{٢,٥}}$)= ٠,١٠٥٦

ل(٠ ≤ ص ≤ $\frac{\text{ك} - \text{١٠}}{\text{٢,٥}}$)= ٠,٥ – ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

⟸ ى = $\frac{\text{ك} - \text{١٠}}{\text{٢,٥}}$ = ١,٢٥ ∴ ك = ٣,١٢٥ + ١٠ = ١٣,١٢٥

مثـــ٢ـــال(٢٠١٥) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة هو كتغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠٠ وانحرافه المعيارى ٢٠٠ وأختيرت أسرة عشوائياً من هذة الأسر فأوجد عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠٠ جنية

الحـــــــــــــــل



(أ) ل(س $\geq$ ١٥٠٠) = ل(ص $\geq$ $\frac{١٥٠٠ - ١٧٠٠}{٢٠٠}$)

ل(ص $\geq$ ـ١) = ٠,٥ + (٠ $\leq$ ص $\leq$ ١)

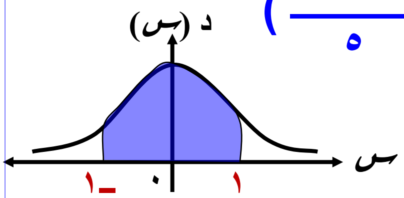
= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

عدد الأسر = الاحتمال × العدد الكلى = ٠,٨٤١٣ × ١٠٠٠ ≃ ٨٤١ أسرة

مثـــ٣ـــال(٢٠١٤) إذا كان متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ٤٨ وانحرافه المعيارى σ = ٥ (أ) أوجد ل(٤٣ $\leq$ س $\leq$ ٥٣)

(ب) أوجد قيمة ك إذا كان ل(س $\geq$ ك)= ٠,١٥٨٧

الحـــــــــــــــل



(أ) ل(٤٣ $\leq$ س $\leq$ ٥٣) = ل($\frac{٤٣ - ٤٨}{٥}$ $\leq$ ص $\leq$ $\frac{٥٣ - ٤٨}{٥}$)

ل(ـ١ $\leq$ ص $\leq$ ١) = ٢ × (٠ $\leq$ ص $\leq$ ١)

= ٢× ٠,٣٤١٣ = ٠,٦٨٢

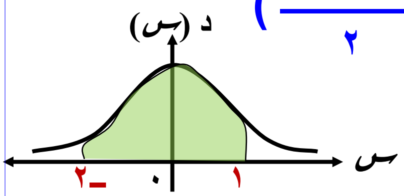
(ب) ∵ ل(س $\geq$ ك)= ٠,١٥٨٧ ∴ ل(ص $\geq$ $\frac{ك - ٤٨}{٥}$)= ٠,١٥٨٧

ل(٠ $\leq$ ص $\leq$ $\frac{ك - ٤٨}{٥}$)= ٠,٥ ــ ٠,١٥٨٧ = ٠,٣٤١٣

⟸ ى = $\frac{ك - ٤٨}{٥}$ = ١ ∴ ك = ٥ + ٤٨ = ٥٣

مثـــ٤ـــال(٢٠١٣) إذا كانت درجات طلاب أحد المدارس فى أمتحان الاحصاء تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ١٣ درجة وانحرافه المعيارى ٢ وأختيرت عشوائياً من هذة طلاب أحسب أن تكون درجته (أ) بين ٩ درجات ، ١٥درجة (ب) أكبرمن ٩

الحـــــــــــــــل



(أ) ل(٩ $\leq$ س $\leq$ ١٥) = ل($\frac{٩ - ١٣}{٢}$ $\leq$ ص $\leq$ $\frac{١٥ - ١٣}{٢}$)

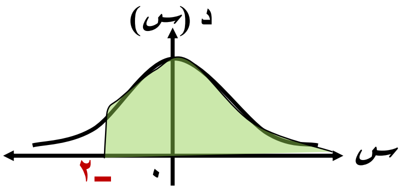
ل(ـ٢ $\leq$ ص $\leq$ ١) = (٠ $\leq$ ص ٢١)+(٠ $\leq$ ص $\leq$ ١)

= ٠,٤٧٧٢+ ٠,٣٤١٣ = ٠,٨١٨٥

(ب) ل(س ≤ ١٥٠٠) = ل(ص ≤ $\frac{٩ - ١٣}{٢}$)

ل(ص ≤ -٢) = ٠,٥ + (٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٧٧٢



مثـــال(٢٠١٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٥ وانحرافه المعيارى σ = ٥ (أ) أوجد ل(١٢ ≤ س ≤ ١٧)

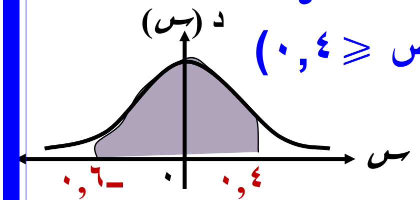
(ب) أوجد قيمة ك إذا كان ل(س ≤ ك)= ٠,٣٤٤٦

الحـــــــــــــــل

(أ) ل(١٢ ≤ س ≤ ١٢,٥) = ل($\frac{١٢ - ١٥}{٥}$ ≤ ص ≤ $\frac{١٧ - ١٥}{٥}$)

ل(-٠,٦ ≤ ص ≤ ٠,٤) = (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦) + (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)

= ٠,٢٢٥٩ + ٠,١٥٥٤ = ٠,٣٨١٣

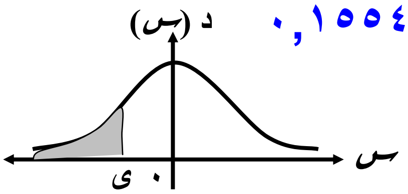


(ب) ∵ ل(س < ك)= ٠,١٠٥٦ ∴ ل(ص < $\frac{ك - ١٥}{٥}$)= ٠,٣٤٤٦

ل(٠ ≤ ص ≤ $\frac{ك - ١٥}{٥}$)= ٠,٥ - ٠,٣٤٤٦ = ٠,١٥٥٤

⟸ ى = $\frac{ك - ١٥}{٥}$ = - ٠,٤

∴ ك = - ٢ + ١٥ = ١٣



مثـــ٦ــال إذا كانت أجور ٣٠٠٠ عامل تتبع توزيع طبيعى بمتوسط حسابى μ = ٧٥ جنيهاً ، و إنحراف معيارى σ = ١٠ أوجد :

(أ) النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهاً

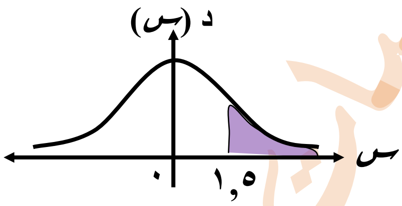
(ب) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً

(أ) ل (س > ٩٠) = ل (ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$)

ل (ص > ١,٥) = ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ - ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

∴ النسبة المئوية = الاحتمال × ١٠٠ = ٦,٦٨ ٪

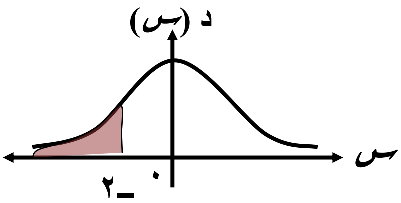


(ب) ل (س < ٥٥) = ل (ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$)

ل (ص < -٢) = ٠.٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ -٢)

= ٠,٥ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

∴ عدد العمال = ٣٠٠٠ × ٠,٠٢٢٨ = ٦٨ عامل



تمارين : أولاً: أكمـــــل ما يأتى

(١) متغير عشوائى طبيعى س متوسطه ٢٥ ، انحرافه المعيارى ٣ فإن القيمة المعيارية التى تناظر القيمة س=٤٠ هى ....

(٢) إذا كانت س متغير عشوائى طبيعى وسطه الحسابى ٦٠ وأنحرافه المعيارى ٨ فإن الدرجة الخام المقابلة للدرجة المعيارية ٢ هى ....

(٣) إذا كانت س متغير عشوائى متوسطه μ ، وأنحرافه المعيارى σ فإن

ل($\mu - \sigma \leqslant$ س $\leqslant \mu + \sigma$) = ...

(٤) التوزيع الطبيعى المعيارى متوسطه (μ) = ... وأنحرافه المعيارى (σ) = ...

(٥) إذا كان ص متغيراً طبيعياً معيارياً بحيثل (|ص| $\leqslant$ ك) = ٠,٧٨٨٨ فإن: ك =.....

ثانياً

[١] (٢٠١٥دور ٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ٧٥ وانحرافه المعيارى σ

وكان ل(س $\leqslant$ ٨٠)= ٠,١٠٥٦ أوجد (أ) الانحرافه المعيارى σ

(ب) ل(س $\geqslant$ ٦٩)

[٢] (٢٠١٥ دور٢) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ٥٠٠ عامل يتبع توزيعاً عشوائيا طبيعياً متوسطه ١٨٠٠ وانحرافه المعيارى ١٥٠ فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨٠ جنية

[٣] (٢٠١٢) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ٣٠٠ أسرة يتبع توزيعاً عشوائيا طبيعياً متوسطه ٦٠٠ وانحرافه المعيارى ١٠٠ فأوجد (أ) احتمال أن يكون دخل الأسرة أكبر من ٥٠٠ جنية

(ب) عدد الأسر التى ينحصر دخلها بين ٥٠٠ جنية ، ٧٠٠ جنية

[٤] (٢٠١١) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه (μ) وانحرافه المعيارى (σ)

أوجد (أ) ل ($\mu - \sigma \leqslant$ س $\leqslant \mu + \sigma$) (ب) ل(س $\leqslant \mu + ١,٢٥ \sigma$)

[٥] (٢٠١١ دور٢) إذا كانت أطوال طلاب أحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ١٦٣ سم وأنحرافه المعيارى ٤ سم وكان عدد طلاب هذة المدرسة ٢٠٠٠ طالب . أوجد

(أ) احتمال أن يتراوح طول الطالب بين ١٥٨ سم ، ١٦٧ سم

(ب) عدد الطلاب الذين لا يقل طول أى منهم عن ١٧٠ سم

[٦] (٢٠١٠) إذا كانت أوزان الطلاب فى أحدى الكليات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٥٥ كجم وأنحرافه المعيارى σ . وكات أوزان ٣٣ % من الطلاب تزيد عن٦٦ كجم . أوجد (أ) قيمة σ

(ب) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠٠ طالب احسب عدد الطلاب اللذين تقل أوزانهم عن ٦٠كجم

جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري

ي	٠.٠٠	٠.٠١	٠.٠٢	٠.٠٣	٠.٠٤	٠.٠٥	٠.٠٦	٠.٠٧	٠.٠٨	٠.٠٩
٠.٠	٠.٠٠٠٠	٠.٠٠٤	٠.٠٠٨	٠.٠١٢٠	٠.٠١٦٠	٠.٠١٩٩	٠.٠٢٣٩	٠.٠٢٧٩	٠.٠٣١٩	٠.٠٣٥٩
٠.١	٠.٠٣٩٨	٠.٠٤٣٨	٠.٠٤٧٨	٠.٠٥١٧	٠.٠٥٥٧	٠.٠٥٩٦	٠.٠٦٣٦	٠.٠٦٦٧٥	٠.٠٧١٤	٠.٠٧٥٣
٠.٢	٠.٠٧٩٣	٠.٠٨٣٢	٠.٠٨٧١	٠.٠٩١٠	٠.٠٩٤٨	٠.٠٩٨٧	٠.١٠٢٦	٠.١٠٦٤	٠.١١٠٣	٠.١١٤١
٠.٣	٠.١١٧٩	٠.١٢١٧	٠.١٢٥٥	٠.١٢٩٣	٠.١٣٣١	٠.١٣٦٨	٠.١٤٠٦	٠.١٤٤٣	٠.١٤٨٠	٠.١٥١٧
٠.٤	٠.١٥٥٤	٠.١٥٩١	٠.١٦٢٨	٠.١٦٦٤	٠.١٧٠٠	٠.١٧٣٦	٠.١٧٧٢	٠.١٨٠٨	٠.١٨٤٤	٠.١٨٧٩
٠.٥	٠.١٩١٥	٠.١٩٥٠	٠.١٩٨٥	٠.٢٠١٩	٠.٢٠٥٤	٠.٢٠٨٨	٠.٢١٢٣	٠.٢١٥٧	٠.٢١٩٠	٠.٢٢٢٤
٠.٦	٠.٢٢٥٩	٠.٢٢٩١	٠.٢٣٢٤	٠.٢٣٥٧	٠.٢٣٨٩	٠.٢٤٢٢	٠.٢٤٥٤	٠.٢٤٨٦	٠.٢٥١٢	٠.٢٥٤٩
٠.٧	٠.٢٥٨٠	٠.٢٦١١	٠.٢٦٤٢	٠.٢٦٧٣	٠.٢٧٠٤	٠.٢٧٣٤	٠.٢٧٦٤	٠.٢٧٩٤	٠.٢٨٢٣	٠.٢٨٥٢
٠.٨	٠.٢٨٨١	٠.٢٩١٠	٠.٢٩٣٩	٠.٢٩٦٧	٠.٢٩٩٥	٠.٣٠٢٣	٠.٣٠٥١	٠.٣٠٧٨	٠.٣١٠٦	٠.٣١٣٣
٠.٩	٠.٣١٥٩	٠.٣١٨٦	٠.٣٢١٢	٠.٣٢٣٨	٠.٣٢٦٤	٠.٣٢٨٩	٠.٣٣١٥	٠.٣٣٤٠	٠.٣٣٦٥	٠.٣٣٨٩
١.٠	٠.٣٤١٣	٠.٣٤٣٨	٠.٣٤٦١	٠.٣٤٨٥	٠.٣٥٠٨	٠.٣٥٣١	٠.٣٥٥٤	٠.٣٥٧٧	٠.٣٥٩٩	٠.٦٣٢١
١.١	٠.٣٦٤٣	٠.٣٦٦٥	٠.٣٦٨٦	٠.٣٧٠٨	٠.٣٧٢٩	٠.٣٧٤٩	٠.٣٧٧٠	٠.٣٧٩٠	٠.٣٨١٥	٠.٣٨٣٠
١.٢	٠.٣٨٤٩	٠.٣٨٦٩	٠.٣٨٨٨	٠.٣٩٠٧	٠.٣٩٢٥	٠.٣٩٤٤	٠.٣٩٦٢	٠.٣٩٨٠	٠.٣٩٩٧	٠.٤٠١٥
١.٣	٠.٤٠٣٢	٠.٤٠٤٩	٠.٤٠٦٦	٠.٤٠٨٢	٠.٤٠٩٩	٠.٤١١٥	٠.٤١٣١	٠.٤١٧٤	٠.٤١٦٢	٠.٤١٧٧
١.٤	٠.٤١٩٢	٠.٤٢٠٧	٠.٤٢٢٢	٠.٤٢٣٦	٠.٤٢٥١	٠.٤٢٦٥	٠.٤٢٧٩	٠.٤٢٩٢	٠.٤٣٠٦	٠.٤٣١٩
١.٥	٠.٤٣٣٢	٠.٤٣٤٥	٠.٤٣٥٧	٠.٤٣٧٠	٠.٤٣٨٢	٠.٤٣٩٤	٠.٤٤٠٦	٠.٤٤١٨	٠.٤٤٢٩	٠.٤٤٤١
١.٦	٠.٤٤٥٢	٠.٤٤٦٣	٠.٤٤٧٤	٠.٤٤٨٤	٠.٤٤٩٥	٠.٤٥٠٥	٠.٤٥١٥	٠.٤٥٢٥	٠.٤٥٣٥	٠.٤٥٤٥
١.٧	٠.٤٥٥٤	٠.٤٥٦٤	٠.٤٥٧٣	٠.٤٥٨٢	٠.٤٥٩١	٠.٤٥٩٩	٠.٤٦٠٨	٠.٤٦١٦	٠.٤٦٢٥	٠.٤٦٣٣
١.٨	٠.٤٦٤١	٠.٤٦٤٩	٠.٤٦٥٦	٠.٤٦٦٤	٠.٤٦٧١	٠.٤٦٧٨	٠.٤٦٨٦	٠.٤٦٩٣	٠.٤٦٩٩	٠.٤٧٠٦
١.٩	٠.٤٧١٣	٠.٤٧١٩	٠.٤٧٢٦	٠.٤٧٣٢	٠.٤٧٣٨	٠.٤٧٤٤	٠.٤٧٥٠	٠.٤٧٥٦	٠.٤٧٦١	٠.٤٧٦٧
٢.٠	٠.٤٧٧٢	٠.٤٧٧٨	٠.٤٧٨٣	٠.٤٧٨٨	٠.٤٧٩٣	٠.٤٧٩٨	٠.٤٨٠٣	٠.٤٨٠٨	٠.٤٨١٢	٠.٤٨١٧
٢.١	٠.٤٨٢١	٠.٤٨٢٦	٠.٤٨٣٠	٠.٤٨٣٤	٠.٤٨٣٨	٠.٤٨٤٢	٠.٤٨٤٦	٠.٤٨٥٠	٠.٤٨٥٤	٠.٤٨٥٧
٢.٢	٠.٤٨٦١	٠.٤٨٦٤	٠.٤٨٦٨	٠.٤٨٧١	٠.٤٨٧٥	٠.٤٨٧٨	٠.٤٨٨٠	٠.٤٨٨٤	٠.٤٨٨٧	٠.٤٨٩٠
٢.٣	٠.٤٨٩٣	٠.٤٨٩٦	٠.٤٨٩٨	٠.٤٩٠١	٠.٤٩٠٤	٠.٤٩٠٦	٠.٤٩٠٩	٠.٤٩١١	٠.٤٩١٣	٠.٤٩١٦
٢.٤	٠.٤٩١٨	٠.٤٩٢٠	٠.٤٩٢٢	٠.٤٩٢٥	٠.٤٩٢٧	٠.٤٩٤٦	٠.٤٩٣١	٠.٤٩٣٢	٠.٤٩٣٤	٠.٤٩٣٦
٢.٥	٠.٤٩٣٨	٠.٤٩٤٠	٠.٤٩٤١	٠.٤٩٤٣	٠.٤٩٤٥	٠.٤٩٦٠	٠.٤٩٤٨	٠.٤٩٤٩	٠.٤٩٥١	٠.٤٩٥٢
٢.٦	٠.٤٩٥٣	٠.٤٩٥٥	٠.٤٩٥٦	٠.٤٩٥٧	٠.٤٩٥٩	٠.٤٩٧٠	٠.٤٩٦١	٠.٤٩٦٢	٠.٤٩٦٣	٠.٤٩٦٤
٢.٧	٠.٤٩٦٥	٠.٤٩٦٦	٠.٤٩٦٧	٠.٤٩٦٨	٠.٤٩٦٩	٠.٤٩٧٨	٠.٤٩٧١	٠.٤٩٧٢	٠.٤٩٧٣	٠.٤٩٧٤
٢.٨	٠.٤٩٧٤	٠.٤٩٧٥	٠.٤٩٧٦	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٧٧	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٧٩	٠.٤٩٧٩	٠.٤٩٨٠	٠.٤٩٨١
٢.٩	٠.٤٩٨١	٠.٤٩٨٢	٠.٤٩٨٢	٠.٤٩٨٣	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٤	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٥	٠.٤٩٨٦	٠.٤٩٨٦
٣.٠	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٧	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٨	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٨٩	٠.٤٩٩٠	٠.٤٩٩٠
٣.١	٠.٤٩٩٠	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩١	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٢	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٣
٣.٢	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٣	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٤	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥
٣.٣	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٥	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٦	٠.٤٩٩٧
٣.٤	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٧	٠.٤٩٩٨
٣.٥	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨	٠.٤٩٩٨