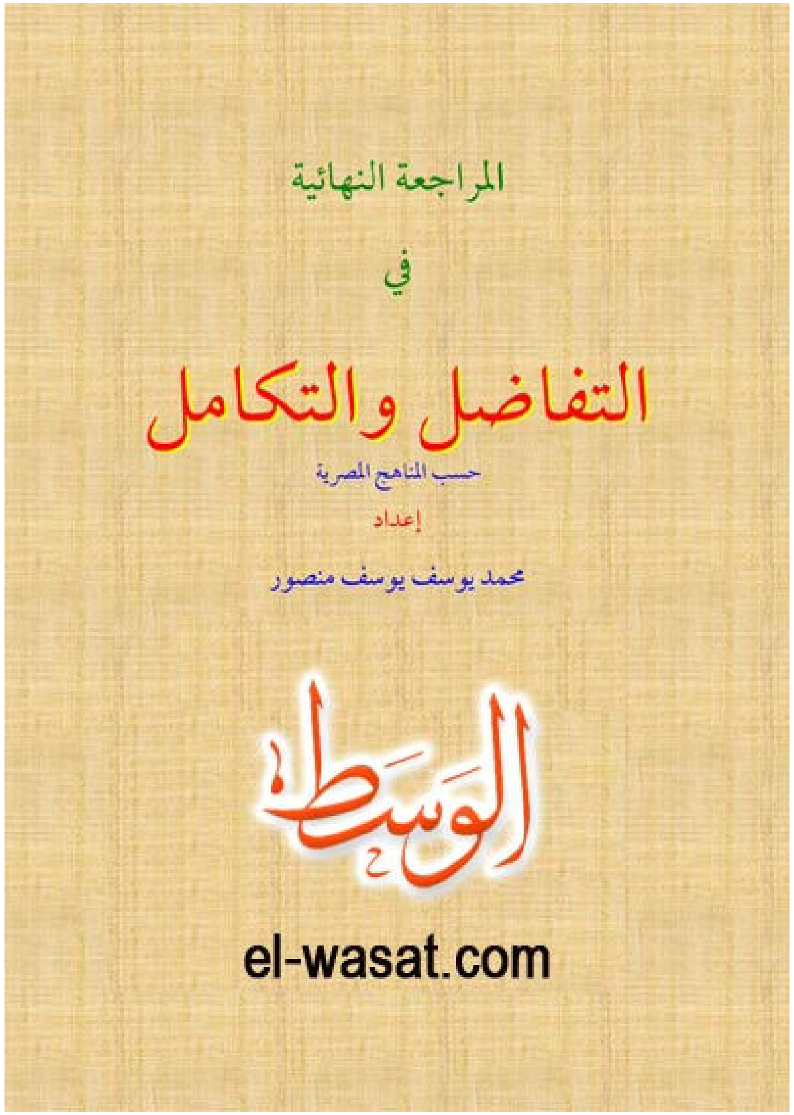
أبنائنا طلاب بوابة الثانوية العامة
نقدم إليكم اليوم المراجعة النهائية في مادة التفاضل والتكامل
ونتمنى لجميع أبنائنا الطلاب النجاح والتفوق على الدوام



بعض العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

جا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = جتاه.	جتا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = جاه.
ظا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = ظتاه = $\frac{١}{ظاه}$.	ظتا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = ظاه = $\frac{١}{ظتاه}$.
قا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = قتاه = $\frac{١}{جاه}$.	قتا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = قاه = $\frac{١}{جتاه}$.
جا(ط − ه) = جاه.	جا$(\frac{ط}{٢} + $ه$)$ = جتاه.
جتا(ط − ه) = −جتاه.	جتا$(\frac{ط}{٢} + $ه$)$ = −جاه.
ظا(ط − ه) = −ظاه.	ظا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = −ظتاه.
جا(ط + ه) = −جاه.	جا$(\frac{٣ط}{٢} - $ه$)$ = −جتاه.
جتا(ط + ه) = −جتاه.	جتا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = −جاه.
ظا(ط + ه) = ظاه.	ظا$(\frac{ط}{٢} - $ه$)$ = ظتاه.
جا(٢ط − ه) = −جاه.	جا$(\frac{٣ط}{٢} + $ه$)$ = −جتاه.
جتا(٢ط − ه) = جتاه.	جتا$(\frac{٣ط}{٢} + $ه$)$ = جاه.
ظا(٢ط − ه) = −ظاه.	ظا$(\frac{٣ط}{٢} + $ه$)$ = −ظتاه.
جا(٢ط + ه) = جاه.	جتا(٢ط + ه) = جتاه.
جا^{٢}ه + جتا^{٢}ه = ١ ومنها:	ظا^{٢}ه + ١ = قا^{٢}ه ومنها:
جا^{٢}ه = ١ − جتا^{٢}ه.	ظا^{٢}ه = قا^{٢}ه − ١.
جتا^{٢}ه = ١ − جا^{٢}ه.	قا^{٢}ه − ظا^{٢}ه = ١.
ظتا^{٢}ه + ١ = قتا^{٢}ه ومنها:	جاه · قتاه = ١.
ظتا^{٢}ه = قتا^{٢}ه − ١.	جتاه · قاه = ١.
قتا^{٢}ه − ظتا^{٢}ه = ١.	ظاه · ظتاه = ١.

الوسط
el-wasat.com

جا٢ه = ٢ جاه جتاه.	جا أ = ٢جا$\frac{أ}{٢}$ جتا$\frac{أ}{٢}$
جتا٢ه = جتا^{٢}ه − جا^{٢}ه	جتاأ = جتا$^٢\frac{أ}{٢}$ − جا$^٢\frac{أ}{٢}$.
= ٢جتا^{٢}ه − ١	= ٢جتا$^٢\frac{أ}{٢}$ − ١.
= ١ − ٢جا^{٢}ه	= ١ − ٢جا$^٢\frac{أ}{٢}$.
جتا^{٢}ه = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢ه).	جتا$^٢\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$(١ + جتاأ).
جا^{٢}ه = $\frac{١}{٢}$(١ − جتا٢ه).	جا$^٢\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$(١ − جتاأ).
ظا٢ه = $\frac{٢ظاه}{١ - ظا^٢ه}$.	ظاأ = $\frac{٢ظا\frac{أ}{٢}}{١ - ظا^٢\frac{أ}{٢}}$.

العلاقات الجبرية ـ التحليلية ـ للخط المستقيم

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

(١) أس + ب ص + جـ = ٠

الوسط
el-wasat.com

صور أخرى لمعادلة الخط المستقيم

(٢) ص = م س + جـ ، حيث م ميل المستقيم ، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات.

(٣) ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)، حيث م ميل المستقيم ، والمستقيم يمر بالنقطة (س$_١$، ص$_١$).

(٤) $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ حيث أ الجزء المقطوع من محور السينات ، ب الجزء المقطوع من محور الصادات.

(٥) المعادلة المتجهة $\overrightarrow{ر}$ = (س$_١$، ص$_١$) + ك (أ، ب)، حيث (س$_١$، ص$_١$) نقطة معلومة على المستقيم، (أ، ب) متجه اتجاه للمستقيم (أي يوازي المستقيم).

(٦) المستقيم الموازي لمحور السينات (عمودي على محور الصادات) معادلته على الصورة ص = جـ ويكون ميله صفرًا.

(٧) المستقيم الموازي لمحور الصادات (عمودي على محور السينات) معادلته على الصورة س = جـ

ويكون ميله غير معرف.

ميل الخط المستقيم

(١) إذا كان المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ فإن ميله يساوي ظا هـ .

(٢) إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن ميله $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$.

(٣) ميل المستقيم في المعادلة (١) يساوي $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$.

(٤) ميل المستقيم في المعادلتين (٢) ، (٣) يساوي م .

(٥) ميل المستقيم في المعادلة (٤) يساوي $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$.

(٦) ميل المستقيم في المعادلة (٥) يساوي $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$.

(٧) يمكن استنتاج ميل الخط المستقيم باشتقاق معادلته بالنسبة إلى س – أي إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للخط المستقيم.

(٨) المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل.

(٩) المستقيمان المتعامدان يكون حاصل ضرب ميلاهما يساوي -1 .

ملاحظات

(١) يقال لمنحنيين أنهما متماسان عند نقطة ما $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

أولاً: النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ تقع على المنحنيين – أي تحقق معادلة كل منهما.

ثانيًا: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنى الأول عند النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنى الثاني عند نفس النقطة.

(٢) يقال لمنحنيين أنهما متقاطعان على التعامد عند نقطة ما $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

أولاً: النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ تقع على المنحنيين – أي تحقق معادلة كل منهما.

ثانيًا: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنى الأول × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنى الثاني $= -1$ عند النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$.

المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت س ، ص ، ع ... مثلاً– ثلاثة متغيرات مرتبطة بعلاقة ما، ولتكن:

$$\text{س}^3 - 2\text{ص} + 3\text{س}\text{ص}^2 = 5 - \frac{4}{\text{ع}} \quad \text{.......... (١)}$$

وكانت هذه المتغيرات دوال في الزمن (ن) وقابلة للاشتقاق في (ن)، فإنه باشتقاق العلاقة (١) بالنسبة للزمن (ن) نحصل على العلاقة:

$$3\text{س}^2 \cdot \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - 2\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + 3\text{ص}^2 \cdot \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + 6\text{س}\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{4}{\text{ع}^2} \cdot \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} \quad \text{.......... (٢)}$$

ويسمى $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ المعدل الزمني لتغير س أو معدل تغير س بالنسبة للزمن ن أو سرعة تغير س ... إلخ.

لذلك تسمى الكميات $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ بالمعدلات الزمنية المرتبطة.

* $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \begin{cases} \text{كمية موجبة في اتجاه تزايد س} \\ \text{كمية سالبة في اتجاه تناقص س} \end{cases}$

* في تمرين المعدلات الزمنية المرتبطة، لابد من وجود علاقة بين المتغيرات المذكورة في التمرين – قد تكون هذه العلاقة قانون رياضي معروف (طول محيط – مساحة سطح – حجم مجسم – ....)، أو يستنتج الطالب تلك العلاقة من خواص موضوع التمرين (هندسية – جبرية – تحليلية – ....)

* نُعين المطلوب في ضوء الشروط الواردة بالتمرين.

* إذا كان المعدل الزمني للمتغير يساوي مقدار ثابت دائماً، فإننا يمكننا التعبير عن هذا المتغير كدالة في الزمن كما يلي:

المتغير = المعدل × الزمن + قيمته الابتدائية.

فمثلاً: إذا كان المعدل الزمني للتغير في س يساوي أ فإن: $\text{س} = \text{أ}\text{ن} + \text{ب}$، حيث ب = قيمة س عند بدء قياس الزمن $(\text{ن} = 0)$.

* السرعة ع هي معدل تغير الإزاحة ف بالنسبة للزمن $(\text{ع} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}})$.

* العجلة جـ هي معدل تغير السرعة ع بالنسبة للزمن (جـ = $\frac{دع}{دن}$).

بعض العلاقات والقوانين الرياضية

* طول محيط أي مضلع = مجموع أطوال أضلاعه.
* طول محيط المثلث المتساوي الأضلاع = ٣ × طول الضلع.
* طول محيط المثلث المتساوي الساقين = ٢ × طول الساق + طول القاعدة.
* طول محيط المربع (المعين) = ٤ × طول الضلع.
* طول محيط المستطيل = ٢ × (طوله + عرضه).
* طول محيط متوازي الأضلاع = ٢ × (مجموع طولي ضلعين متجاورين).
* طول محيط الدائرة =٢ ط نق
* مساحة سطح أي مثلث = $\frac{١}{٢}$ طول قاعدته × ارتفاعه.

= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعين × جيب قياس الزاوية بينهما.

* مساحة سطح المثلث المتساوي الأضلاع = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × مربع طول ضلعه.
* مساحة سطح المثلث القائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعي القائمة.
* مساحة سطح المربع = مربع طول ضلعه.
* مساحة سطح المستطيل = حاصل ضرب بعديه.
* مساحة سطح متوازي الأضلاع = طول قاعدته × ارتفاعه.

= حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين × جيب قياس زاوية رأسه.

= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي قطريه × جيب قياس الزاوية بينهما .

* مساحة سطح المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي قطريه.
* مساحة سطح شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع طولي قاعدتيه المتوازيتين × ارتفاعه.
* مساحة سطح الدائرة = ط نق^{٢}
* المساحة الجانبية لمتوازي السطوح المستطيلة = طول محيط قاعدته × ارتفاعه.

* المساحة الكلية لمتوازي السطوح المستطيلة = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه.
* المساحة الجانبية للمكعب = ٤× مربع طول حرفه.
* المساحة الكلية للمكعب = ٦× مربع طول حرفه.
* المساحة الجانبية للأسطوانة الدائرية القائمة =٢ ط نق ع ، حيث نق طول نصف قطر قاعدتها، ع ارتفاعها.
* المساحة الكلية للأسطوانة الدائرية القائمة =٢ ط نق ع +٢ ط نق^{٢}.
* المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = ط نق ل ، حيث نق طول نصف قطر قاعدته، ل طول الراسم.
* المساحة الكلية للمخروط الدائري القائم =ط نق ل+ط نق^{٢}.
* مساحة سطح الكرة =٤ ط نق^{٢} ، حيث نق طول نصف قطر الكرة.
* حجم متوازي السطوح المستطيلة = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة.
* حجم المكعب = مكعب طول حرفه.
* حجم المنشور القائم = مساحة سطح قاعدته × طول حرفه الجانبي.
* حجم الهرم القائم =$\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ارتفاعه.
* حجم الأسطوانة الدائرية القائمة =ط نق^{٢}ع.
* حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ط نق^{٢}ع، حيث ع ارتفاع المخروط.
* حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ط نق^{٣}

النقطة الحرجة للدالة

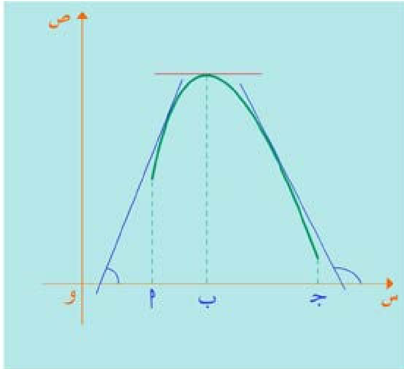
* هي إحدى نقط الدالة التي تحقق واحدة من الحالتين التاليتين:

(١) المشتقة الأولى للدالة عندها تساوي الصفر.　(٢) المشتقة الأولى للدالة عندها غير موجودة.

كما قد تتميز النقطة الحرجة للدالة – أحيانًا – بأن تفصل بين فترتين يختلف نوع اطراد الدالة فيما بينهما.

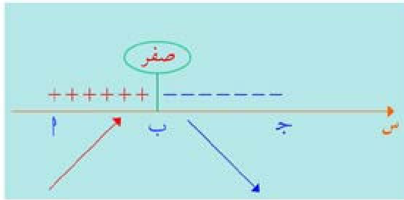
اطراد الدالة

* إن ما يميز اطراد الدالة على فترة ما من مجالها، هو ميل المماس لمنحنى الدالة على تلك الفترة، حيث يلاحظ أن الفترة التي يكون فيها ميل المماس موجبًا عند أي نقطة من نقطها، تكون الدالة تزايدية عليها، بينما تكون الدالة تناقصية في تلك الفترة التي يكون فيها ميل المماس سالبًا عند أي نقطة من نقطها.



شكل (١)

لذا وجب؛ عند بحث فترات التزايد والتناقص للدالة على فترة ما من مجالها، أن نبحث إشارة المشتقة الأولى للدالة على تلك الفترة. وشكل (٢) يبين إشارة الدالة في شكل (١) على الفترة [أ،ج]، حيث نلاحظ أن الدالة متزايدة على الفترة]أ،ب[، بينما تكون متناقصة على الفترة]ب،ج[.



شكل (٢)

نقط النهايات (العظمى / الصغرى) المحلية

(١) نقطة النهاية العظمى المحلية:

يقال أن للدالة د نقطة نهاية عظمى محلية (أ،د(أ))، إذا كانت د(أ) هي أكبر قيم الدالة في أي جوار مركزه النقطة س = أ مهما صغر.

والملاحظ أن نقطة النهاية العظمى المحلية تحقق الخصائص التالية:

(١) نقطة النهاية العظمى المحلية، هي نقطة حرجة.

(٢) تسبقها فترة تزايد للدالة دَ(س) > ٠، وتعقبها فترة تناقص دَ(س) < ٠.

(٣) تسمى د(أ) قيمة عظمى محلية للدالة.

في شكل (١) تمثل النقطة (ب،د(ب)) نقطة نهاية عظمى محلية.

(٢) نقطة النهاية الصغرى المحلية:

يقال أن للدالة د نقطة نهاية صغرى محلية (أ،د(أ))، إذا كانت د(أ) هي أصغر قيم الدالة في أي جوار مركزه النقطة س = أ مهما صغر.

كما يلاحظ أن نقطة النهاية الصغرى المحلية تحقق الخصائص التالية:

(١) نقطة النهاية الصغرى المحلية، هي نقطة حرجة.

(٢) تسبقها فترة تناقص دَ(س) < ٠ ، وتعقبها فترة تزايد للدالة دَ(س) > ٠.

(٣) تسمى د(أ) قيمة صغرى محلية للدالة.

ملحوظة:

يمكن اختبار نوع النقطة الحرجة للدالة – أحيانًا – باستخدام المشتقة الثانية للدالة، وتسمى الدراسة في هذه الحالة (اختبار المشتقة الثانية)، فإذا وجدت للدالة د نقطة حرجة عند س = أ وكانت:

(١) دً(أ) > ٠ كانت النقطة (أ،د(أ)) نقطة نهاية صغرى محلية.

(٢) دً(أ) < ٠ كانت النقطة (أ،د(أ)) نقطة نهاية عظمى محلية.

(٣) دً(أ) = ٠، يفشل اختبار المشتقة الثانية ونضطر لبحث إشارة المشتقة الأولى حول النقطة س = أ.

القيمة (العظمى / الصغرى) المطلقة

(١) القيمة العظمى المطلقة:

هي أكبر القيم التي تأخذها الدالة داخل الفترة قيد الدراسة.

في شكل (١): عند دراسة الدالة على الفترة [أ،ج] أو]أ،ج[، يمكننا القول أن د(ب) هي القيمة العظمى المطلقة.

(٢) القيمة الصغرى المطلقة:

هي أصغر القيم التي تأخذها الدالة داخل الفترة قيد الدراسة.

(٣) حساب القيمة (العظمى / الصغرى) المطلقة على فترة مغلقة:

أولاً: نعين النقط الحرجة للدالة والواقعة داخل الفترة المغلقة.

ثانيًا: نحسب قيم الدالة عند نقطها الحرجة داخل الفترة المغلقة.

ثالثًا: نحسب قيمتي الدالة عند بداية ونهاية الفترة المغلقة.

رابعًا: أكبر القيم التي نحصل عليها في الخطوتين (ثانيًا وثالثًا) تكون هي القيمة العظمى المطلقة – وإن تكررت –، وأصغرها تكون هي القيمة الصغرى المطلقة – وإن تكررت.

تحدب المنحنى

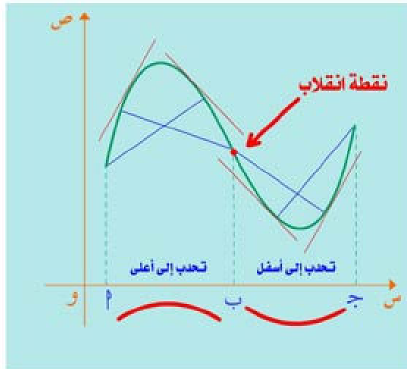
(١) يقال للمنحنى أنه محدب إلى أعلى على فترة ما، إذا كان المنحنى يقع أعلى الوتر المرسوم له في هذه الفترة، أو أسفل أي مماس مرسوم له على هذه الفترة – شكل (٣).

(٢) يقال للمنحنى أنه محدب إلى أسفل على فترة ما، إذا كان المنحنى يقع أسفل الوتر المرسوم له في هذه الفترة، أو أعلى أي مماس مرسوم له على هذه الفترة – شكل (٣).

(٣) يميز تحدب المنحنى؛ إشارة المشتقة الثانية له، فإذا كانت:

دً(س) > ٠ خلال فترة ما، كان المنحنى محدبًا إلى أسفل في تلك الفترة.

دً(س) < ٠ خلال فترة ما، كان المنحنى محدبًا إلى أعلى في تلك الفترة.



شكل (٣)

نقطة الانقلاب

هي إحدى نقط الدالة يتحقق عندها شرط واحد فقط وهو: يتغير حولها تحدب المنحنى – شكل (٣)، وقد تكون المشتقة الثانية عندها غير موجودة أو تساوي الصفر.

رسم الشكل العام لمنحنى الدالة

لرسم الشكل العام لمنحنى دالة ما (كثيرة حدود – غالبًا) نعين النقط التالية:

أولاً: النقط الحرجة للدالة – إن وُجدت –، ونحدد نوع كل منها (عظمى / صغرى) محلية.

ثانيًا: نقط الانقلاب – إن وُجدت – ونصف التحدب حولها.

ثالثًا: بعض النقط المساعدة، تكون في الغالب: نقطة قبل أول النقط في البندين السابقين، ونقطة أخرى قبل آخر نقط نفس البندين، وإذا كانت النقط في البندين السابقين تفصل بينها مسافات كبيرة يمكن انتقاء بعض النقط بينها.

تطبيقات القيم العظمى والصغرى المطلقة

* يتم التعرف على تمرين تطبيقات القيم العظمى والصغرى المطلقة، باحتوائه على أحد التعبيرات التالية: «أكبر .... – أصغر .... – أكبر ما يمكن – أصغر ما يمكن – نهاية عظمى – نهاية صغرى»، أو أي تعبير يعني أيًا منها، ثم يُسمَّى المتغير المطلوب دراسة إحدى نهايتيه «مجموع – حاصل ضرب – مسافة – طول محيط – مساحة – حجم – تكلفة – إيراد – ربح – عدد وحدات ... إلخ».

* نُعين العلاقة الرياضية بين المتغير المطلوب دراسته وباقي المتغيرات في التمرين، وهذه العلاقة إمّا أن تكون علاقة رياضية معروفة، أو يُنَصُّ عليها في التمرين صراحةً، أو تُستنتج من خبراتنا عن موضوع التمرين.

* إذا كانت العلاقة تتضمن المتغير المطلوب دراسته كدالة في أكثر من متغير، ينبغي علينا التعبير عن هذه العلاقة كدالة في متغير واحد فقط، وذلك باستخدام علاقات يُنَصُّ عليها في التمرين أو تُستنتج من خواص موضوع التمرين.

* نُعين المشتقة الأولى للعلاقة بعد ذلك، ثم نساويها بالصفر لإيجاد نقطتها (نقطها) الحرجة، ثم نختبر أيّ النقط الحرجة تُحقق المطلوب من التمرين.

* يجب مراعاة فترات تعريف المتغيرات الواردة بالتمرين – أي مجال الدالة قيد الدراسة، حيث أن بعض المتغيرات التي نقوم بدراستها قد تأخذ قيماً موجبة فقط، وبعضها قد يأخذ قيماً داخل فترات محدودة.

بعض العلاقات الخاصة

* التكلفة الكلية للإنتاج = تكلفة الوحدة الواحدة × عدد الوحدات.
* الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة.
* الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية.
= ربح الوحدة الواحدة × عدد الوحدات.
* المساحة الكلية لصندوق (إناء – حوض) على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء:
= مساحته الجانبية + مساحة قاعدة واحدة.
* المساحة الكلية لعلبة (إناء – حوض) على شكل أسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء:
= مساحتها الجانبية + مساحة قاعدة واحدة.

التكامل

راجع جدول تكاملات الدوال الأساسية التالي، مع إضافة ثابت التكامل لكل دالة في عمود التكاملات:

تفاضلات وتكاملات بعض الدوال الأساسية

تفاضلها د̅(س)	د(س)	تكاملها ∫د(س)·ءس
٠	أ	أس
ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$	$\text{س}^{\text{ن}}$	$\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ ، ن ≠ −١
ن أ $(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}-1}$	$(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}$	$\frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)}$ ، ن ≠ −١
جتا س	جا س	−جتا س
−جا س	جتا س	جا س
قا^2 س	ظا س	——
−قتا^2 س	ظتا س	——
——	قا^2 س	ظا س
——	قتا^2 س	− ظتا س
أ جتا (أس + ب)	جا (أس + ب)	$-\frac{1}{\text{أ}}$ جتا (أس + ب)
−أ جا (أس + ب)	جتا (أس + ب)	$\frac{1}{\text{أ}}$ جا (أس + ب)
أ قا^2 (أس + ب)	ظا (أس + ب)	——
−أ قتا^2 (أس + ب)	ظتا (أس + ب)	——
——	قا^2 (أس + ب)	$\frac{1}{\text{أ}}$ ظا (أس + ب)
——	قتا^2 (أس + ب)	$-\frac{1}{\text{أ}}$ ظتا (أس + ب)
٢جاس جتا س = جا٢س	جا^2 س	$\frac{1}{2}$(س − $\frac{1}{2}$ جا٢س)
−٢جاس جتا س = −جا٢س	جتا^2 س	$\frac{1}{2}$(س + $\frac{1}{2}$ جا٢س)
يترك الاستنتاج للطالب	جا^2 (أس + ب)	يترك الاستنتاج للطالب
يترك الاستنتاج للطالب	جتا^2 (أس + ب)	يترك الاستنتاج للطالب

تمارين

١- ابحث وجود نهاية للدالة:

$$د(س)=\begin{cases} س|س-١| & ،\ س\le ١ \\ \dfrac{٢س^{٢}+س-٣}{|س-١|} & ،\ س>١ \end{cases}$$ عند $س=١$

٢- ادرس اتصال $د(س)=\dfrac{س-٥}{\sqrt{٢٥-س^{٢}}}$

٣- ادرس اتصال $د(س)=(٣س^{٢}+جاس)(١-ظا٢س)$

٤- أوجد مجموعة قيم أ التي تجعل $د(س)=\dfrac{٣-جتا^{٢}س}{س^{٢}+أس+أ-٣}$ متصلة على ح.

٥- ابحث اتصال:

$$د(س)=\begin{cases} س|س|+٤ & ،\ س\le ٠ \\ \dfrac{|س|}{س}+٣ & ،\ س>٠ \end{cases}$$ عند $س=٠$

٦- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} \dfrac{أ}{س} & ،\ س\le ١ \\ س+٢ & ،\ س>١ \end{cases}$$ متصلة عند $س=١$، فما قيمة أ؟

٧- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} ظا(\frac{ط}{٤}س) & ،\ س\le ١ \\ \dfrac{جا(س-١)}{س-١} & ،\ س>١ \end{cases}$$

وضح إمكانية إعادة تعريف الدالة $د(س)$ بحيث تكون متصلة عند $س=١$.

٨- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} ٢س-١ & ،\ س\le ١ \\ ٢س+١ & ،\ س>١ \end{cases}$$ ابحث وجود $د'(١)$.

٩- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} س^{٢}-١ & ،\ س\le -١ \\ أ-س & ،\ س>-١ \end{cases}$$ متصلة عند $س=-١$، فما قيمة أ؟ ثم ابحث وجود $د'(-١)$.

١٠- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} س^{٢}+بس+٣ & ،\ س<٢ \\ أس-ج & ،\ س\ge ٢ \end{cases}$$ قابلة للاشتقاق عند $س=٢$، وكان متوسط تغير الدالة يساوي ٣ عندما تتغير س من ١ إلى ٥، أوجد قيمة كل من أ، ب، ج.

١١- إذا كانت:

$$د(س)=\begin{cases} س^{٢}+بس+ج & ،\ س<٠ \\ ٢س+٣ & ،\ س\ge ٠ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق مرتين عند $س=٠$، أوجد قيمة كل من أ، ب، ج $\in$ ح.

١٢- إذا كان: $ص=\dfrac{١+ع}{١-ع}$، $س=\dfrac{١-ع}{١+ع}$ أوجد قيمة $\dfrac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند $س=٢$.

١٣- إذا كان: $ص^{٢}=س^{٢}(١-س)$ أثبت أن: $ص\dfrac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}+(\dfrac{ءص}{ءس})^{٢}+٣س=١$

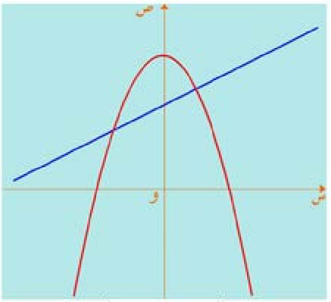
١٤- إذا كان: $ص=\dfrac{س}{س+\sqrt{١+س^{٢}}}$، فأثبت أن: $\dfrac{ص^{٢}}{س^{٢}}=\dfrac{ءص}{ءس}\times\sqrt{١+س^{٢}}$

١٥- إذا كان: $ص^{٢}+س^{٢}=١٦$، فاثبت أن: $ص\dfrac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}+(\dfrac{ءص}{ءس})^{٢}+١=٠$

١٦- إذا كان: $ص=٣جا(٢س+١)$، فأثبت أن:

$$\dfrac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}+٤ص=٠$$

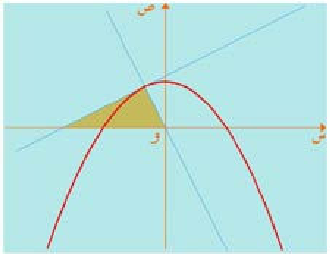
** الأشكال البيانية فيما يلي .. جُعلت لتوضيح الحل للطالب، وليست ضمن معطيات التمرين.



تمرين (١٧)

١٧- إذا كان العمودي للمنحنى: $ص=٤-س^{٢}$ عند

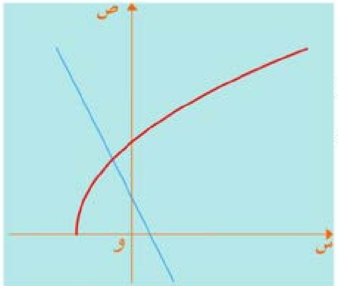
النقطة (١، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند نقطة جـ، فأوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة جـ.



تمرين (٢٢)

١٨- أوجد النقط على المنحنى: ص = $\frac{\text{س} - ٢}{٢\text{س} + ٣}$ والتي يكون المماس عندها موازياً المستقيم: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣، ١) + ك (١، ٧).

١٩- إذا كان المنحنى (س − أ)^{٢} + ص^{٢} = ٨، المنحنى (س + أ)^{٢} + ص^{٢} = ٨ متقاطعين على التعامد، أوجد قيمة أ.



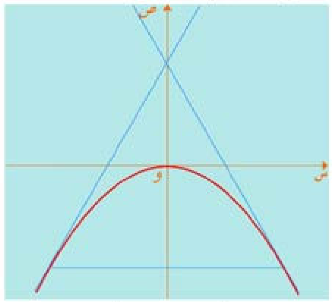
تمرين (٢٤)

٢٠- أوجد معادلة المماس للمنحنى: ص = ٣س^{٢} والذي يوازي المماس للمنحنى: ص = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$ عند النقطة (١، −١).

٢١- أوجد معادلة المماسين المرسومين للمنحنى:

ص = س + $\frac{١}{\text{س}}$ واللذين يوازيان المستقيم: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، ٠) + ك (١، −٣).

٢٢- أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي للمنحنى: ٤ص = ٩ − س^{٢} عند النقطة (−١، ٢).



تمرين (٢٥)

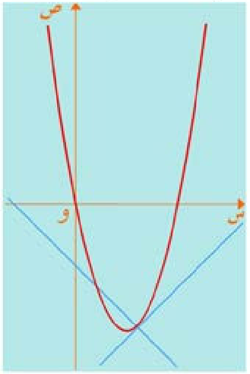
٢٣- إذا كان المنحنى ص = س^{٢} + أ س + ب يمس المستقيم: ص = س عند س = ١، أوجد: أ، ب ∈ ح.

٢٤- أوجد معادلة العمودي على المنحنى: ص = $\sqrt{٦ + ٤\text{س}}$ عند نقط تقاطعه مع المستقيم: ص + ٢س = ١.

٢٥- أوجد النقط الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ٤ص + س^{٢} = ٠ مع المستقيم المار بنقطتي التماس مثلث متساوي الأضلاع.

٢٦- أوجد قياس زاوية ميل المماس للمنحنى: ص = ٥س^{٣} − ٧س^{٢} − ٢س + ٦ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١، ٢) الواقعة على المنحنى.

٢٧- أوجد قيم أ، ب، جـ ∈ ح حتى يكون للمنحنيين: ص = أ س^{٣} + ب س، ص = جـ س^{٢} − س مماس مشترك عند النقطة (−١، ٢) وأوجد معادلة هذا المماس.



تمرين (٣١)

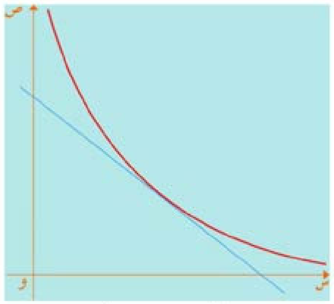
٢٨- أوجد النقط الواقعة على المنحنى: س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٣ والتي يكون مماس المنحنى عندها موازيًا محور الصادات.

٢٩- أوجد معادلة العمودي على المنحنى:

س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٦ص + ٥ = ٠ عند النقط التي يصنع عندها المماس للمنحنى زاوية قياسها $\frac{\text{ط}}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٣٠- أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة:

ص = $\frac{٢\,\text{ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$ عند س = $\frac{\text{ط}}{٤}$.



تمرين (٣٣)

٣١- تتحرك نقطة على المنحنى: ص = س(س − ٥)، أوجد موقع النقطة في اللحظة التي يصنع فيها المماس والعمودي للمنحنى عندها مع محور السينات مثلث متساوي الساقين.

٣٢- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١، −٤) ويمس المنحنى: ص = س^{٢} − س.

٣٣- أثبت أن مجموع الجزأين المقطوعين من محوري الإحداثيات بأي مماس للمنحنى: $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = \text{أ}$ يساوي دائمًا مقدارًا ثابتًا.

٣٤- تتحرك نقطة على المنحنى: $س^{٣}+س ص+ص^{٣}=٥$ بحيث يتزايد إحداثيها الصادي بمعدل ٢وحدة/ ث، فما هو معدل تغير إحداثيها السيني عند النقطة (٢، −١).

٣٥- إذا علمت أن شدّة الاستضاءة عند نقطة تتناسب عكسيًّا مع مربع البعد عن مصدر الضوء. يتحرك قارب في اتجاه منارة بسرعة ثابتة وكان ارتفاع المنارة ٥٠متراً، أثبت أن معدل ازدياد شدّة الاستضاءة عند القارب عندما يكون على بعد ٥٠متراً من قاعدة المنارة يساوي $\frac{٢٥}{٨}$ مرة قدر معدلها عندما يكون على بعد ١٠٠متراً من قاعدة المنارة.

٣٦- ارتطمت سفينة بترول بشعب مرجانية فتدفق منها النفط منتشرًا على سطح الماء في شكل طبقة دائرية رقيقة جدًّا، بفرض أن نصف قطر الدائرة يتزايد بمعدل مترين في الثانية، فكم يكون معدل ازدياد مساحة الطبقة النفطية عندما يبلغ طول نصف قطرها ١٠٠مترًا.

٣٧- صفيحة على شكل مستطيل طوله $\frac{٥}{٢}$ عرضه تنخفض درجة حرارتها بانتظام فينكمش كل من بعديها تبعًا لذلك، فإذا كان العرض ينكمش بمعدل ٠٫٠٢سم/ ث، فاحسب معدل النقص في مساحة سطح الصفيحة عندما يكون عرضها ٩سم.

٣٨- مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٢}$ سم، فإذا كان طول الضلع يتناقص بمعدل ٣سم/ ساعة، أوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التي يُصبح فيها المثلث متساوي الأضلاع.

٣٩- يسير قطار بادئًا حركته في الحادية عشرة صباحًا في اتجاه الشرق بسرعة ٤٥كم/ ساعة، بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة الثانية عشرة ظهرًا من نفس النقطة متجهًا إلى الجنوب بسرعة ٦٠كم/ ساعة. أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثالثة بعد الظهر.

٤٠- أبحرت سفينة من ميناء الساعة التاسعة صباحًا متجهة نحو الغرب بسرعة ٢٠كم/ ساعة، وبعد ساعة أبحرت سفينة أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠كم/ ساعة في اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد معدل التباعد بينهما الساعة الحادية عشرة صباحًا.

٤١- رجل طوله ١٫٧مترًا يسير بسرعة ٤متر/ دقيقة في خط مستقيم متجهًا نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٫٨مترًا، أوجد:

أ) معدل تغير طول ظل الرجل.

ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٦٫٨مترًا من قاعدة المصباح.

٤٢- يصعد رجل طوله ١٧٠سم بسرعة ٦متر/ دقيقة أعلى مُنحدر يميل على الأُفقي بزاوية قياسها $ظا^{-١}\frac{٧}{٢٤}$ وطوله ٢٥ متراً، وهناك مصباح مُثبت على ارتفاع $١١\frac{١}{٤}$متراً فوق المستوى الأُفقي المار بقاعدة المنحدر رأسيًّا فوق أعلى نقطة للمنحدر. أوجد معدل انكماش طول ظل الرجل، وكذلك معدل اقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر.

٤٣- يستند قضيب $\overline{أب}$ طوله عشرة أمتار بطرفه أ على أرض أفقية وبإحدى نقطه جـ على حائط رأسي ارتفاعه ستة أمتار، فإذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢٫٥ متر/ق، أوجد عندما يصل الطرف ب إلى حافة الحائط:

أولاً: معدل هبوط الطرف ب رأسيًّا.   ثانياً: سرعة انزلاق الطرف ب في اتجاه القضيب.

٤٤- برميل أسطواني الشكل طول نصف قطره عشرة أمتار وارتفاعه ١٢مترًا، فإذا كان معدل دخول البترول في البرميل $\frac{١٠٠٠}{ل+١}$ متر^{٣}/ق حيث ل ارتفاع البترول عند أي لحظة، أوجد معدل ارتفاع البترول عندما يمتلئ نصف البرميل.

٤٥- يرفع رجلٌ دلوًا مملوءًا بالأسمنت إلى سقالة تقع على ارتفاع ثمانية أمتار فوق رأسه بواسطة حبل طوله ١٧مترًا يمر على بكرة ملساء مثبتة في السقالة، وكان الرجل يحفظ الطرف الخالص للحبل أفقيًّا في مستوى رأسه ويمشي بسرعة ٤متر/ دقيقة. أوجد السرعة التي يرتفع بها الدلو عندما يمشي الرجل ستة أمتار.

٤٦- ونش ارتفاع قمته عن سطح الماء خمسة أمتار مثبت على شاطئ نهر، يَسْحَبُ من أعلاه بواسطة حبل قارباً في النهر بحيث يسير القارب في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الشاطئ، فإذا كان الحبل ينقص بمعدل ١متر/ ث، أوجد عندما يكون طول الحبل ١٣متراً كل من:

أولا: معدل اقتراب القارب من قاعدة الونش.   ثانيا: معدل اقتراب القارب من الشاطئ.

٤٧- مصباح مضيء مثبت فوق عمود إنارة ارتفاعه ٢٤٫٥مترًا عن سطح الأرض، سقطت كرة من نفس الارتفاع وعلى بعد $٦\frac{١}{٨}$متر من المصباح، فإذا كانت الكرة تهبط رأسيًّا طبقًا للعلاقة $ف=٤٫٩ن^{٢}$ مترًا حيث ن الزمن مُقاسًا بالثانية. أوجد سرعة تحرك ظل الكرة بعد ثانية واحدة

من سقوطها.

٤٨- تتحرك نقطة علي المنحني $ص = س - \frac{س}{س^{٢}+١}$ وكانت سرعتها في اتجاه محور السينات ٩ متر/ث عندما كانت $س = \sqrt{٢}$ متر، أوجد سرعتها في اتجاه محور الصادات عند نفس اللحظة.

٤٩- تطير طائرة على ارتفاع ثابت ٢٠٠٠متر من سطح الأرض متجهة نحو الجنوب بسرعة ٢٤٠متر/ث، فمرت على سيارة تسير بسرعة ٧٠متر/ث في اتجاه الشرق، أوجد المعدل الذي تبتعد به الطائرة عن السيارة بعد مُضي ست ثوانٍ.

٥٠- منشور ثلاثي قائم قاعدته على شكل مثلث متساوي الأضلاع، فإذا كان طول ضلع قاعدته يتزايد بمعدل ٠,٢سم/ث، وارتفاعه يتزايد بمعدل ٠,٣سم/ث في اللحظة التي كان فيها طول ضلع قاعدته ٤سم، وارتفاعه ١٢سم، أوجد معدل الزيادة في حجم المنشور عندئذ.

٥١- صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوي الساقين، تتمدد عند تسخينها محتفظة بشكلها. فإذا كان معدل تزايد كل من ساقيها يساوي معدل تزايد ارتفاعها يساوي ٠,١٥سم/ث عندما كان طول كل من ساقيها ١٠سم، وارتفاعها ٨سم. أوجد عند تلك اللحظة كل من:

أولاً: معدل تزايد طول قاعدتها. ثانياً: معدل تزايد مساحة سطحها.

٥٢- متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل يتزايد طول ضلعها بمعدل ٠,١٥سم/ث، بينما يتناقص ارتفاعها بمعدل ٠,٣سم/ث:

أولاً: أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٥سم، وارتفاع متوازي المستطيلات ٤سم.

ثانياً: أثبت أنه في اللحظة التي ينعدم عندها التغير في الحجم يُصبح متوازي المستطيلات مكعباً، ثم احسب معدل تغير طول قطره في تلك اللحظة إذا كان طول ضلع قاعدته ٦سم حينئذٍ.

٥٣- مكعب من النحاس بداخله تجويف على شكل كرة تمس أوجهه من الداخل، فإذا كان طول حرف المكعب يتزايد بانتظام بمعدل ٠,٢سم/ث بحيث يظل المُجسم محتفظاً بشكله. أوجد معدل التغير في حجم النحاس في اللحظة التي يكون فيها طول حرف المكعب ١٠سم.

٥٤- كرة من الحديد بداخلها تجويف على شكل مكعب تقع رءوسه على السطح الخارجي للكرة، تنكمش بانتظام بحيث يظل المُجسم محتفظا بشكله. فإذا كان معدل تناقص مساحة سطحها الخارجي

٤ط سم^{٢}/س عندما كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,١سم/س، أوجد عند تلك اللحظة:

أولاً: معدل التغير في حجم الحديد. ثانياً: معدل التغير في مساحة السطح الداخلي للحديد.

٥٥- رافعة هيدروليكية على شكل مثلث متساوي الساقين طول كل منهما ثابت ويساوي ٣٠سم، وطول ضلع قاعدته ٥٥سم يتناقص بمعدل ٥سم/ دقيقة، أوجد معدل تغير قياس زاوية رأسه في كل حالة مما يأتي:

أولاً: اللحظة التي يُصبح فيها المثلث متساوي الأضلاع.

ثانياً: اللحظة التي يُصبح فيها المثلث قائم الزاوية.

ثم احسب معدل تغير مساحة سطح المثلث في كل حالة.

٥٦- بقعة ضوئية أخذت في الاتساع مبتدئة بالصفر وبمعدل ٥سم^{٢}/ث، أوجد المعدل الزمني الذي يزداد به نصف القطر عند ما يكون طول قطرها سم.

٥٧- ادرس اطراد الدالة: $د(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س + ١$، ثم عين القيم العظمى والصغرى المحلية لها.

٥٨- عين القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت وفترات التزايد والتناقص للمنحنى: $د(س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٩ س$.

٥٩- ارسم شكلا عاما لمنحى الدالة : $ص = س^{٣} - ١٨ س^{٢} + ٣٢$، مبينا القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

٦٠- ارسم شكلاً عاما للمنحنى: $ص = س^{٣} - ٦ س^{٢}$، مبينا القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب وفترات التزايد والتناقص وفترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل.

٦١- أوجد قاعدة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة إذا علم أن النقطة (٠ ، ٢) موقع قيمة عظمى محلية لها والنقطة (١ ، ١) موقع قيمة صغرى محلية لها.

٦٢- أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى: $ص = \sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$ وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

٦٣- أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى: $ص = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

٤ط سم^{٢}/س عندما كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ١,٠سم/س، أوجد عند تلك اللحظة:

أولاً: معدل التغير في حجم الحديد. ثانياً: معدل التغير في مساحة السطح الداخلي للحديد.

٥٥- رافعة هيدروليكية على شكل مثلث متساوي الساقين طول كل منهما ثابت ويساوي ٣٠سم، وطول ضلع قاعدته ٥٥سم يتناقص بمعدل ٥سم/ دقيقة، أوجد معدل تغير قياس زاوية رأسه في كل حالة مما يأتي:

أولاً: اللحظة التي يُصبح فيها المثلث متساوي الأضلاع.

ثانياً: اللحظة التي يُصبح فيها المثلث قائم الزاوية.

ثم احسب معدل تغير مساحة سطح المثلث في كل حالة.

٥٦- بقعة ضوئية أَخذت في الاتساع مبتدئة بالصفر وبمعدل ٥سم^{٢}/ث، أوجد المعدل الزمني الذي يزداد به نصف القطر عند ما يكون طول قطرها سم.

٥٧- ادرس اطراد الدالة: $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 9\text{س} + 1$ ، ثم عين القيم العظمى والصغرى المحلية لها.

٥٨- عين القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت وفترات التزايد والتناقص للمنحنى: $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 9\text{س}$.

٥٩- ارسم شكلا عاما لمنحى الدالة : $\text{ص} = \text{س}^3 - 18\text{س}^2 + 32$، مبينا القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

٦٠- ارسم شكلاً عاما للمنحنى: $\text{ص} = \text{س}^3 - 6\text{س}^2$، مبينا القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب وفترات التزايد والتناقص وفترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل.

٦١- أوجد قاعدة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة إذا علم أن النقطة (٠ ، ٢) موقع قيمة عظمى محلية لها والنقطة (١ ، ١) موقع قيمة صغرى محلية لها.

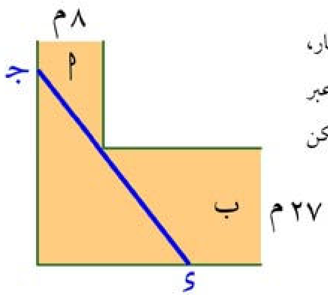
٦٢- أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى: $\text{ص} = \sqrt[3]{(\text{س} - 2)^2}$ وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

٦٣- أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}$ وكذلك نقط الانقلاب إن وجدت.

يصل إلى ميناء جـ على الشاطئ الآخر ويبعد عن ب ١٥كم، فإذا كان عليه أن يعبر في قارب من أ إلى نقطة ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بسرعة ٤كم/ ساعة، ثم يسير على الشاطئ بسرعة ٥كم/ ساعة، عين موضع النقطة ء ليصل إلى الميناء جـ في أقل وقت ممكن.

٧٦- إذا كانت تكاليف استهلاك الوقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها، وكانت هذه التكلفة ٥٠جنيهاً في الساعة عندما كانت سرعتها ٥٠كم/ ساعة، فإذا كانت هناك تكلفة إضافية قدرها ٢٠٠جنيهاً في الساعة بصرف النظر عن سرعتها، أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكيلو متر الواحد أقل ما يمكن.

٧٧- الشكل المقابل يمثل صالتين أ،ب اتساعهما ٨ أمتار، ٢٧ متراً على الترتيب، $\overline{\text{جـ ء}}$ قضيب معدني يمر عبر الصالتين أفقيًا، أوجد أكبر طول للقضيب $\overline{\text{جـ ء}}$ يمكن مروره بين الصالتين بدون عائق.



* أوجد كل من التكاملات التالية:

٧٨- $\int \text{قا}^2\text{س}(\text{جتا}^2\text{س} + 3) \cdot \text{ءس}$

٧٩- $\int (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}3\text{س}) \cdot \text{ءس}$

٨٠- $\int \text{س}^{10} \left(\frac{2}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}^2}\right)^5 \cdot \text{ءس}$

٨١- $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس} - 1} \cdot \text{ءس}$

٨٢- $\int \frac{\text{س} + 5}{(\text{س} + 2)^4} \cdot \text{ءس}$

٨٣- $\int \text{ظا}^2\frac{\text{س}}{2} \cdot \text{ءس}$

٨٤- $\int (\text{س} + 1)\sqrt{\text{س}^3 + 3\text{س} + 5} \cdot \text{ءس}$

٨٥- $\int \text{جا}^2\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س} \cdot \text{ءس}$

٨٦- $\int \text{س}\sqrt[3]{\frac{6}{\text{س}^2} + \frac{5}{\text{س}^3}} \cdot \text{ءس}$

٨٧- $\int \frac{3\text{ص} - 6}{(2\text{ص} - 5)^3} \cdot \text{ءص}$

٨٨- $\int \text{جتاس}\,\text{جاس} \cdot \text{ءس}$

٨٩- $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جتاس} + \text{جاس}} \cdot \text{ءس}$

٩٠- $\int \frac{\text{س} - 2}{(2\text{س} + 1)^3} \cdot \text{ءس}$

٩١- $\int \frac{1 - \text{س}}{(2\text{س} + 1)^3} \cdot \text{ءس}$

٩٢- $\int \frac{\text{س} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2\text{س} - 1}} \cdot \text{ءس}$

٩٣- $\int \frac{4\text{س}^2 - 1}{(2\text{س} + 1)^4} \cdot \text{ءس}$

٩٤- $\int \frac{(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س})^{\frac{٣}{٥}}}{\sqrt[٥]{\text{س} - ٢}} \cdot ى\text{س}$

٩٥- $\int (١ - \text{ظا}^{٢}\text{ص})\,\text{جتا}^{٢}\text{ص} \cdot ى\text{ص}$

٩٦- أوجد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له عند أي نقطة عليه هو $٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٤$، علماً بأن هذا المنحنى يمر بالنقطة (−١،٥).

٩٧- إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\frac{ى\text{ص}}{ى\text{س}} = \frac{٢ - ٣\text{س}^{٢}}{٤\text{ص} + ٥}$، فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة (−١،١).

٩٨- إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه هو $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\sqrt{٢\text{ص} + ٣}}$، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $(\frac{\text{ط}}{٤}، ٣)$.

٩٩- إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه هو $\frac{\sqrt[٣]{(٣\text{ص} - ١)^{٢}}}{\sqrt{٢\text{س} + ٥}}$، أوجد معادلة هذا المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطة (٢،٣).

١٠٠- أوجد معادلة المنحنى: ص = د(س) إذا كان $\frac{ى^{٢}\text{ص}}{ى\text{س}^{٢}} = ١٢\text{س}$، وكان للمنحنى قيمة صغرى محلية عند النقطة (١،٢).

١٠١- إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى هو ٦(٢س − ٣)، أوجد معادلة هذا المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطتين (٠،٤) ، (٥،١).

١٠٢- صفيحة من المعدن تتمدد بالحرارة ، فإذا كان معدل تغير المساحة (م) بالنسبة للزمن (ن) يعطى بالعلاقة : $\frac{ى\text{م}}{ى\text{ن}} = ٠{,}٠١٥\text{ن}^{٢} + ٠{,}٠٢\text{ن}$ حيث (م) مُقاسة بالمتر المربع، (ن) مُقاسة بالدقيقة. فأوجد مساحة الصفيحة عند بدء التسخين إذا علمت أن م = ٩٠ متر مربع بعد ١٠ دقائق من بدء التسخين.

تم بحمد الله