مراجعة الميكانيكا .. أولا الإستاتيكا

(١) محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

$ح^{2} = ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2} + 2 ق_{1} ق_{2}$ جتا ى

ظا هـ$_{1}$ = $\frac{ق_{2} \text{ جا ى}}{ق_{1} + ق_{2} \text{ جتا ى}}$ ، ظا هـ$_{2}$ = $\frac{ق_{1} \text{ جا ى}}{ق_{2} + ق_{1} \text{ جتا ى}}$

حيث ى قياس الزاوية بين خطى عمل ق$_{1}$ ، ق$_{2}$

، هـ$_{1}$ قياس الزاوية بين خطى عمل ق$_{1}$ ، ح

، هـ$_{2}$ قياس الزاوية بين خطى عمل ق$_{2}$ ، ح

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت ق$_{1}$ = ق$_{2}$ فإن المحصلة تنصف الزاوية بينهما

ويكون ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{2}$ ، هـ$_{1}$ = هـ$_{2}$ = $\frac{ى}{2}$

(٢) إذا كانت ى = ٩٠ فإن : ح = $\sqrt{ق_{1}^{2} + ق_{2}^{2}}$ ، ظا هـ$_{1}$ = $\frac{ق_{2}}{ق_{1}}$

(٣) إذا كانت ق$_{1}$ ، ق$_{2}$ فى اتجاه واحد نحصل على أكبر قيمة للمحصلة وتكون ح = ق$_{1}$ + ق$_{2}$

ويكون لها نفس اتجاه القوتين

(٤) إذا كانت ق$_{1}$ ، ق$_{2}$ فى اتجاهين متضادين نحصل على أصغر قيمة للمحصلة وتكون ح = ق$_{1}$ − ق$_{2}$

ويكون لها نفس اتجاه القوة الكبرى

(٢) تحليل القوة إلى مركبتين :

أولا : فى اتجاهين معلومين (غير متعامدين) :

ق$_{1}$ = $\frac{ح \text{ جا هـ}_{2}}{\text{جا (هـ}_{1} + \text{هـ}_{2})}$ ، ق$_{2}$ = $\frac{ح \text{ جا هـ}_{1}}{\text{جا (هـ}_{1} + \text{هـ}_{2})}$

ثانيا : فى اتجاهين متعامدين :

ق$_{1}$ = ح جتا هـ ، ق$_{2}$ = ح جا هـ

(٣) تعيين محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة :

(بالتحليل فى اتجاهين متعامدين)

س : مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور السينات

ص : مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور الصادات

ح = $\sqrt{س^{2} + ص^{2}}$ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

ملاحظة : نحصل على قيمة هـ الحادة ثم نحدد الربع الذى تقع فيه هـ بمعرفة إشارتى س ، ص كالآتى :

(+ ، +) ربع أول هـ (− ، +) ربع ثانى ١٨٠ − هـ

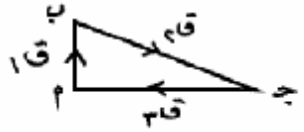
(− ، −) ربع ثالث ١٨٠ + هـ (+ ، −) ربع رابع ٣٦٠ − هـ

(٤) الإتزان :

أولا : اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة واحدة

قاعدة مثلث القوى

القوى تعمل فى ترتيب دورى واحد فى أضلاع مثلث فتتناسب القوى مع أطوال أضلاع المثلث .



قاعدة لامى

القوى تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها .

$\frac{ق_{1}}{\text{جا هـ}_{1}} = \frac{ق_{2}}{\text{جا هـ}_{2}} = \frac{ق_{3}}{\text{جا هـ}_{3}}$ ‖ $\frac{ق_{1}}{\text{ب جـ}} = \frac{ق_{2}}{\text{جـ أ}} = \frac{ق_{3}}{\text{أ ب}}$

ثانيا : اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية

(بالتحليل فى اتجاهين متعامدين)

تكون مجموعة القوى متزنة إذا كانت ح = صفر أى أن :

س = صفر ، ص = صفر

ملاحظات هامة : (أثناء اتزان جسم)

(١) إذا مر خيط على بكرة ملساء فإن الشد لا يتغير .

(٢) إذا مر خيط داخل حلقة ملساء فإن الشد لا يتغير .

(٣) إذا تلاقى خطى عمل قوتين فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة يمر بهذه النقطة .

(٥) العزوم :

الضرب القياسى :

$\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب} = \|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|$ جتا هـ ⇦ جتا هـ = $\frac{\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|}$

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (أ$_{1}$ ، أ$_{2}$) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ب$_{1}$ ، ب$_{2}$)

فإن $\overleftarrow{أ} \odot \overleftarrow{ب}$ = (أ$_{1}$ ، أ$_{2}$) ⊙ (ب$_{1}$ ، ب$_{2}$) = أ$_{1}$ ب$_{1}$ + أ$_{2}$ ب$_{2}$

إذا كان أ = (أ$_{1}$ ، أ$_{2}$) فإن : $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{أ_{1}^{2} + أ_{2}^{2}}$

متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$ = $\frac{\overleftarrow{أ}}{\|\overleftarrow{أ}\|}$

المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ = $\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ ب}}{\|\overleftarrow{أ ب}\|}$

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أ ب}$ = $\left(\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ ب}}{\|\overleftarrow{أ ب}\|^{2}}\right) \overleftarrow{أ ب}$

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه عمودى على $\overleftarrow{أ ب}$

= $\overleftarrow{ق} - \left(\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ ب}}{\|\overleftarrow{أ ب}\|^{2}}\right) \overleftarrow{أ ب}$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الضرب الإتجاهى :

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\| \, جا هـ \, \overleftarrow{ع}$

$\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعين متجاورين ، = ضعف مساحة المثلث

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_1 ، أ_2)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_1 ، ب_2)$

فإن $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (أ_1 ، أ_2) \times (ب_1 ، ب_2) = (أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1) \overleftarrow{ع}$

ملاحظة : الضرب الإتجاهى غير إبدالى حيث :

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = - \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

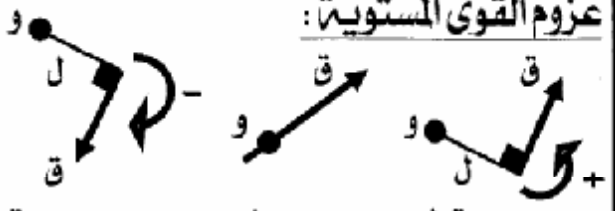
عزم قوة بالنسبة لنقطة :

عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة الأصل و $= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

طول العمود النازل من مركز العزم على خط عمل القوة

$ل = \frac{\|\overleftarrow{ج و}\|}{ق}$

عزوم القوى المستوية :



ج و = + ق ل　　ج و = صفر　　ج و = - ق ل

ملاحظات هامة :

(١) مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

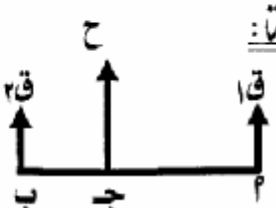
(٢) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول م = مجموع العزوم حول ب فإن خط عمل المحصلة // $\overline{أ ب}$.

(٣) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول م = سالب مجموع العزوم حول ب فإن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{أ ب}$.

(٦) القوى المستوية المتوازية :

محصلة قوتين متوازيتين

أولا : فى اتجاه واحد :

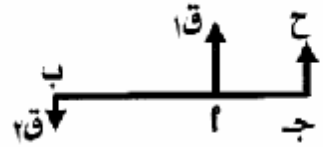


مقدار المحصلة = ق١ + ق٢

المحصلة تقع بين القوتين و تكون فى نفس الإتجاه

نقطة تأثير القوة : ق١ × ذراعها = ق٢ × ذراعها

أى أن : ق١ × م جـ = ق٢ × جـ ب



ثانيا : فى اتجاهين متضادين :

مقدار المحصلة = ق١ - ق٢

المحصلة تقع خارج القوتين ناحية القوة الكبرى و تكون فى نفس الإتجاه .

نقطة تأثير القوة : ق١ × ذراعها = ق٢ × ذراعها

أى أن : ق١ × م جـ = ق٢ × ب جـ

. مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المستوية المتوازية بالنسبة لأى نقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

اتزان مجموعة من القوى المستوية المتوازية :

إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتوازية فإن :

(١) مجموع القوى لأعلى = مجموع القوى لأسفل

(٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة = صفر

(٧) الإزدواجات :

ج = ق ل　　ج = - ق ل

ملاحظات هامة :

(١) شرط اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين ج١ + ج٢ = صفر

(٢) شرط تكافؤ ازدواجين يكون لهما نفس المقدار و نفس الإتجاه .

(٣) الإزدواج المحصل (المكافئ)

ج = ج١ + ج٢ + ج٣ + ...

(٤) إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم و مثلها تمثيلا تاما أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن هذه المجموعة تكافئ ازدواجا

معيار عزمه = ضعف مساحة المضلع × $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع الذى تؤثر فيه}}$

أمنياتى بالتفوق

أ / ابراهيم عادل حسنى

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

أمثلة محلولة

مثال (١)

قوتان قوة محصلتهما عمودية على الصغرى وإذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى وأنه مقدار المركبة الكبرى يساوى ٣٠ نيوتن فما هو مقدار كل من المركبة الأخرى والمحصلة.

الحل :

$\because$ ظاθ_1 = $\frac{\text{ق}_2 \text{جا}\alpha}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{جتا}\alpha}$

$\therefore$ ظا٩٠ = $\frac{\text{ق}_2 \text{جا}١٥٠}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{جتا}١٥٠}$

$\therefore$ $\frac{1}{0}$ = $\frac{\frac{1}{2} \times \text{ق}_2}{\text{ق}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{ق}_2}$

$\therefore$ ق$_1$ = ق$_2$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ ق$_1$ = ٣٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٥$\sqrt{3}$ نيوتن

$\because$ ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتاα

ح^2 = ٣٠٠ + ٩٠٠ + ٢ × ٣٠ × ١٥$\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٥٧٥ + ٩٠٠

ح^2 = ٢٤٧٥ ← ح = ١٥$\sqrt{11}$ نيوتن

مثال (٢)

قوتان متساويتان تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا نقصت إحداهما فأصبح قياس الزاوية بينهما ٩٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ وحدة عند الحالة الأولى . اثبت أن مقدار كل قوة = ١ + $\sqrt{3}$

الحل :

أولاً : عندما ق$_1$ = ق$_2$ = ق ، θ = ١٢٠°

$\because$ ح = ٢ ق جتا$\frac{\theta}{2}$ $\therefore$ ح = ٢ ق جتا٦٠° ← (١)

$\therefore$ ح = ٢ ق × $\frac{1}{2}$ $\therefore$ ح = ق

ثانياً : عندما ق$_1$ = ق$_2$ = ق ، θ = ٦٠°

ح = ح + ١١

$\therefore$ ح + ١١ = ٢ × ٢ ق جتا$\frac{٦٠}{2}$

ح + ١١ = ٤ ق جتا٣٠

$\therefore$ ح + ١١ = ق$\sqrt{3}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) نحصل على

ق + ١١ = ق$\sqrt{3}$

$\therefore$ ق (١ - $\sqrt{3}$) = ١١

$\therefore$ ق = $\frac{11}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

= $\frac{11(1+\sqrt{3})}{11}$

$\therefore$ ق = ١ + $\sqrt{3}$ ✱

مثال (٣)

قوتان إذا كانت الزاوية بينهما قائمة كان مقدار محصلتهما = ١٠٧ نيوتن وإذا كانت الزاوية بينهما ٦٠° كان مقدار محصلتهما = ١٣٧ نيوتن . فما مقدار كل من القوتين .

الحل :

ح = ١٠٧ ، θ = ٩٠°

$\because$ ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ $\therefore$ (١٠٧)^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$

$\therefore$ ق$_1^2$ + ق$_2^2$ = ١٠ ← (١)

وعندما ح = ١٣٧ ، θ = ٦٠° بحذف :

(١٣٧)^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتا٦٠°

$\therefore$ ١٣ = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ × $\frac{1}{2}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$\therefore$ ١٣ = ١٠ + ق$_1$ ق$_2$ ← ق$_1$ ق$_2$ = ٣

$\therefore$ ق$_2$ = $\frac{3}{\text{ق}_1}$ ← (٣)

بالتعويض من (٣) فى (١)

$\therefore$ ق$_1^2$ + $\left(\frac{3}{\text{ق}_1}\right)^2$ = ١٠

$\therefore$ ق$_1^2$ + $\frac{9}{\text{ق}_1^2}$ = ١٠ ← ق$_1^4$ - ١٠ ق$_1^2$ + ٩ = ٠

(ق$_1^2$ - ١)(ق$_1^2$ - ٩) = ٠

$\therefore$ ق$_1^2$ = ١ ← ق$_1$ = ١ $\therefore$ ق$_2$ = ٣

أو ق$_1^2$ = ٩ ← ق$_1$ = ٣ $\therefore$ ق$_2$ = ١

مثال (٤)

هل قوة مقدارها ٥٠٠ نيوتن فى اتجاهين (مركبتيد أو توتين) يميل أولهما على القوة بزاوية قياسها ٤٥° والآخر بزاوية قياسها ٦٠° من الناحية الأخرى .

الحل :

$\because$ ق$_1$ = $\frac{\text{ح جا}\theta_2}{\text{جا}(\theta_1 + \theta_2)}$

$\therefore$ ق$_1$ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا}٦٠}{\text{جا}١٠٥}$ = ٣ر٤٤٨ نيوتن

$\because$ ق$_2$ = $\frac{\text{ح جا}\theta_1}{\text{جا}(\theta_1 + \theta_2)}$ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا}٤٥}{\text{جا}١٠٥}$ = ٣٣٦ نيوتن

مثال (٥)

قوتان قوتاهما من نقطة معلومة فإذا كانت أكبر قيمة للمحصلة = ١٧ ث كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما = ٧ ث كجم أوجد مقدار كل من القوتين .

الحل :

نفرض أن القوتين ق$_1$ ، ق$_2$

$\because$ ق$_1$ + ق$_2$ = ١٧ ، ق$_1$ - ق$_2$ = ٧

بحل المعادلتين $\therefore$ ٢ ق$_1$ = ٢٤ $\therefore$ ق$_1$ = ١٢ ث كجم

، ق$_2$ = ١٢ - ١٧ $\therefore$ ق$_2$ = ٥ ث كجم

مثال (٦)

ق$_1$ ، ق$_2$ متلاقيتان من نقطة ومقدار محصلتهما = ح وإذا عكس اتجاه ق$_2$ فإن المحصلة تصبح ح$\sqrt{2}$ وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى أوجد قياس الزاوية بين القوتين .

الحل :

$\because$ أ ب جـ د ، أ هـ ، ب د متوازيا أضلاع

، أ هـ = أ د $\therefore$ ب د = ب هـ

، ق (هـ $\hat{\text{أ}}$ د) = ٩٠°

$\therefore$ أ ب = ب جـ = ب هـ

$\therefore$ ق$_1$ = ق$_2$

فى الحالة الأولى :

ح = ٢ ق$_1$ جتا$\frac{\theta}{2}$ ← (١)

فى الحالة الثانية :

ح$\sqrt{2}$ = ٢ ق$_1$ جتا$\frac{١٨٠ - \theta}{2}$

$\therefore$ ح$\sqrt{2}$ = ٢ ق$_1$ جا$\frac{\theta}{2}$ ← (٢)

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

بقسمة المعادلتين ① ، ②

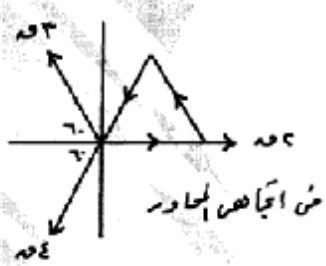
$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$

$\therefore$ ق $(\hat{\theta}) = 120°$

مثال (٧)

ثلاث قوى ق$_1$ = ٣ ق ، ق$_2$ = ٤ ق ، ق$_3$ = ٦ ق مثلاثية من نقطة مادية وفى اتجاهات متوازية لأضلاع مثلث مستاوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد . أوجد مقدار واتجاه المحصلة .

الحل :



تحلل القوى فى اتجاهى المحاور

$\Sigma x = 2$ ق $- 3$ ق $\tan 60° - 4$ ق $\tan 60°$

$\therefore \Sigma x = \frac{-3}{2}$ ق

$\Sigma y = 3$ ق $\tan 60° - 4$ ق $\tan 60° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ق

$\therefore$ ح $= \sqrt{(\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}$

$\therefore$ ح $= \sqrt{\frac{9}{4}$ ق$^2 + \frac{3}{4}$ ق$^2} = \sqrt{3}$ ق

$\therefore \tan\theta = \frac{\Sigma y}{\Sigma x} = \frac{-\sqrt{3}\text{ ق}}{-\frac{3}{2}\text{ ق}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta$ (الحادة) $= 30°$

$\because \Sigma x$ ، Σy سالبتين $\therefore \theta$ فى الربع الثالث

$\theta = 180 + 30 \quad \therefore \theta = 210°$

مثال (٨)

أربع قوى مستوية مقاديرها ق$_1$ = ٤ ، ق$_2$ = ٦ ، ق$_3$ = ٣ ، ق$_4$ = ٥ نيوتن تؤثر من نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٦٠° شمال الشرق ، ٣٠° شمال الغرب ، الجنوب على الترتيب أوجد قيمة كل من ق$_1$ ، ق$_2$ إذا كانت محصلة هذه القوى مقدارها ٥ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق

الحل :

نحلل القوى فى اتجاهى محورى الإحداثيات

$\Sigma x = \theta_1 + 4 \tan 60° - 6 \tan 30° = \theta_1 - 2$

$\Sigma y = 4 \tan 60° + 6 \tan 60° - \theta_2 = 10\sqrt{3} - \theta_2$

وبتحليل المحصلة ح فى اتجاهى محورى الإحداثيات

$\therefore \Sigma x = ح$ ، $\Sigma y = 0$

$\therefore \theta_1 - 2 = 5 \quad \therefore \theta_1 = 7$ نيوتن

$10\sqrt{3} - \theta_2 = 0 \quad \therefore \theta_2 = 10\sqrt{3}$ نيوتن

مثال (٩)

ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر من نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة . فأوجد الزاوية بين القوتين الأخيرتين

الحل :

$\because$ القوى الثلاث متزنة

$\therefore$ الزاوية بين القوتين ١٠ ، ١٢

$\therefore$ القوة ٨ نيوتن هى محصلتهما

$\therefore ح^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos\theta$

$\therefore (8)^2 = (10)^2 + (12)^2 + 2 \times 10 \times 12 \cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{64 - 100 - 144}{240} \quad \therefore \theta = 138° 35'$

مثال (١٠)

ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٥$\sqrt{7}$ نيوتن تؤثر من نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية = ٦٠° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للطاقة لمحصلة القوى الثلاثة .

الحل :

لإيجاد محصلة القوى الثلاثة نوجد محصلة القوتين الأولى والثانية (ح$_1$) ثم ح$_1$ = ٥$\sqrt{7}$

$\therefore ح_1^2 = 5^2 + 10^2 + 2 \times 5 \times 10 \cos 60° = 175$

$\therefore ح_1 = 5\sqrt{7}$ نيوتن

$\therefore ح = ح_1 + ح_2$

$\therefore ح$ (محصلة القوى الثلاث) $= 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

$\therefore ح = 7\sqrt{7}$ نيوتن

مثال (١١)

جسم وزنه ٤٠٠ ث جم معلق من نقطة P بواسطة خيط ، ربط خيط من نقطة به من الخيط وشد أفقياً خيط ثانى به يمر على بكرة ملساء ثبتت ونقطة وبتدلى من نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ث جم . أوجد ميل $\overline{PA}$ على الرأسى وكذلك من كل من الخيطين PB ، BC

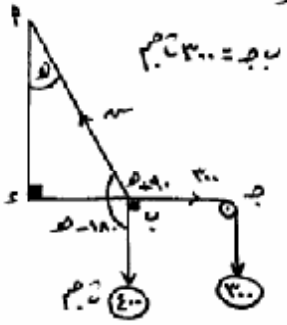
الحل :

$\because$ الجسم يتزن تحت تأثير القوى الثلاثة

$\therefore$ وزن الجسم = الشد فى الخيط = ٤٠٠ ث جم

$\therefore$ البكرة ملساء

$\therefore$ الشد فى الخيط BC = ٣٠٠ ث جم



وباستخدام قاعدة لامى

$\frac{\text{س}}{\text{جا}(90+\theta)} = \frac{400}{\text{جا}(180-\theta)} = \frac{300}{\text{جا}\theta}$

$\frac{\text{س}}{1} = \frac{400}{\text{جتا}\theta} = \frac{300}{\text{جا}\theta}$

وباستخدام خواص التناسب

$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4} \Leftarrow \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ميل PB على الرأسى = ٥٣° ٣٦'

$\frac{\text{س}}{1} = \frac{300}{\text{جا}\theta}$

$\therefore$ س $= \frac{300}{\text{جا}\,53°\,36'}$

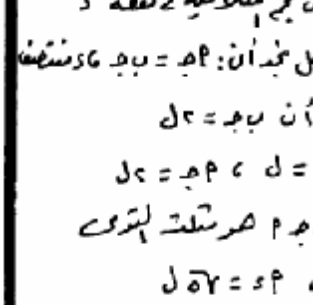
$\therefore$ س $= 500$ ث جم

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال (١٢)

علق قضيب منتظم طوله متر ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بخيطين شبت طرفاهما في نقطة واحدة من السقف فإذا كان الخيطان متعامدين وكان طول احدهما ٦٠ سم فما هو مقدار الشد في كل من الخيطين عندما يكون القضيب معلقاً تعليقاً مطلقاً وفي حالة توازن.

الحل :



∵ الجسم يتزن تحت تأثير القوى الثلاثة سم، سم، ٣٠ نيوتن

∴ ق(∠ م ب ا) = ٩٠ + هـ

ق(∠ م ا ب) = ١٨٠ − هـ

باستخدام قاعدة لامي

$$\frac{٣٠}{\text{جا}٩٠} = \frac{\text{سم}}{\text{جا}(١٨٠-\text{هـ})} = \frac{\text{سم}}{\text{جا}(٩٠+\text{هـ})}$$

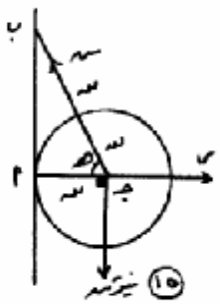
$$\text{سم} = \frac{٣٠\ \text{جا}\,\text{هـ}}{\text{جا}\,٩٠} = \frac{٤}{٥} \times ٣٠ = ٢٤ \text{ نيوتن}$$

$$\text{سم} = \frac{٣٠\ \text{جا}\,٥٣}{\text{جا}\,٩٠} = \frac{٣}{٥} \times ٣٠ = ١٨ \text{ نيوتن}$$

مثال (١٣)

كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط رأسي أملس وتعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه في نقطة على سطحي وطرفه الآخر مربوط في الحائط من نقطة م أعلى نقطة التماس للكرة فإذا كان طول الخيط يساوي طول نصف قطر الكرة أوجد الضغط على الحائط والشد في الخيط.

الحل :



∵ المستوى أملس

∴ رد الفعل ⊥ المستوى

∵ خط عمل الوزن والشد متلاقيان في جـ

∴ خط عمل ر يمر بنقطة جـ

∵ الجسم يتزن تحت تأثير القوى الثلاثة سم، سم، الوزن ٦ ∴ ∆ ٢٥ جـ لقائم الزاوية في م

$$\text{جتا}\,\text{هـ} = \frac{\text{سم}}{\text{سم}} = \frac{١}{٢} \therefore \text{هـ} = ٦٠°$$

باستخدام قاعدة لامي

$$\frac{١٥}{\text{جا}١٢٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{سم}}{\text{جا}٩٠}$$

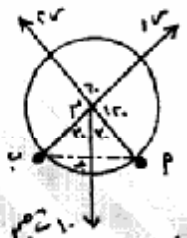
$$\therefore \text{ر} = \frac{١٥\ \text{جا}\,١٥٠}{\text{جا}\,١٢٠} = ٣٢٥ \text{ نيوتن}$$

$$\text{سم} = \frac{١٥\ \text{جا}\,٩٠}{\text{جا}\,١٢٠} = ٣٢١٠ \text{ نيوتن}$$

مثال (١٤)

كرة متجانسة ترتكز على تضييق سكاني يتقاطع مستويا أفق واحد والبعد بينهما يساوي طول نصف قطر الكرة أوجد الضغط على كل من التضييق إذا كان وزن الكرة ١٠ نيوتن

الحل :



∵ الكرة تتزن تحت تأثير القوى ر، ر، و والثلاثية في نقطة م

∴ ∆ م ا ب متساوي الأضلاع

باستخدام قاعدة لامي

$$\frac{١٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{١٢}{\text{جا}١٥٠}$$

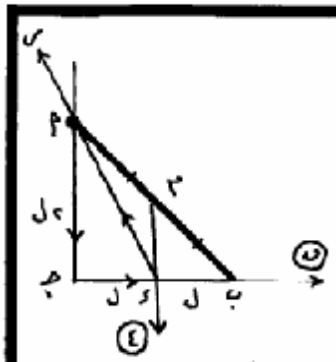
$$\therefore ١٢ = \frac{١٠\ \text{جا}\,١٥٠}{\text{جا}\,٦٠} = \frac{١٠}{٣٢} \text{ ث جم}$$

$$\text{ر} = \frac{١٠\ \text{جا}\,١٥٠}{\text{جا}\,٦٠} = \frac{١٠}{٣٢} \text{ ث جم}$$

مثال (١٥)

قضيب منتظم طوله ا ب يتصل طرفه ا بمفصل أملس مثبت في حائط رأسي من الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث جم وبؤثر في منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.

الحل :



∵ الجسم يتزن تحت تأثير القوى الثلاثة ق، ر، ٤ ث جم المتلاقية في نقطة د

من هندسة الشكل نجد أن: م ا = ب جـ، د منتصف ب جـ بفرض أن ب جـ = ٢ ل

∴ د ب = د جـ = ل ، م ا = ٢ ل

نجد أن ∆ د جـ م هو مثلث القوى

∴ ق = ٢ ل √٢ ، ر = ٤ ل

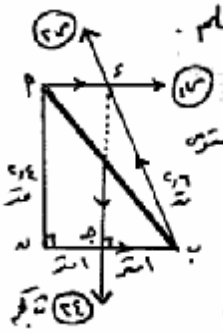
$$\frac{\text{ق}}{\text{ل}\sqrt{٢}} = \frac{\text{ر}}{\text{ل}} = \frac{٤}{\text{ل}\sqrt{٢}} \Leftarrow \frac{\text{ق}}{\text{م ا}} = \frac{\text{ر}}{\text{د ا}} = \frac{٤}{\text{م جـ}}$$

∴ ق = ٢ ث جم ، ر = ٤ ث جم

مثال (١٦)

ا ب سلم منتظم وزنه ٤٢ ث جم يرتكز بطرفه ا على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على أرض أفقية خشنة. اتزن السلم عندما كان الطرف ا على بعد ٤٫٢ متر من الأرض والطرف ب على بعد ٣ متر من الحائط. أوجد مقدار كل من رد فعل الأرض والحائط للسلم.

الحل :



∵ الحائط أملس ∴ ر ⊥ المستوى

∵ نقطة و نقطة تلاقي

خط عمل ب و الوزن

∴ رد فعل الطرف السفلي

خط عمله يمر بنقطة و أيضاً

نجد أن ∆ القوى هو ∆ و جـ ب

$$\therefore \frac{١٢}{١} = \frac{٤٢}{٢٫٤} = \frac{\text{و جـ}}{٢٫٤}$$

∴ ١٢ = ١٠ ث جم

$$\text{و ر} = \frac{٢٫٤ \times ٤٢}{٢٫٤} \therefore \text{ر} = ٢٤ \text{ ث جم}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال (١٧)

قضيب منتظم $\overline{ب}$ يمكنه الدوران بحرية حول $ب$ من مستوى رأسي حول مفصل في $ب$ ربط طرفه الآخر $ب$ بخيط يمر على بكرة ملساء عند $ج$ أعلى $ب$ تماماً ويحمل ثقلاً يساوي نصف وزن القضيب. أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقي في حالة الاتزان إذا علم أن $ب = ب ج$.

الحل:

∵ وثقله تلاشى القضيب

خط عمل التوتر وسه

∴ خط عمل ر يمر بنقطة د

∵ الجسم متزن بـ ٣ قوى

∴ سه هندسياً بشكل مثلث: ومنتصف $ب ج$

∴ $ب = ب ج$ ∴ $ق(\angle ب ج) = ق(\angle ب ج)$

∵ البكرة ملساء ∴ سه = $\frac{1}{2}$ د

∴ نجد أن $\triangle ب د$ و $ج$ هو مثلث القوى

$$\frac{و}{ب ج} = \frac{سه}{د ج} = \frac{ر}{ب د}$$

$$\frac{و}{ب ج} = \frac{\frac{1}{2} د}{د ج} \quad \therefore د ج = \frac{1}{2} ب ج$$

∴ $\triangle ب د$ و $ج$ قائم الزاوية في $د$ ∴ $ق(\angle ب ج) = ٣٠$

∴ قياس زاوية ميل القضيب على الأفق

$= ٩٠ - ٦٠ = ٣٠$

مثال (١٨)

قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يستند بطرفه $ب$ على حائط رأسي أملس ويحمل برأسه $ج$ خيط مربوط أحد طرفيه في نقطة $د$ من نقط القضيب حيث $ب د = ١٠$ سم ومربوط طرفه الآخر في نقطة $ه$ تقع على الحائط رأسياً فوق $ب$. إذا كان القضيب يميل على الرأسي بزاوية قياسها $٦٠°$ في وضع الاتزان فأوجد مقدار الشد في الخيط، ورد فعل الحائط.

الحل:

∵ الجسم متزن تحت تأثير القوى المتلاقية

∴ $ب$ هي نقطة تلاقي خط عمل و، سه

∴ خط عمل ر يمر بنقطة $ج$

∵ $ب ج = ٢٠$ سم

∴ $ق(\angle ب ج) = ٣٠$

باستخدام قاعدة لامي

$$\frac{سه}{\text{جا}٩٠} = \frac{و}{\text{جا}١٢٠} = \frac{ر}{\text{جا}١٥٠}$$

∴ $ر = \frac{و \text{ جا}١٥٠}{\text{جا}١٢٠} = ٦$ نيوتن

$سه = \frac{و \text{ جا}٩٠}{\text{جا}١٢٠} = ٦\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال (١٩)

القوى $\overrightarrow{ق_١} = ٤ س - ٦ ص$، $\overrightarrow{ق_٢} = -٢ س + ٣ ص$،

$\overrightarrow{ق_٣} = ٤ س - ٥ ص$ تؤثر من نقطة الأصل (و)

اثبت أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة $ا(-٤، ٣)$

وأوجد مجموع عزوم هذه القوى بالنسبة للنقطة $ج = (-٥، ٢)$ ثم عين طول العمود المرسوم من $ج$ على خط عمل محصلة هذه القوى.

الحل:

$\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$

$= ٦ س - ٨ ص$

$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ا و} \times \overrightarrow{ق}$

$= (-٤ - ٣) \times (٦ - ٨) = -$

∴ $\overrightarrow{ج}$ تمر بنقطة $ا$

∴ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج و} \times \overrightarrow{ق} = (-٥ - ٢) \times (٦ - ٨)$

$= (-١٢ - ٣٠) \overrightarrow{ك} = -١٤ \overrightarrow{ك}$

∴ $ل = \frac{||\overrightarrow{ج ج}||}{||\overrightarrow{ق}||} = \frac{١٤}{\sqrt{٣٦ + ٢٦}} = ١٫٤$ وحدة طول

مثال (٢٠)

$\overrightarrow{ق} = ٣ س + ٢ ص$، $\overrightarrow{ق_٢} = ل س - ٧ ص$

تؤثران في النقطتين $ا = (٣، -٥)$، $ب = (-٤، ٦)$

على الترتيب حيث قيمة كل من $ق$، $ل$ إذا انعدم مجموع عزوم القوتين بالنسبة للنقطة الأصل وكذلك بالنسبة للنقطة $ك = (١، -٢)$

مثال (٢١)

إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق_١} = ٣ س + ٢ ص$ تؤثر في النقطة $(-٢، ١)$ والقوة $\overrightarrow{ق_٢} = ب س - ٤ ص$ تؤثر في النقطة $(١، ٠)$ وكانت $\overrightarrow{ق_١}$، $\overrightarrow{ق_٢}$ تكونان ازدواجاً فأوجد $ب$ ومقدار عزم الازدواج

الحل:

∵ القوتان $\overrightarrow{ق_١}$، $\overrightarrow{ق_٢}$ تكونان ازدواج

∴ $\overrightarrow{ق_١} = -\overrightarrow{ق_٢}$

∴ $٣ س + ٢ ص = -ب س + ٤ ص$

∴ $ب = -٣$، $٢ = ٤$

ونفرض $ج = (-٢، ١)$، $د = (١، ٠)$

$\overrightarrow{د ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{د} = (-٢، ١) - (١، ٠)$

$\overrightarrow{د ج} = -س + ص$

∵ عزم الازدواج = $\overrightarrow{د ج} \times \overrightarrow{ق_١}$

$= (-س + ص) \times (٣ س + ٢ ص)$

$= (-٢ - ٣) \overrightarrow{ك} = -٥ \overrightarrow{ك}$

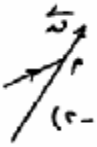
∴ مقدار عزم الازدواج = ٥

مثال (٢٢)

تؤثر القوة $\overrightarrow{ق} = ل س - ٢ ص$ عند النقطة $ا = (٥، ٢)$ وكانت عزم $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة $ب = (٤، ٧)$ = $(٧ - ٤) = -٢٠ \overrightarrow{ك}$ أوجد قيمة $ل$ بالمثل

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

الحل :



$\because \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{ب م} \times \overrightarrow{ق}$

$\therefore -٢٠ = (-٦ل - ٤) \times (-٦ ، ل)$

$\therefore -٢٠ = -٦ل - ٤$

$\therefore -٦ل = -٢٠ + ٤ \Leftarrow ل = ٤$

مثال (٢٣)

عين المركبة الجبرية (المتجه الجبري) للقوة $\overrightarrow{ق} = ٧\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث $أ = (٢ ، ١)$ ، $ب = (٦ ، ٤)$

الحل :

$\overrightarrow{أب} = (٦ ، ٤) - (٢ ، ١) = (٤ ، ٣)$

$\therefore$ المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ في اتجاه $\overrightarrow{أب} = \dfrac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|} \overrightarrow{أب}$

$= \dfrac{(٢٤ ، ٧) \odot (٤ ، ٣)}{\sqrt{٩ + ١٦}} \overrightarrow{أب}$

$= \dfrac{٢١ + ٩٦}{٥} \overrightarrow{أب} = \dfrac{١١٧}{٥} \overrightarrow{أب} = ٢٣٫٤ \overrightarrow{أب}$

مثال (٢٤)

إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٥\overrightarrow{س} + ١٢\overrightarrow{ص}$ عين مساحة متوازي الأضلاع المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين للمتجهين المقربين كضلعين متجاورين (وكذلك مساحة المثلث)

الحل :

$\because$ مساحة متوازي الأضلاع $= \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$

$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (٤ ، ٣) \times (١٢ ، ٥)$

$= (٣٦ - ٢٠) \overrightarrow{ع} = ١٦ \overrightarrow{ع}$

$\therefore$ مساحة المتوازي $= \|١٦ \overrightarrow{ع}\| = ١٦$ وحدة مساحة

، مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = ٨$ وحدة مساحة

مثال (٢٥)

إذا كان متجه عزم $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ بالنسبة للنقطة م $(٤ ، -٣)$ يساوي $٩\overrightarrow{ع}$ فأوجد معادلة خط عمل $\overrightarrow{ق}$

الحل :

نفرض أن $ب (س ، ص) \in$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$

$\because \overrightarrow{م ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{م}$

$= (س ، ص) - (٤ ، -٣)$

$\therefore \overrightarrow{م ب} = (س - ٤ ، ص + ٣)$

$\overrightarrow{جـ_م} = \overrightarrow{م ب} \times \overrightarrow{ق}$

$= (س - ٤ ، ص + ٣) \times (٢ ، -٣)$

$\therefore ٩\overrightarrow{ع} = (-٣س + ٩ - ٢ص - ٤)\overrightarrow{ع}$

$\therefore ٩ = -٣س - ٢ص + ٥$

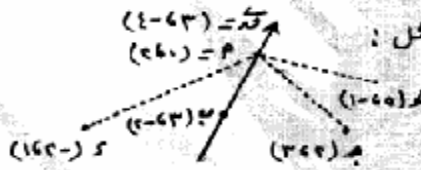
$\therefore ٣س + ٢ص + ٤ = ٠$ ***

مثال (٢٦)

إذا كانت $\overrightarrow{ق} = (٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص})$ تؤثر في نقطة $م (٢ ، ٥)$ وكانت $ب (٤ ، -٣)$ ، $جـ (٣ ، ٢)$ ، $د (-١ ، ٦)$ اثبت أن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ (١) يمر بنقطة ب

(٢) ينصف $\overline{جـد}$ (٣) يوازي $\overleftrightarrow{هـ و}$

الحل :



$\overrightarrow{جـ_م} = \overrightarrow{م ب} \times \overrightarrow{ق}$

$= (٤ ، -٣) \times (-٤ ، ٣)$

$= (-١٢ + ١٢) \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠}$ ∴ ب $\in$ خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ①

$\overrightarrow{جـ_هـ} = \overrightarrow{هـ م} \times \overrightarrow{ق} = (-٥ ، -١) \times (-٤ ، ٣)$

$= (٨ + ٢) \overrightarrow{ع} = ١٠ \overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{جـ_د} = \overrightarrow{د م} \times \overrightarrow{ق} = (٤ ، ١) \times (-٤ ، ٣)$

$= (-٨ - ٣) \overrightarrow{ع} = -١١ \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{جـ_د} = -\overrightarrow{جـ_هـ} \Leftarrow \overrightarrow{ق}$ تنصف $\overline{جـ د}$ ②

$\overrightarrow{جـ_و} = \overrightarrow{و م} \times \overrightarrow{ق} = (٥ ، -٣) \times (-٤ ، ٣)$

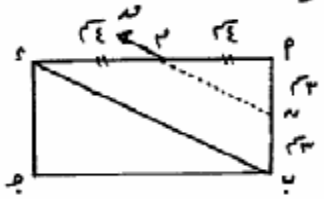
$= (-٢٠ + ٩) \overrightarrow{ع} = -١١ \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{جـ_و} = -\overrightarrow{جـ_د} \Leftarrow \overrightarrow{ق} \parallel \overleftrightarrow{جـ د} \parallel \overleftrightarrow{هـ و}$ ③

مثال (٢٧)

أ ب جـ د مستطيل فيه $أب = ٣٦$ ، $ب جـ = ٨$ سم أثرت مجموعة من القوى في مستوى المستطيل جيبها كان مجموع عزوم القوى حول كل من $ب$ ، $د = ٣٦$ سنتيمتر . سم ، ومجموع عزومها حول $م = -٣٦$ سنتيمتر . سم ، عين مقدار واتجاه محصلة هذه القوى .

الحل :



$\because \overrightarrow{جـ_ب} = \overrightarrow{جـ م} = ٣٦$ سنتيمتر . سم

$\therefore$ خط عمل المحصلة $\parallel \overleftrightarrow{ب د}$

، $\because \overrightarrow{جـ_م} = -\overrightarrow{جـ_ب}$ $\therefore$ خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أب}$ عند هندسيا لشكل نجد أن $ه م = ٥$ سم

$\therefore$ عزم المحصلة حول $أ = -٣٦$

$\therefore -ه \times ٣ \times ٣ \sin(أ م ه) = -٣٦$

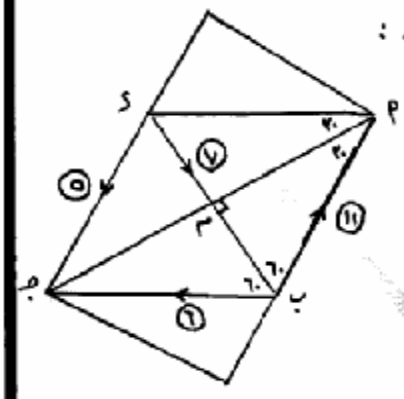
$\therefore ه \times \frac{٤}{٥} \times ٣ = ٣٦$

$\therefore ه \times \frac{٥}{١٢} \times ٣٦ = ٣٦$ $\therefore ه = ١٥$ سنتيمتر

مثال (٢٨)

أ ب جـ د معين طول ضلعه ١٢ سم ، $ق(\hat{أ}) = ٦٠°$ أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ سنتيمتر في الاتجاهات $د م$ ، $ب أ$ ، $ب جـ$ ، $د جـ$ ، $د ب$ على الترتيب أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول نقطة م .

الحل :



$\overrightarrow{جـ_م} = \dots - ٦ \times ١٢ \sin ٦٠ + ٥ \times ١٢ \sin ٦٠$

$+ ٧ \times ١٢ \sin ٦٠$

$= ١٢ \sin ٦٠ (-٦ + ٥ + ٧)$

$= ١٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٦$

$\therefore \overrightarrow{جـ_م} = ٣٦\sqrt{٣}$ سنتيمتر . سم

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال (٢٩)

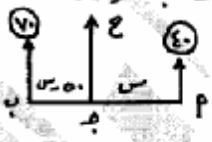
قوتان متوازيتان قـ١، قـ٢ تؤثران في نقطتين ﺃ، ب على الترتيب وقيمتاهما ٤٠، ٧٠ نيوتن ﺃب = ٥٠ سم أوجد محصلة قـ١، قـ٢

(١) إذا كانتا في اتجاه واحد

(٢) إذا كانتا متضادتين في الاتجاه

الحل :

(١) إذا كانتا قـ١، قـ٢ في اتجاه واحد



∴ ﺟ = قـ١ + قـ٢

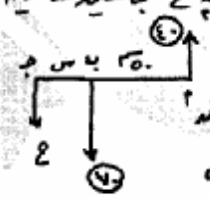
∴ ﺟ = ٤٠ + ٧٠ = ١١٠ نيوتن

∴ قـ١ × ﺃﺟ = قـ٢ × ﺟب

∴ ٤٠ × س = ٧٠ (٥٠ - س)

∴ ١١٠ س = ٣٥٠٠ ∴ س = $\frac{٣٥٠}{١١}$ سم

(٢) إذا كانتا قـ١، قـ٢ في اتجاهين متضادين



∴ ﺟ = قـ٢ - قـ١

∴ ﺟ = ٧٠ - ٤٠ = ٣٠ نيوتن

∴ ٤٠ (٥٠ + س) = ٧٠ س

∴ س = $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم

مثال (٣٠)

قـ١، قـ٢ متوازيتان ومن اتجاه واحد والبعد بينهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما ٥٠ نيوتن وبعد خط عملها عن قـ١ مسافة ٤ سم أوجد مقدار كل من القوتين .

الحل :

∴ قـ١، قـ٢ من اتجاه واحد

∴ قـ١ + قـ٢ = ﺟ

قـ١ + قـ٢ = ٥٠ ← (١)

∴ قـ١ × ٤ = قـ٢ × ١٦

∴ قـ١ = ٤ قـ٢ ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ ٤ قـ٢ + قـ٢ = ٥٠

∴ ٥ قـ٢ = ٥٠ ← قـ٢ = ١٠ نيوتن

∴ ١٠ + قـ١ = ٥٠

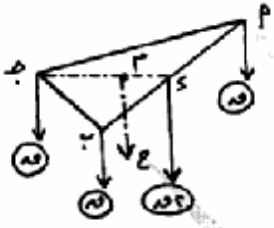
∴ قـ١ = ٥٠ - ١٠

← قـ١ = ٤٠ نيوتن ✱

مثال (٣١)

ﺃ ب ﺟ مثلث تؤثر عند رؤوسه ﺃ، ب، ﺟ ثلاث قوى متساوية ومتوازية ومن اتجاه واحد اثبت أن محصلة هذه القوى تمر بنقطة تلاقي متوسطات المثلث .

الحل :



∵ ٣ء محصلة القوتين ٢ق، ق

القوتين في اتجاه واحد

ومن نفس الاتجاه

وتؤثر عند ء .

وكذلك ٣د محصلة القوتين ٢ق، ق وتؤثر عند م حيث : ٢ق × ٢م = ق × م ﺟ

∴ ٢م = ٣ ﺟ ← م = $\frac{١}{٢}$ م ﺟ

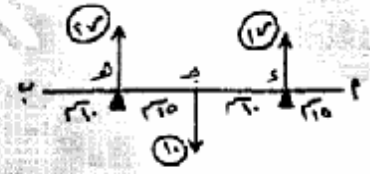
∴ م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث

∴ خط عمل المحصلة ح يمر بنقطة تلاقي المتوسطات

مثال (٣٢)

قضيب ﺃب طوله ٥٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن يؤثر من منتصفه بارتكاز على حاملين من وضع أثقل على حاملين أحدهما يبعد ١٥ سم عن ﺃ والآخر يبعد ١٠ سم عن ب ، أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين . وما هو مقدار الثقل الذي يجب تعليقه عند الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران وما هي تحت الضغط على الحامل عندئذ .

الحل :



أولاً : ∵ الجسم يتزن تحت تأثير القوى المتوازية

ق١ + ق٢ = ١٠ نيوتن

∴ ق١ + ق٢ = ١٠ ← (١)

∴ ﺟ = ٠ ← ق١ × ٢٥ - ق٢ × ١٥ = ٠

∴ ق١ = $\frac{١٥ \times ١٠}{٢٥}$ = ٦ نيوتن

∴ ق٢ = ١٠ - ٦ ← ق٢ = ٤ نيوتن

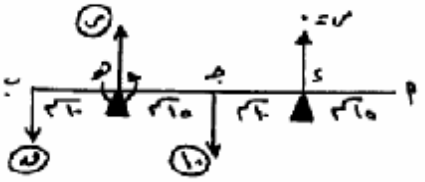
ثانياً : عندما يكون على وشك الدوران حول ﺟ ينفصل عنه الحامل عند ء فيكون ق عند الحامل ء = صفر

∵ الجزيئة مستزنة ∴ ق = ١٠ + ق

∵ ﺟ = صفر ← -١٥ × ١٠ + ق × ١٠ = ٠

∴ ق = ١٥ نيوتن ✱

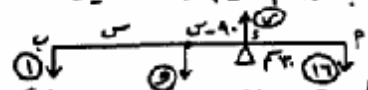
∴ ق = ١٠ + ١٥ ← ق = ٢٥ نيوتن ✱



مثال (٣٣)

أب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ٨ نيوتن وعلق عند ﺃ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإنه القضيب يتزن في هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم عن ﺃ وإذا نقص الثقل الموجود عند ﺃ وصار ٨ نيوتن فإنه القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠ سم عن ﺃ أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره .

الحل : ﺃ



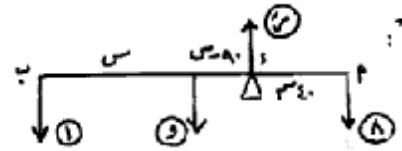
أولاً : ∵ الجسم يتزن بالقوى ق، ١٦، ١٧ نيوتن

∴ ﺟ = ٠ ← ق × ٩٠ + ١٧ (٩٠ - س) - ١٦ × ٣٠ = ٠

∴ ٩٠ ق + ١٥٣٠ - ١٧ س - ٤٨٠ = ٠

∴ ١٧ س = ٩٠ ق + ١٠٥٠ ← (١)

ثانياً :



∵ الجسم يتزن بالقوى ق، ١٦، ١٧ نيوتن

∴ ﺟ = ٠

← ق × ٨٠ + ١٧ (٨٠ - س) - ٨ × ٤٠ = ٠

∴ ٨٠ ق + ١٣٦٠ - ١٧ س - ٣٢٠ = ٠

∴ ٨٠ ق - ١٧ س + ١٠٤٠ = ٠

١٠ ق = ١٥٠ نيوتن ∴ ق = ١٥ نيوتن

بالتعويض من (١) ← ١٧ س = ١٣٥٠ - ١٠٥٠

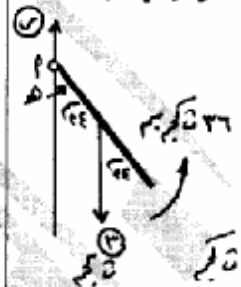
∴ س = $\frac{٩٦٠}{١٥}$ = ٦٤ سم ∴ القضيب يبعد ٦٤ سم عن ب

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال (٣٤)

قضيب منتظم طوله ٤٨ سم وزنه ٣ ث كجم يتزن أفقيا من مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند الطرف P أثر عليه ازدواج من مستوى رأسى مقداره عزمه ٣٦ ث كجم سم أوجد من وضع الاتزان رد فعل المفصل وكذلك تماس زاوية ميل القضيب على الرأسى

الحل :



∵ القضيب يتزن تحت تأثير ازدواجين

∴ جـ = ٣٦ ث كجم سم

، جـ = مقدار التوتر ٣ ث كجم

∵ الوتد وردة الفعل يكونان ازدواج

∴ ر = ٣ ث كجم وتؤثر رأسيا لأعلى

∵ جـ + جـ = ٠ ← ٣٦ - ٣ × ٢٤ جا هـ = ٠

∴ جا هـ = $\frac{1}{2}$ ∴ هـ = ٣٠° ✻

مثال (٣٥)

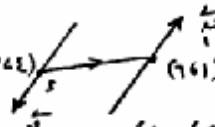
إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٢\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٤\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -٤\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_4} = ٥\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ تؤثر من النقط P = (١ ، ٦) ، ب = (٨ ، ٥) ، جـ = (-٤ ، ١) ، د = (٤ ، ٣) على الترتيب .

اثبت أن القوى متزنة .

الحل :

∵ $\overrightarrow{ق_4} = -\overrightarrow{ق_3}$ ∴ $(\overrightarrow{ق_3} ، \overrightarrow{ق_4})$ تكونان ازدواج

عزمه هو :



جـ = $\overrightarrow{ق_3}$ × $\overrightarrow{ق_4}$

= (-٤ ، ١) × (٥ - ٢)

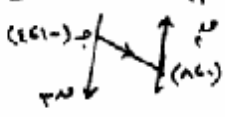
= (-٤ ، ١) × (٣ ، -٧)

= (-١٥ - ٦) $\overrightarrow{ك}$ = ٢١ $\overrightarrow{ك}$ ← (١)

وبالمثل

$\overrightarrow{ق_2} = -\overrightarrow{ق_1}$ ∴ $(\overrightarrow{ق_1} ، \overrightarrow{ق_2})$ تكونان ازدواج

عزمه هو :



جـ = $\overrightarrow{ب}$ × $\overrightarrow{ق_2}$

= (٤ ، ١) × (٧ ، ٤)

∵ جـ = (١٦ - ٧) $\overrightarrow{ك}$ = ٩ $\overrightarrow{ك}$ ← (٢)

من (١) ، (٢)

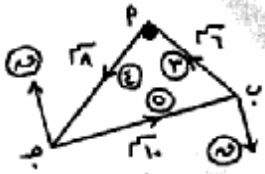
∴ جـ + جـ = ٩ $\overrightarrow{ك}$ - ٩ $\overrightarrow{ك}$ = ٠

∴ المجموعة متزنة

مثال (٣٦)

P ب جـ مثلث فيه P ب = ٣٦ ، P جـ = ٣٨ ، ب جـ = ٣٠ سم أثرت القوى ٥٦ ، ٤٦ ، ٣ نيوتن في ب P ، P جـ ، جـ ب أوجد القوة التي تؤثر عند P من ضلعي P ب ، P جـ وعمود يقيه عليها لكي تحدثا اتزان مع المجموعة المذكورة .

الحل :



∵ الجسم يتزن تحت تأثير ازدواجين

، جـ المكون من القوى الثلاثة المأخوذة باتجاهاتها في ترتيب دوري واحد في أضلاع Δ P ب جـ

، جـ الناتج من القوتين د ، هـ

∵ جـ = ٢ × مساحة Δ P ب جـ × $\frac{1}{2}$

= ٢ × $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٦ × $\frac{1}{2}$ = ٢٤ نيوتن سم

∵ جـ + جـ = صفر ∴ ٢٤ - ١٠ هـ = ٠

∴ هـ = $\frac{٢٤}{١٠}$ ← هـ = ٢٫٤ نيوتن

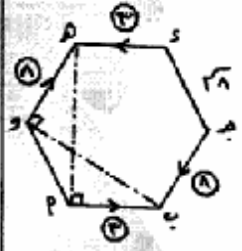
∴ القوتان هما ٢٫٤ ، ٢٫٤ نيوتن

مثال (٣٧)

P ب جـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ٢٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٨٦٣ ، ٨٦٣ ، ٨٦٣ ث كجم من P ب ، هـ د ، و هـ ، و هـ على الترتيب

اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج ، واحسب عيار عزمه .

الحل :



∵ المجموعة تتكون من ازدواجين

، جـ تكون من القوتين ٣٦٣ وذراعه P هـ

، جـ وتتكون من القوتين ٨٦٣ وذراعه ب و

∵ جـ = جـ + جـ

= ٣٦٣ × ٢ + ٣٦٣ × (-٨)

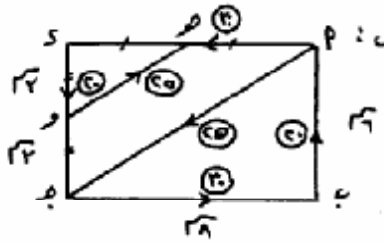
= ٣٦٣٤ - ٣٦٢٤

∴ جـ = -٣٦٤٠ ث كجم سم

مثال (٣٨)

P ب جـ د مستطيل فيه P ب = ٣٦ ، ب جـ = ٢٨ سم ، هـ منتصف P د ، و منتصف جـ د ، أثرت القوى التي مقاديرها ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٢٥ ث كجم من ب P ، جـ ب ، جـ د ، P د ، P هـ ، و هـ على الترتيب . أوجد المقياس الجبري لعزم الازدواج المكافئ لهذه القوى .

الحل :



المجموعة تكافئ ٣ ازدواجات

جـ من القوتين (٢٥ ، ٢٥) وذراعه ب جـ

جـ من القوتين (٢٥ ، ٣٠) وذراعه P د

جـ من القوتين (٢٥ ، ٢٥) وذراعه بينهما P هـ وزاوية الميل هـ P د

∴ جـ = جـ + جـ + جـ

= ٢٨٠ + ٨ × ٢٥ - ٦ × ٣٠ × $\frac{٦}{١٠}$

= ٢٨٠ ث كجم سم ✻

أطيب الأمنيات بالتفوق

أ / ابراهيم عادل حسنى

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com