حل الاختبار النهائي لفصل الخريف 2007 /2008م

(1) [8 درجات] إذا كانت $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f(x)=\cos^{-1}x$ ، فأوجد دالتي التحصيل fog ، gog وحدد نطـــاق كل منهما، ثم أوجد المشتقة الأولي لكلٍ من الدالتين fog ، gog علي نطاق اشتقاقهما.

الحل: من تعريف التحصيل نجد أن

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

وكذلك يكون

$$(gog)(x)=g(g(x))=g\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-1+x^2}=\sqrt{x^2}=|x|$$

لكى تكون الدالة $g(x)$ دالةُ حقيقية يجب أن يكون كل من نطاقها ومداها مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وبالتالي يجب أن يكون المقدار تحت الجذر التربيعي غير سالب، أى أن $1-x^2\geq 0$ ، وهذا يكافئ أن $x^2\leq 1$ ، وبالتالي $|x|^2\leq 1$ ، وعليه فإن $|x|\leq 1$. إذاً $-1\leq x\leq 1$ ويكون نطاق الدالة g هو $D_g=[-1,1]$. الآن لتحديد مدى الدالة نلاحظ أن:

$$x\in D_g \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x^2\leq 1 \Leftrightarrow 0\geq -x^2\geq -1$$

بإضافـــــة العدد واحد لأطراف المتباينــــة نحصل على $1\geq 1-x^2\geq 0$ ، وبأخذ الجذر التربيعي للأطراف نجـــد أن $1\geq g(x)=\sqrt{1-x^2}\geq 0$ ويكون إذاً مدىالدالة هو $R_g=[0,1]$.

وبالنسبة للدالة f فمعلوم نطاقها هو $D_f=[-1,1]$ ، وحيث أن $R_g=[0,1]\subseteq D_f=[-1,1]$ فيكون إذن

$$D_{fog}=D_f=[-1,1]$$

وكذلك $R_g=[0,1]\subseteq D_g=[-1,1]$ ، وبالتالي $D_{gog}=D_g=[-1,1]$.

لحساب المشتقات:

$$(fog)'(x)=\frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & ,\quad x\in]0,1[\\[2ex] \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & ,x\in]-1,0[\end{cases}$$

كذلك يكون :

$$(gog)'(x)=\frac{d}{dx}|x|=\begin{cases}1 & ,\quad x\in]0,1[\\ -1 & ,x\in]-1,0[.\end{cases}$$

(2) [9 درجات] إذا علمت أن $\sin x < x < \tan x \quad , \forall x \in]0,\pi/2[$ ، فبرهن أن $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ ، ثم احسب النهايتين التاليتين (إن وجدتا) :

$$(i) \quad \lim_{x \to \infty} \left(x + \tfrac{1}{x}\right) \sin\left(\tfrac{5}{x}\right) \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x \to 0} \frac{|\sin x \cos 5x|}{x}$$

الحل : بالنسبة لبرهان $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (أنظر الكتاب)

$$\sin x < x < \tan x \qquad \dots (*)$$

وحيث أنه في الربع الأول $0 < x < \pi/2$ تكون $\sin x > 0$ فبقسمة أطراف المتباينة على $\sin x$ ، ينتج أن $\dfrac{1}{\cos x} < \dfrac{x}{\sin x} < 1$ ، وبالتالى $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ ولكن من المتطابقة المثلثية $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$ ومن المتباينة (*) يكون $\sin(x/2) < x/2$ وينتج أن $\cos x > 1 - (x^2/2)$ وبالتالي

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad (***)$$

وحيث أن $\lim\limits_{x \to 0+} (1 - \dfrac{x^2}{2}) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$

فبتطبيق نظرية الحصر على العلاقة (***) ينتج أن $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

لحساب النهايات :

(i) ضع $y = \dfrac{1}{x}$ فيكون $(y \to 0) \Leftrightarrow (x \to \infty)$ وبالتالي

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + \tfrac{1}{x}\right) \sin\left(\tfrac{5}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x \sin\left(\tfrac{5}{x}\right) + \lim_{x \to \infty} \tfrac{1}{x} \sin\left(\tfrac{5}{x}\right)$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{\sin 5y}{y} + \lim_{y \to \infty} y \sin 5y$$

$$= \quad 5 \quad + \quad 0 \quad = 5$$

(ii) نحسب النهاية اليمني مع ملاحظة أن دالتي الجيب وجيب التمام موجبتين علي يمين الصفر مباشرة

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|\sin x \cos 5x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x \cos 5x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0+} \cos 5x$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

نحسب النهاية اليسري مع ملاحظة أن دالة الجيب سالبة علي يسار الصفر مباشرة

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|\sin x \cos 5x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sin x\, |\cos 5x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0-} |\cos 5x|$$

$$= -1 \times 1 = -1$$

وينتج أن النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|\sin x \cos 5x|}{x}$ غير موجودة.

3) [**6 درجات**] إذا كانت $f(x)=\begin{cases} a+x+1 & , \ x\le 0 \\ 3+b\dfrac{\sin(x^2)}{x} & , \ x>0 \end{cases}$ ، فأوجد قيمة الثابت a لكي تكون الدالة f متصلة علي $\mathbb{R}$ ، ومن ثَم أوجد قيمة الثابت b لتصبح الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$.

الحل:

إذا كانت $x\ne 0$ فالدالة متصلة لأنها علي يسار الصفر كثيرة حدود فهي متصلة وعلي يمين الصفر فقسمة دالـــتين متصلتين دالة متصلة والدالة الثابتة دالة متصلة وبالتالي المجموع دالة متصلة.

ويجب أن تكون الدالة متصلة أيضا عند النقطة $x=0$ ، أي أنه يجب أن يتحقق :

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$

الآن

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} 3+b\frac{\sin(x^2)}{x}=3+b\lim_{x\to 0+} x\frac{\sin(x^2)}{x^2}=3$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} a+x+1=a+1$$

وحيث أن $f(0)=a+1$ إذن يكون $a+1=3$ ومنها $a=2$.

والآن لكي تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند الصفر يجب أن يتحقق أن :

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

ولكن

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{3+x-3}{x}=\lim_{x\to 0-}1=1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(3+b\dfrac{\sin(x^2)}{x}\right)-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{b\sin(x^2)}{x^2}=b$$

وبالتالي تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند الصفر إذا كان $b=1$.

(**4**) [6 درجات] **إذا كانـــت** $y=\sin^{-1}x$ ، **فبرهن باستخدام قانون مشتقة الدالة العكسية أن** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، **ومن ثم أثبت أن** $(1-x^2)y''-x\,y'=0$.

__الحل.__ حيث أن دالة الجيب $\sin y$ تزايدية وقابلة للاشتقاق في الفترة $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ، إذن تكون دالتـــها العكـــسية موجودة وتزايدية وقابلة للاشتقاق علي الفترة $]-1,1[$. وبما أن $y=\sin^{-1}x$ ، إذن $x=\sin y$ ويكون:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad,\quad |x|<1.$$

(مع ملاحظة أن $\cos^2 y=1-\sin^2 y$ ومنها $|\cos y|=\sqrt{1-\sin^2 y}$ وكذلك ملاحظة أنه إذا كان $y=\sin^{-1}x$ ، فإن $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ وبالتالي $\cos y>0$ ، أي أن $|\cos y|=\cos y$) . إذن يكون :

$$\boxed{.\ \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad,\quad |x|<1}$$

مما سبق نجد أن $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، **أي أن** $y'\sqrt{1-x^2}=1$ **وبالتفاضل بالنسبة لــ** x :

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

وبضرب الطرفين في $\sqrt{1-x^2}$ **نجد أن**

$$(1-x^2)y''-x\,y'=0$$

5) [8 درجات] أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍ من الدوال التالية علي نطاق اشتقاقها:

$(i) \quad y = x^x \sec^{-1}\sqrt{x} \qquad\qquad (ii) \quad xy^2 + \sin y = 1$

$(iii) \quad x = 3^t + \cos t \quad , \quad y = \ln(t^2+1)^3.$

الحل :

(i) الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين ويكون

$$y = x^x \times \frac{1}{\left|\sqrt{x}\right|\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sec^{-1}\sqrt{x}\left(xx^{x-1} + x^x \ln x\right)$$

$$= x^x \times \frac{1}{2x} \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sec^{-1}\sqrt{x}\left(x^x + x^x \ln x\right)$$

$$= x^x \left(\frac{1}{2x} \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \left(1 + \ln x\right)\sec^{-1}\sqrt{x}\right)$$

(ii) الدالة في الصورة الضمنية . نفاضل الطرفين بالنسبة لــ x :

$$x \times 2yy' + y^2 + y'\cos y = 0$$

ومنها

$$y'(2xy + \cos y) = -y^2$$

إذن

$$y' = \frac{-y^2}{2xy + \cos y}$$

(ii) الدالة $y = \ln(t^2+1)^3 = 3\ln(t^2+1) \quad , \quad x = 3^t + \cos t$ في الصورة البارامترية وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{6t}{t^2+1}}{3^t \ln 3 - \sin t} = \frac{6t}{\left(t^2+1\right)\left(3^t \ln 3 - \sin t\right)}$$

6) [8 درجات] **استنتج المشتقة النونيـــة للدالـــة** $f(x)=e^{ax+b}$ **، حيث** $a,b\in\mathbb{R}$ **، ثم اكتب واستخدم قاعدة ليبنتز لإيجـــاد المشتقة النونيـــة للدالـــة** $h(x)=(1-x)^2e^{-x+1}$ **ومن ذلك اســـتنتج قيمـــة** $h^{(3)}(0)$ **وضعها في أبسط صورة.**

الحل : حيث أن $f(x)=e^{ax+b}$ **. بتفاضل الدالة عدة مرات نجد أن**

$$f^{(1)}(x)=a\,e^{ax+b}$$
$$f^{(2)}(x)=a^2\,e^{ax+b}$$
$$f^{(3)}(x)=a^3\,e^{ax+b}$$

وهكذا ...... ويمكن استنتاج أن

$$f^{(n)}(x)=a^n\,e^{ax+b}$$

الدالة $h(x)=(1-x)^2e^{-x+1}$ **عبارة عن حاصل ضـــرب دالـــتين** $u(x)=(1-x)^2 \quad , \; v(x)=e^{-x+1}$

ويمكن إيجاد المشتقة النونية باستخدام قاعدة ليبنتز للدالة $h(x)=u(x)v(x)$

$$h^{(n)}=uv^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{(2)}v^{(n-2)}+\ldots+\binom{n}{r}u^{(r)}v^{(n-r)}+\ldots+u^{(n)}v$$

وحيث أن

$$u(x)=(1-x)^2 \;,\; u^{(1)}(x)=-2(1-x) \;,\; u^{(2)}(x)=2 \;,\; u^{(n)}(x)=0 \;,\; n\ge 3$$

ومن الجزء الأول من المسألة ينتج أن : $v^{(n)}(x)=(-1)^n\,e^{-x+1}$

وبالتالي يكون :

$$\begin{aligned} h^{(n)}&=uv^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{(2)}v^{(n-2)}+\ldots+\binom{n}{r}u^{(r)}v^{(n-r)}+\ldots+u^{(n)}v \\ &=(1-x)^2(-1)^n\,e^{-x+1}-2n(1-x)(-1)^{n-1}\,e^{-x+1}+2\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\,e^{-x+1}. \\ &=\left[(1-x)^2(-1)^n-2n(1-x)(-1)^{n-1}+n(n-1)(-1)^{n-2}\right]e^{-x+1}. \end{aligned}$$

حيث $n\ge 2$.

الآن عندما $n=3 \;,\; x=0$ **يكون :**

$$\begin{aligned} h^{(3)}&=\left[(1-0)^2(-1)^3-2\times 3(1-0)(-1)^{3-1}+3(3-1)(-1)^{3-2}\right]e^{-0+1} \\ &=\left[-1-6-6\right]e=-13\,e. \end{aligned}$$

(7) [6 درجات] **حقق شروط قاعدة لوبيتال واستخدمها لحساب النهاية** $\lim\limits_{x\to 0} \cot x \tan^{-1} x$.

الحل :

يمكن أخذ الجوار $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ للنقطة 0 ونلاحظ أن النهاية علي الصورة الغير معينة $0\times\infty$ ويمكـــن وضـــعها علي الصورة :

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)(\tan^{-1} x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{\tan x}$$

وتصبح النهاية علي الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ ويمكن التحقق من أن :

أولاً : نهاية البسط $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \tan^{-1} x = 0$ وكذلك نهاية المقام $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

ثانياً: $g'(x) = \sec^2 x \neq 0$ علي الجوار $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

ثالثاً:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\tan^{-1} x)'}{(\tan x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\sec^2 x} = 1$$

إذن يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لنحصل على :

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)(\tan^{-1} x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\sec^2 x} = 1$$

(8) [9 درجة] ابحث اطِّراد الدالة $f(x)=x^2(x^2-2)$ موضحاً فترات التزايد وفترات التناقص والقيم العظمي والصغري المحلية وفترات التقعر ونقاط الانقلاب ، ثم ارسم منحناها.

الحل:

حيث أن الدالة $y=f(x)=x^2(x^2-2)=x^4-2x^2$ كثيرة حدود فيكون نطاقها هو $\mathbb{R}$ وتكون الدالة قابلة للاشتقاق علي $\mathbb{R}$ وبحساب المشتقة الأولي نجد أن :

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

وتكون النقط الحرجة للدالة هي النقط x التي تحقق أن $f'(x)=0$ ونلاحظ أن :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; or \; x = 1 \; or \; x = -1$$

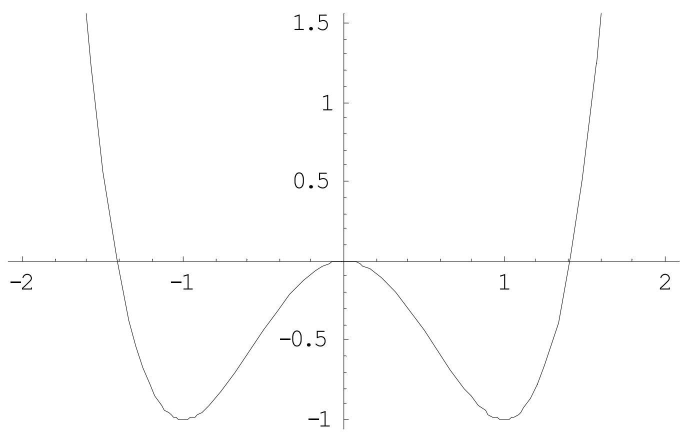
ويمكن ملاحظة فترات التزايد والتنغقص من الجدول التالي

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
y'	$-ve$	0	$+ve$	0	$-ve$	0	$+ve$
y	تناقصية	-1	تزايدية	0	تناقصية	-1	تزايدية
		قيمة صغرى محلية		قيمة عظمى محلية		قيمة صغرى محلية	

ولدراسة التقعر نحسب المشتقة الثانية للدالة $y''=12x^2-4=12(x^2-\frac{1}{3})$ ، ولحساب نقط الانقلاب نضع $y''=0$ فنجد أن $x=\pm 1/\sqrt{3}$.

x	$x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$
y''	$+ve$	0	$-ve$	0	$+ve$
y	مقعر لأعلي	$-\frac{5}{9}$	مقعر لأسفل	$-\frac{5}{9}$	مقعر لأعلي
		نقطة انقلاب		نقطة انقلاب	نقطة انقلاب

إذن منحنى الدالة f يأخذ الصورة التالية



$$y=f(x)=x^2(x^2-2)$$