الرياضيات البحتة

أولاً : الجبر والهندسة الفراغية

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أكمل كلاً مما يأتى :

(١) إذا كان $\nu_{ل_ر} = \nu_{ق_ر}$ فإن قيم ر هى .....

(٢) جميع الأعمدة المرسومة على مستقيم من نقطة عليه تقع فى .....

(٣) $\nu_{و_٠} + \nu_{و_١} + \nu_{و_٢} + ... + \nu_{و_ن} =$ .....

(٤) مكعب مساحته السطحية ٤٨ سم^{٢} فإن طول قطره .....

(٥) $ω^{٩٨} + \frac{١}{ω^{٩٨}} =$ .....

(٦) إذا وازى مستقيم كلاً من مستقيمين متقاطعين فإنه .....

السؤال الثانى :

(ا) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س^{٤}})^{١٢}$ وأوجد النسبة بينه وبين الحد الأوسط عندما س = ١

(ب) جـ ا ب ، ء ا ب مثلثان فى مستويين مختلفين فإذا كانت س ، ص ، م ، ع منتصفات $\overline{جـ ا}$ ، $\overline{جـ ب}$ ، $\overline{ء ا}$ ، $\overline{ء ب}$ على الترتيب فاثبت أن س ص // المستوى ء ا ب ، الشكل س ص ع م متوازى أضلاع .

السؤال الثالث :

(ا) أوجد باستخدام المحددات مجموعة حل المعادلات الآتية

س – ٢ ص + ٢ ع = ٢ ، ٣ س + ٤ ع = ١٠

، ٦ ع – ص = ٥

(ب) سـ ، صـ مستويان ، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{ا ب}$ ، رسم المربع ا ب جـ ء فى المستوى سـ ، ن منتصف $\overline{ا ب}$ ، م منتصف $\overline{جـ ء}$. رسم $\overline{م ل}$ // المستوى صـ يقطعه فى ل

١ – اثبت أن : $\overleftrightarrow{ا ب}$ المستوى ن م ل .

٢ – إذا كان ق(ل – $\overleftrightarrow{ا ب}$ – م) = ٦٠° فاثبت أن : المستوى ا م ل ⊥ المستوى ب م ل .

السؤال الرابع :

(ا) إذا كان $ع_{١} = -٢ (جا \frac{ط}{٣} - ت جتا \frac{ط}{٣})$ ،

$ع_{م} = \sqrt{٣} (جتا \frac{٥ ط}{٤} - ت جا \frac{٥ ط}{٤})$ ،

$ع_{٣} = ١ + \sqrt{٣}$ ت . فاوجد العدد ع فى الصورة الأسية حيث $ع = \frac{ع_{١}^{٥} \times ع_{٣}^{٣}}{ع_{م}^{٤}}$

(ب) $\overline{ا ا}$ ، $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا جـ}$ متعامدة مثنى مثنى ، ا ا = ٨ سم ، ا ب = ٧,٥ سم ، ا جـ = ١٠ سم ، ن مسقط ا على المستوى ا ب جـ . أثبت أن :

① $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى ا ا ن .

② ن ملتقى ارتفاعات المثلث ا ب جـ .

③ إذا كان $\overline{ا ء}$ ارتفاع Δ ا ب جـ فاحسب طول كل من $\overline{ا ء}$ ، $\overline{ا ن}$.

السؤال الخامس :

(ا) أثبت أن $(٥ - \frac{٥}{١ + ω^{٢}} - \frac{٧}{ω^{٢}})^{٣} = ٦$

(ب) أوجد قيمة ك التى تجعل (س – ٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} س - ١ & س + ٣ & ٢ \\ -٣ & س + ٥ & -٦ \\ س - ٣ & ٢ & س + ك \end{vmatrix}$$

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاختيارات :

(١) إذا كان $س + ت ص = \frac{١ - ٢ ت}{٢ + ت}$ فإن س + ص = ...

(ا) ١ (ب) –١ (جـ) ٢ (ء) ٣

(٢) إذا كان ١ ، ω ، $ω^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن :

(١ + ω + ω ت) (١ + ω – ω ت) = ...

(ا) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (ء) –١

(٣) إذا كان $\nu_{ق_{ن - ٢}} = ٣٦$ فإن ن = ...

(ا) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٦ (ء) ٧

(٤) هرم ثلاثى منتظم طول حرفه ٣ سم . فإن طول ارتفاعه يساوى ..... سم

(ا) $٢\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٦ (ء) $٦\sqrt{٣}$

(٥) مكعب مجموع أطوال أقطاره يساوى ١٢ سم فإن مساحة وجهه تساوى ..... سم^{٢}

(أ) ٣ (ب) $3\sqrt{3}$ (جـ) ٤٨ (د) ٩

(٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه .....

(أ) عمودى على خط تقاطعهما

(ب) يوازى خط تقاطعهما

(جـ) عمودى على كل منهما

(د) ينصف الزاوية بينهما

السؤال الثانى :

(أ) بدون فك المحدد اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س + ٢أ)(س - أ)^{٢}$$

(ب) أ ب جـ هرم ثلاثى . سـ مستوى يقطع أحرفه $\overline{أأ}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ فى د ، هـ ، و على الترتيب بحيث أن :

$\frac{أد}{دأ} = \frac{أهـ}{هـب} = \frac{أو}{وجـ} = \frac{١}{٣}$. برهن أن المستوى د هـ و يوازى المستوى أ ب جـ . وإذا كان ن ∈ $\overline{بجـ}$. ورسم $\overline{أن}$ فقطع $\overline{هـو}$ فى س . برهن أن :

(١) $\overline{دس}$ // $\overline{أن}$ (٢) أ ن = ٤ د س

السؤال الثالث :

(أ) باستخدام طريقة كرامر حل مجموعة المعادلات الآتية :

س + ص + ع = ٣ ، س - ص + ع = ١ ،

س + ص - ٢ ع = ٠

(ب) Δ أ ب جـ فيه ق(∠ب أ جـ) = ٣٠° ، $\overline{دب} \perp$ المستوى أ ب جـ . $\overline{دجـ} \perp \overline{أجـ}$ ، د ب = ١٥ سم ، أ ب = ١٦ سم

أوجد طول $\overline{دجـ}$. ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية (ب - $\overleftrightarrow{أجـ}$ - د) .

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان ع عدد مركب حيث (٢ - ت) ع = ٤ - $\overline{ع}$

اوجد ع فى الصورة المثلثية ثم اوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة الأسية .

(ب) سـ ، صـ مستويان متقاطعان فى $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، م نقطة لا تنتمى لأى من المستويين . رسم $\overline{مل} \perp$ المستوى سـ يقابله فى ل ، $\overline{من} \perp$ المستوى صـ يقابله فى ن .

أثبت أن $\overleftrightarrow{بجـ} \perp$ المستوى م ل ن .

السؤال الخامس :

(أ) فى مفكوك $(١ - س)^{٨}(١ + س)^{٨}$

(١) أوجد معامل $س^{٦}$

(٢) إذا كان $\frac{ح_{١}}{ح_{٣}} = -١٢٨$ فماقيمة س ؟

(ب) إذا كانت سـ مجموعة غير خالية وكان :

صـ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ ≠ ب } وكان عدد عناصر صـ يساوى ٧٢ ، ع = { { أ ، ب } : أ ، ب ∈ سـ }

اوجد عدد عناصر ع .

ثانياً : التفاضل والتكامل

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أكمل كلاً مما يأتى :

(١) إذا كان د (س) = ٢ س جا س جتا س . فإن د/ (س) = ...

(٢) إذا كان د (س) = $س^{٢} + \frac{ب}{س}$ نقطة حرجة عند س = ٢ فإن ب = ...

(٣) إذا كان للدالة د/ (س) = ١ - $جا^{٢}$ س ، د (٠) = $\frac{١}{٢}$ فإن د ($\frac{\pi}{٢}$) = ...

(٤) إذا كانت د (س) = { ظا س + ٣ قا س عندما س < ٠ ، $\frac{م\ جا\ س}{س}$ عندما س > ٠

لها نهاية عندما س تؤول إلى الصفر فإن م = ...

(٥) إذا كانت د (س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} + م\ س - ٩}$ متصلة على ح فإن م = ...

(٦) ميل المماس لمنحنى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ عند س = $\frac{٣}{٥}$ يساوى .....

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت د (س) = { $س^{٢} + ٢$ س عندما س < ٠ ، م س + ب عندما س > ٠

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فاوجد قيمة أ ، ب .

(ب) أوجد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{س - ١}{(س + ١)^{٣}}$. د س

(٢) $\int \frac{1}{2}$ جتا ٢ هـ . هـ حيث هـ $\in]0 ، \pi[$

السؤال الثالث :

(أ) إذا كان ص^{2} + جا ص + س^{2} = ٤ فاوجد $\frac{هـ^{2} ص}{هـ س^{2}}$

(ب) وعاء أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم . وارتفاعه ٦٠ سم فإذا كان الوعاء فارغاً وصُب فيه الماء بمعدل ٣٠ π سم^{3} / ث . أوجد معدل ارتفاع الماء فى الوعاء ثم بيّن متى يمتلئ الوعاء بالماء ؟

السؤال الرابع :

(أ) أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى : ص = $\frac{1}{س}$ (حيث س > ٠) عند أى نقطة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوى ٢ وحدة مربعة

(ب) إذا كان منحنى الدالة ص = س^{3} + أ س^{2} + ب س له نقطة انقلاب عند (٣ ، − ٩) فأوجد قيمة كل من أ ، ب ثم حدد فترات التزايد وفترات التناقص ونقط القيم العظمى والصغرى المحلية .

السؤال الخامس :

(أ) متوازى مستطيلات حجمه ١٨٠٠ سم^{3} ، النسبة بين بعدى قاعدته ٢ : ٣ أوجد ابعاده التى تجعل مساحته الكلية أصغر مايمكن .

(ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{٢ س - ١}{٣ - ٢ س}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ١) .

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

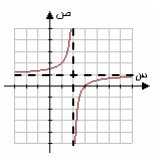
السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاختيارات :

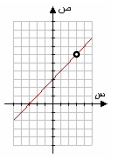
(١) أى الدوال الآتية تحقق العلاقة $\frac{هـ^{3} ص}{هـ س^{3}}$ = ص

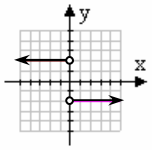
(أ) ص = (س + ١)^{٤} (ب) ص = جا س

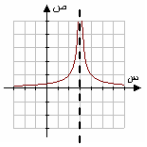
(ج) ص = ظا س (د) أ حيث أ ثابت > ٠

(٢) أى من الدوال الآتية لها نهاية عند س = ٣

(أ) 

(ب) 

(ج) 

(د) 

(٣) إذا كان د (س) = ٢ س + ر (س) وكان ر$'$ (١) = − ٣ فإن ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) عند س = ١ يساوى .....

(أ) − ٣ (ب) − ١ (ج) ٢ (د) ك

(٤) المنحنى ص = ٤ − س^{2} له قيمة عظمى محلية عند س = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ١

(٥) منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{3} + ٩ س^{2} + ٢٤ س − ٤ محدب لأعلى فى الفترة .....

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]− ∞ ، − ٣[

(ج)]٣ ، ∞[(د)]− ٣ ، ∞[

(٦) $\int$ جا س جتا س . هـ س = ... + ث

(أ) جا ٢ س (ب) جتا ٢ س

(ج) − $\frac{1}{2}$ جا ٢ س (د) − $\frac{1}{4}$ جتا ٢ س

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} س^{2} + س + ١ & , س < ١ \\ ٣ س - ١ & , س > ١ \end{cases}$

أبحث اتصال د (س) عند س = ١

(ب) عيّن القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة د فى الفترة [٢ ، ٥] حيث :

د (س) = $\begin{cases} (س - ٢)^{2} & , س < ٣ \\ ٤ - س & , س > ٣ \end{cases}$

السؤال الثالث :

(أ) إذا كانت ص^{2} + ٣ س^{2} − ٢ س = ٠ فاثبت أن :

ص $\frac{هـ^{2} ص}{هـ س^{2}}$ + ($\frac{هـ ص}{هـ س}$)^{2} − ٣ = صفر

(ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى س^{2} + ص^{2} = ٥

السؤال الرابع :

(أ) أوجد قيمة كل من :

(١) $\int$ (س^{2} − ٢ س + ١) (س − ١)^{5} . هـ س

(٢) $\int$ س $\sqrt{\frac{1}{س^{2}} - \frac{1}{س}}$. هـ س

(ب) يستند قضيب أ ب طوله ١٠ متر بطرفه أ على أرض أفقية وبإحدى نقطه جـ على حائط رأسى ارتفاعه ٦ متر فإذا إنزلق الطرف أ مبتعداً عن الحائط بسرعة ٢,٥ م/د اوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل إلى حافة الحائط .

السؤال الخامس :

(أ) أوجد أصغر مساحه للمثلث المحدود بمحورى الاحداثيات الموجبين والمستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) .

(ب) إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) هو $\sqrt{٣ - ٢س}$. أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٣) .

حلول اختبارات الرياضة البحتة

أولاً : الجبر والهندسة الفراغية

حل الاختبار الأول

إجابة السؤال الأول :

(١) ١ (٢) مستوى واحد (٣) $٢^{ن}$

(٤) $٢\sqrt{٦}$ (٥) -١ (٦) يوازى خط تقاطعهما

إجابة السؤال الثانى :

(أ) $ح_{ر+١} = ١٢ ق_{ر} (-\frac{١}{٣س})^{ر} \times (س^{٢})^{١٢-ر}$

$= ١٢ ق_{ر} (-\frac{١}{٣})^{ر} \times س^{٢٤-٣ر}$

بوضع $٢٤ - ٣ر = ٠ \Leftarrow ر = ٨$

$\Leftarrow$ الحد الخالى من س $= ح_{٩} = ١٢ ق_{٨} (-\frac{١}{٣})^{٨} = \frac{٥٥}{٧٢٩}$

الحد الأوسط $= ح_{٧} = ١٢ ق_{٦} (-\frac{١}{٣})^{٦} \times س^{٦} = \frac{٣٠٨}{٢٤٣} س^{٦}$

$\therefore$ النسبة $= \frac{٥}{٨٤}$

(ب) فى $\triangle$ أ ب جـ :

$\because$ س ، ص منتصفى $\overline{جـ ب}$ ، $\overline{جـ أ}$

$\therefore \overline{س ص} // \overline{أ ب}$

ولكن

$\overline{س ص} \subset$ المستوى أ ب جـ

الذى تقاطع مع المستوى أ ب ء فى $\overleftrightarrow{أ ب}$

$\therefore \overline{س ص} //$ المستوى ء أ ب

، س ص $= \frac{١}{٣}$ أ ب

وبالمثل $\overline{م ع} // \overline{أ ب}$ ، م ع $= \frac{١}{٣}$ أ ب

$\Leftarrow \overline{س ص} // \overline{أ ب}$ ، س ص $= \frac{١}{٣}$ أ ب

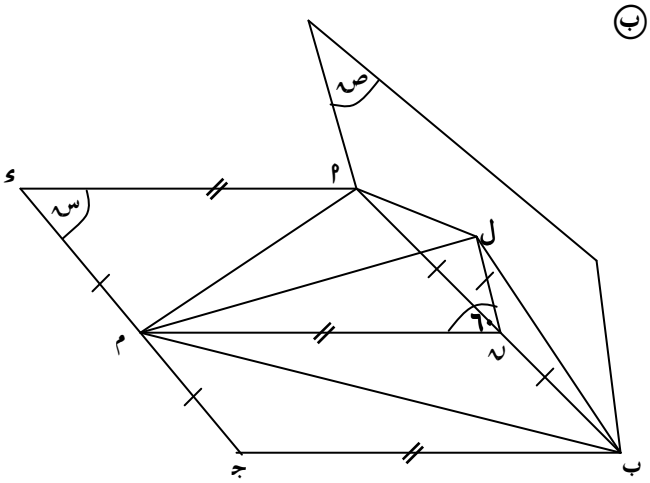
$\therefore$ الشكل س ص ع م متوازى أضلاع

إجابة السؤال الثالث :

(أ) $\Delta = ٣٤$ ، $\Delta س = ٦٨$ ، $\Delta ص = ٣٤$ ، $\Delta ع = ٣٤$

$\therefore$ س $= ٢$ ، ص $= ع = ١$

(ب)



$\because \overline{ل م} \perp$ المستوى صـ $\therefore \overline{ل م} \perp \overline{أ ب}$

، $\because$ م ، ن منتصفى $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ $\therefore \overline{م ن} // \overline{ب جـ}$

$\because$ الشكل أ ب جـ ء مربع $\therefore \overline{م ن} \perp \overline{أ ب}$

$\therefore \overline{أ ب} \perp$ كل من $\overline{ل م}$ ، $\overline{م ن} \Leftarrow \overline{أ ب} \perp$ المستوى ن م ل .

(هـ . ط . أولاً)

Δ ل ن م القائم فى ل (لأن $\overline{م ل} \perp \overline{ل ن}$)

$\because$ ق$(\angle ل ن م) = ٦٠°$ $\therefore$ ل ن $= \frac{١}{٢}$ م ن $= ن ب = ن أ$

فى Δ ل ب أ : $\because \overline{ل ن}$ متوسط $= \frac{١}{٢}$ الوتر $\overline{أ ب}$

$\therefore$ ق$(\angle أ ل ب) = ٩٠°$ $\therefore \overline{ب ل} \perp \overline{ل أ}$

ولكن $\overline{ب ل} \perp \overline{ل م}$ (لأن $\overline{ل م} \perp$ المستوى صـ)

$\therefore \overline{ب ل} \perp$ كل من $\overline{ل أ}$ ، $\overline{ل م}$

$\therefore \overline{ب ل} \perp$ المستوى أ ل م

، $\because \overline{ب ل} \subset$ المستوى ب م ل

$\therefore$ المستوى ب م ل $\perp$ المستوى أ م ل .

إجابة السؤال الرابع :

(أ) $ع_1 = ٢ (- جا ٦٠ + ت جتا ٦٠)$

نلاحظ أن س < ٠ ، ص $> ٠ \Leftarrow$ $ل_1^\circ$ ∈ الربع الثانى رأسياً

$\therefore ل_1 = ٢$ ، $ل_1^\circ = ٩٠ + ٦٠ = ١٥٠^\circ$

$\therefore ع_1 = ٢ (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠)$

$\therefore ع_1^٥ = ٢^٥ [جتا (٥ × ١٥٠) + ت جا (٥ × ١٥٠)]$

$= ٣٢ (جتا ٧٥٠ + ت جا ٧٥٠)$

، $ع_٢ = \sqrt{٢} (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥)$

$\Leftarrow ع_٢^٣ = \sqrt{٨} (جتا ٤٠٥ + ت جا ٤٠٥)$

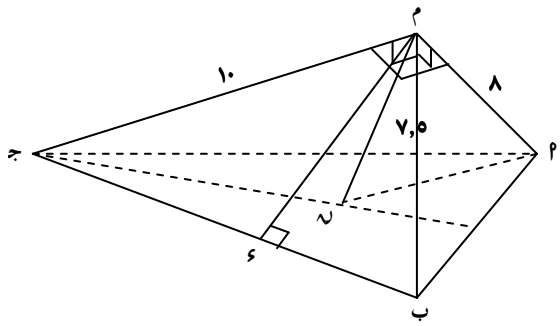
، $ع_٣ = ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)$

$\Leftarrow ع_٣^٤ = ١٦ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)$

$\therefore \frac{ع_1^٥ \, ع_٣^٣}{ع_٢^٤} = ٢\sqrt{٨} (جتا ٩١٥ + ت جا ٩١٥)$

$= ٤\sqrt{٢} (جتا ١٩٥ + ت جا ١٩٥)$

(ب)



$\overline{م أ} \perp \overline{م ب}$ ، $\overline{م أ} \perp \overline{م جـ}$ ، $\overline{م ب} \perp \overline{م جـ}$

، $\overline{م ن} \perp$ المستوى أ ب جـ $\Leftarrow \overline{م ن} \perp \overline{ب جـ}$

، $\overline{م أ} \perp$ المستوى م ب جـ $\Leftarrow \overline{م أ} \perp \overline{ب جـ}$

$\therefore \overline{ب جـ} \perp$ كل من $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ن} \Leftarrow \overline{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ن

$\Leftarrow \overline{ب جـ} \perp \overline{أ ن}$ ..... (١) $\therefore$ $\overleftarrow{أ ن}$ ارتفاع

$\because \overline{جـ م} \perp$ المستوى أ م ب $\Leftarrow \overline{جـ م} \perp \overline{أ ب}$

، $\overline{أ ب} \perp \overline{م ن}$ (لأن $\overline{م ن} \perp$ المستوى أ ب جـ)

$\therefore \overline{أ ب} \perp$ المستوى م ن جـ

$\Leftarrow \overline{أ ب} \perp \overline{جـ ن}$ ..... (٢) $\therefore$ $\overleftarrow{جـ ن}$ ارتفاع

$\therefore$ نقطة ن هى نقطة تلاقى ارتفاعات المثلث أ ب جـ

، Δ ب م جـ قائم فى م :

$(ب جـ)^٢ = (ب م)^٢ + (جـ م)^٢ = (٧,٥)^٢ + (١٠)^٢$

$\Leftarrow ب جـ = ١٢,٥$ سم

فى Δ ب م جـ القائم فى م ، $\overline{م ء} \perp$ القاعدة $\overline{ب جـ}$

$\therefore م ء = \frac{١٠ \times ٧,٥}{١٢,٥} = ٦$ سم

فى Δ أ م ء القائم فى م :

$\overline{م ء}$ مسقط $\overleftarrow{أ ء}$ على المستوى م ب جـ

، $\because$ المسقط $\overline{م ء} \perp \overline{ب جـ}$ $\therefore$ المائل $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

$\Leftarrow \overleftarrow{أ ن} = \overleftarrow{أ ء}$

ولكن $(أ ء)^٢ = (م أ)^٢ + (م ب)^٢ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

$\Leftarrow أ ء = ١٠$ سم

$\because \overline{م ن} \perp$ القاعدة $\overline{أ ء}$

$\therefore م ن = \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$ سم

إجابة السؤال الخامس :

(أ) الأيمن $= (٥ - \frac{٥}{-\omega} - ٧\omega)^٣$

$= (٥ + ٥\omega^٢ - ٧\omega)^٣ = (-٥\omega - ٧\omega)^٣$

$= (-١٢\omega)^٣ = -١٧٢٨\omega^٣ = -١٧٢٨$

(ب) بوضع س $= ٢$ تجعل المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ -٣ & ٧ & -٦ \\ -١ & ٢ & ٢+ك \end{vmatrix} = ٠$$

$ص_٢ + ٣ ص_١$ ، $ص_٣ + ص_١$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٢٢ & ٠ \\ ٠ & ٧ & ٤+ك \end{vmatrix} = ٠$$

$\therefore ٢٢ (٤ + ك) = ٠$ ومنها ك $= -٤$

حل الاختبار الثانى

إجابة السؤال الأول :

(١) −١ (٢) −١ (٣) ٩

(٤) $\overline{٦ك}$ (٥) ٣ (٦) يوازى خط تقاطعهما

إجابة السؤال الثانى :

(أ) $ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣} \Leftarrow \begin{vmatrix} س+٢ & ٢ & ٢ \\ س+٢ & س & ٢ \\ س+٢ & ٢ & س \end{vmatrix}$

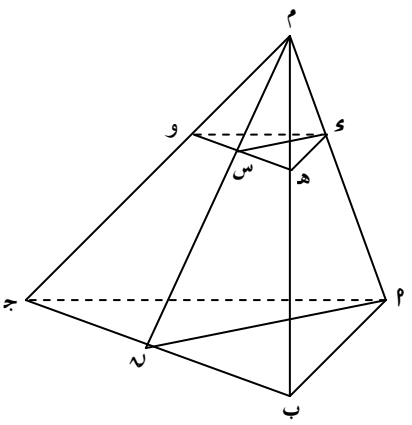
$= (س+٢) \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix}$

$ص_{٢} - ص_{١}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$

$= (س+٢) \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٠ & س-٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س-٢ \end{vmatrix}$

$= (س+٢)(س-٢)^{٢}$

(ب)



∵ $\frac{م ء}{ء ف} = \frac{م هـ}{هـ ب} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\overline{ء هـ} // \overline{ف ب}$ ..... (١)

، ∵ $\frac{م هـ}{هـ ب} = \frac{م و}{و جـ} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\overline{هـ و} // \overline{ب جـ}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ المستوى ء هـ و // المستوى ف ب جـ

∵ المستوى م ف ل يقطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، ف ب جـ

فى $\overline{ء س}$ ، $\overline{ف ل}$ على الترتيب

∴ $\overline{ء س} // \overline{ف ل}$

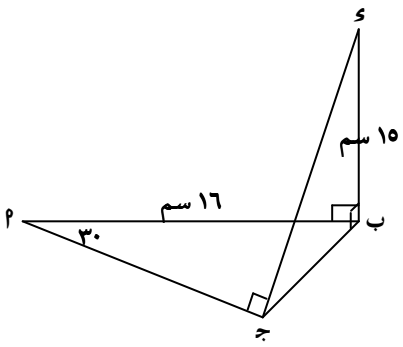
∴ $\frac{ء س}{ف ل} = \frac{م ء}{م ف} = \frac{١}{٤}$ ∴ ف ل = ٤ ء س

إجابة السؤال الثالث :

(أ) $\Delta ع = ٦$ ، $\Delta س = \Delta ص = ٦$

$\Leftarrow$ س = ص = ع = ١

(ب)



∵ $\overline{ء ب}$ ⊥ المستوى ف ب جـ ، $\overline{ء جـ}$ مائل

∴ $\overline{ب جـ}$ مسقط $\overline{ء جـ}$ على المستوى

∵ $\overline{ء جـ} \perp \overline{ج ف}$ ∴ $\overline{ب جـ} \perp \overline{ج ف}$ ∴ ق(∠ب جـ ف) = ٩٠°

∵ $\overline{ب جـ}$ يقابل الزاوية ٣٠° ∴ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ف ب = ٨ سم

فى Δ ء ب جـ القائم فى ب : ء جـ = ١٧ سم

∵ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء جـ}$ عموديان على $\overline{ف جـ}$

∴ ∠ء جـ ب هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ب − ف جـ − ء

، ظا (∠ء جـ ب) = $\frac{١٥}{٨}$ $\Leftarrow$ ق(∠ء جـ ب) = ٦١° ٥٦′

إجابة السؤال الرابع :

(أ) نفرض ع = س + ت ص $\Leftarrow$ $\overline{ع}$ = س − ت ص

∴ (٢ − ت)(س + ت ص) = ٤ − س + ت ص

∴ ٢ س + ٢ ص ت − س ت + ص = ٤ − س + ت ص

∴ ٢ س + ص = ٤ − س ، ٢ ص − س = ص

∴ ٣ س + ص = ٤ ..... (١) ، ص = س ..... (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ ٤ س = ٤ $\Leftarrow$ س = ١ ، ص = ١ ∴ ع = ١ + ت

| ع | = $\overline{٢ك}$ ، ظا ∅ = $\frac{ص}{س}$ = ١ فى الربع الأول $\Leftarrow$ ∅ = ٤٥°

∴ ع = $\overline{٢ك}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

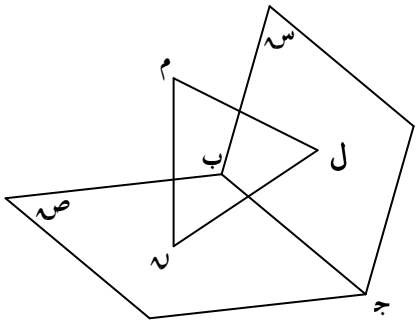
∴ $ع_{ن} = \overline{٢ك}^{٤}$ (جتا $\frac{٤٥ + ٢ ك ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٤٥ + ٢ ك ط}{٢}$)

حيث ك = ١،٠

عندما ك = ٠ $\Leftarrow$ $ع_{١} = \overline{٢ك}^{٤}$ (جتا ٢٢,٥ + ت جا ٢٢,٥)

عندما ك = ١ $\Leftarrow$ $ع_{١} = \overline{٢ك}^{٤}$ (جتا ٢٠٢,٥ + ت جا ٢٠٢,٥)

ⓑ



∵ $\overline{م ل} \perp$ س

∴ $\overline{م ل} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ ..... (١)

∵ $\overline{م ن} \perp$ ص ∴ $\overline{م ن} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ ..... (٢)

من (١)، (٢) ⇐ $\overleftrightarrow{ب ج}$ ⊥ كل من $\overline{م ل}$ ، $\overline{م ن}$

∴ $\overleftrightarrow{ب ج}$ ⊥ المستوى م ل ن

إجابة السؤال الخامس :

ⓐ $(١ - س)^{٨} (١ + س)^{٨} = (١ - س^{٢})^{٨}$

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} (-س)^{٨-ر}$

$= {}^{٨}ق_{ر} (-١)^{٨-ر} \times س^{١٦-٢ر}$

بوضع $١٦ - ٢ر = ٦ \Leftarrow ر = ٥$

∴ المعامل $= {}^{٨}ق_{٥} (-١)^{٥} = -٥٦$

، ∵ $ح_{٦} / ح_{٣} = -١٢٨$

∴ ${}^{٨}ق_{٥} (-س^{٢})^{٣} / {}^{٨}ق_{٣} (-س^{٢})^{٦} = -١٢٨$

∴ $٢ / -س^{٦} = -١٢٨$

∴ $س^{٦} = ٦٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

ⓑ نفرض عدد عناصر المجموعة س $= ن$

، ∵ عناصر صص تمثل جميع الازواج المرتبة من المجموعة س

∴ عدد عناصر ص $= ن^{٢} ل_{٢}$

∴ $ن^{٢} ل_{٢} = ٧٢$ ومنها $ن = ٩$

، ∵ عناصر المجموعة ع تمثل جميع المجموعات الجزئية الثنائية من المجموعة س

∴ عدد عناصر ع $= {}^{٩}ق_{٢} = ٣٦$

ثانياً : التفاضل والتكامل

حل الاختبار الأول

إجابة السؤال الأول :

ⓐ

(١) ٤ (جتا ٢ س − ص) (٢) ١٦ (٣) $\frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٢}$

(٤) ٣ (٥) صفر (٦) $-\frac{٣}{٤}$

إجابة السؤال الثانى :

ⓐ د (س) متصلة عند س = ٢

∴ د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$) ⇐ $٢^{٢} + ٢ (٢) = ٢ ا + ب$ ..... (١)

، د$'$ (٢$^{-}$) = د$'$ (٢$^{+}$) ⇐ $٢ (٢) + ٢ = ا$ ∴ ا = ٦

بالتعويض فى (١) ⇐ ب = − ٤

ⓑ (١) $\int \frac{س - ١}{(س + ١)^{٣}} . ء س = \int \frac{س + ١ - ٢}{(س + ١)^{٣}} . ء س$

$= \int [(س + ١)^{-٢} - ٢ (س + ١)^{-٣}] . ء س$

$= \frac{(س + ١)^{-٢+١}}{-١} - ٢ \times \frac{(س + ١)^{-٣+١}}{-٢} + ث$

$= \frac{-١}{(س + ١)} + \frac{١}{(س + ١)^{٢}} + ث$

(٢) $\frac{١}{٤}$ جا ٢ ٠ + ث

إجابة السؤال الثالث :

ⓐ

ⓑ $ح = ط نو^{٢} \times ع \Leftarrow \frac{ء ح}{ء ن} = ط نو^{٢} \frac{ء ع}{ء ن}$

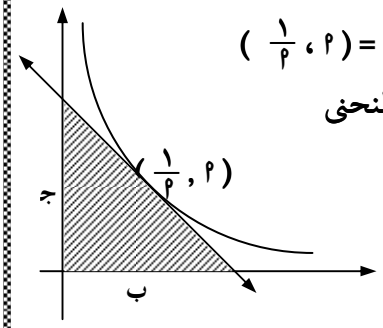
∴ ٣٠ ط $= ط \times ١٠٠ \times \frac{ء ع}{ء ن} \Leftarrow \frac{ء ع}{ء ن} = ٠,٣$

∵ $ع = ع_{٠} + \frac{ء ع}{ء ن} \times ن \Leftarrow ٦٠ = ٠,٣ ن \Leftarrow ن = ٢٠٠$ ث

إجابة السؤال الرابع :

ⓐ نفرض نقطة التماس = $(ا ، \frac{١}{ا})$

لأنها تحقق معادلة المنحنى



، $\frac{ء ص}{ء س} = -\frac{١}{س^{٢}}$

⇐ ميل المماس $= -\frac{١}{ا^{٢}}$

معادلة المماس هى :

ص $- \frac{١}{ا} = -\frac{١}{ا^{٢}} (س - ا)$

بفرض نقطة تقاطعه مع محور السينات = (ب ، ٠)

بوضع ص = ٠

∴ $-\frac{١}{٢}$ = $-\frac{١}{٢أ}$ (ب − ٢أ) ⇐ ب = ٢أ

، بفرض نقطة تقاطعه مع محور الصادات = (٠ ، جـ)

بوضع س = ٠

∴ جـ − $\frac{١}{٢}$ = $-\frac{١}{٢أ}$ (٠ − ٢أ) ⇐ جـ = $\frac{٢}{أ}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب × جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢أ × $\frac{٢}{أ}$

= ٢ وحدة مربعة

(ب) ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س ..... (١)

⇐ ص$'$ = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب ..... (٢)

⇐ ص$''$ = ٦ س + ٢ أ ..... (٣)

∵ (٣ ، − ٩) نقطة انقلاب ⇐ ص$''$ = ٠ عند س = ٣

بالتعويض فى (٣) ⇐ أ = − ٩

∵ (٣ ، − ٩) ∈ المنحنى فهى تحقق معادلته

بالتعويض فى (١) ⇐ ٢٧ + ٩ (− ٩) + ٣ ب = − ٩ ⇐ ب = ١٥

بإعادة كتابة المعادلات مرة أخرى :

ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٥ س ..... (١)

⇐ ص$'$ = ٣ س^{٢} − ١٨ س + ١٥ ..... (٢)

⇐ ص$''$ = ٦ س − ١٨ ..... (٣)

بوضع ص$'$ = صفر ⇐ س = ١ أ، س = ٥

س		١		٥	
ص$'$	+ + + + +		− − − − − −		+ + + + +
	متزايدة		متناقصة		متزايدة
ص		٧		− ٢٥	

من الرسم : (١ ، ٧) نقطة قيمة عظمى محلية

، (٥ ، − ٢٥) نقطة قيمة صغرى محلية

إجابة السؤال الخامس :

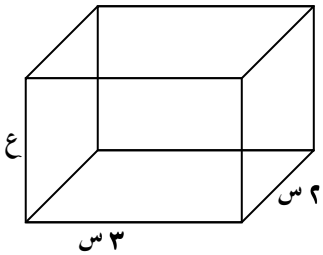
(أ) نفرض الأبعاد هى :

٢ س ، ٣ س ، ع

∵ ح = ٢ س × ٣ س × ع

∴ ١٨٠٠ = ٦ س^{٢} ع

ومنها ع = $\frac{٣٠٠}{س^{٢}}$



، م = ٢ (٢ س × ٣ س) + ٢ (٢ س × ع) + ٢ × (٣ س × ع)

م = ١٢ س^{٢} + ٤ س ع + ٦ س ع = ١٢ س^{٢} + ١٠ س ع

م = ١٢ س^{٢} + ١٠ س × $\frac{٣٠٠}{س^{٢}}$ = ١٢ س^{٢} + $\frac{٣٠٠٠}{س}$

م$'$ = ٢٤ س − $\frac{٣٠٠٠}{س}$

م$'$ = صفر عندما ٢٤ س = $\frac{٣٠٠٠}{س}$ ⇐ س = ٥

م$''$ = ٢٤ + $\frac{٦٠٠٠}{س^{٣}}$ > ٠

∴ المساحة تكون أصغر مايمكن عندما س = ٥

∴ ابعاد متوازى المستطيلات : ١٠ ، ١٥ ، ١٢ سم

(ب) ∵ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\sqrt{\frac{٢ ص − ١}{٣ − ٢ س}}$

∴ $\int \frac{١}{٢ ص − ١}$. ع ص = $\int \frac{١}{٣ − ٢ س}$. ع س

⇐ $\int$ (٢ ص − ١)$^{-\frac{١}{٢}}$. ع ص = $\int$ (٣ − ٢ س)$^{-\frac{١}{٢}}$. ع س

⇐ (٢ ص − ١)$^{\frac{١}{٢}}$ = − (٣ − ٢ س)$^{\frac{١}{٢}}$ + ث

∵ (١ ، ١) ∈ المنحنى فهى تحققه ⇐ ث = ٢

∴ معادلة المنحنى هى : $\sqrt{٢ ص − ١}$ = ٢ − $\sqrt{٣ − ٢ س}$

حل الاختبار الثانى

إجابة السؤال الأول :

(١) جاهـ (٢) جـ (٣) − ١

(٤) صفر (٥)]− ∞ ، ٣[(٦) − $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س

إجابة السؤال الثانى :

(أ) د (١) = (١)^{٢} + (١) + ١ = ٣

د (١$^{+}$) = نهـــــا (س^{٢} + س + ١) = ٣

د (١$^{-}$) = نهـــــا (٣ س − ١) = ٢

∵ د (١$^{+}$) ≠ د (١$^{-}$)

∴ الدالة غير متصلة عند س = ١

(ب) د$'$ (س) = $\begin{cases} ٢ (س − ٢) & , س > ٣ \\ -١ & , س < ٣ \end{cases}$

د$'$ (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ س = ٢ نقطة حرجة

وكذلك س = ٣ لعدم تساوى المشتقة حولها

د (٢) = (٢ − ٢)^{٢} = ٠

د (٣) = (٣ − ٢)^{٢} = ١

د (٥) = ٤ − ٥ = − ١

∴ عند س = ٥ توجد قيمة صغرى مطلقة تساوى − ١

، عند س = ٣ توجد قيمة عظمى مطلقة تساوى ١

إجابة السؤال الثالث :

(أ) ص^{٢} + ٣ س^{٢} − ٢ س = ٠

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ + ٦ س − ٢ = ٠ (وبالقسمة ÷ ٢)

∴ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ + ٣ س − ١ = ٠

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ص $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ + ($\frac{ع ص}{ع س}$)^{٢} + ٣ = ٠

(ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٥ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠ ⇐ $\frac{ع ص}{ع س}$ = − $\frac{س}{ص}$

بفرض نقطة التماس هى (أ ، ب)

∴ ميل المماس عند (أ ، ب) = − $\frac{أ}{ب}$

معادلة المماس المار بالنقطة (٥ ، ٠) هى $\frac{ص}{س - ٥}$ = − $\frac{أ}{ب}$

∵ المماس يمر بالنقطة (أ ، ب) فهى تحققه

∴ $\frac{ب}{أ - ٥}$ = − $\frac{أ}{ب}$ ∴ ب^{٢} + أ^{٢} = ٥ أ

ولكن أ^{٢} + ب^{٢} = ٥ وذلك معادلة المنحنى

∴ أ = ١ وبالتعويض ⇐ ب = ± ٢

∴ معادلة المماس هى : س + ٢ ص = ٥

أ، س − ٢ ص = ٥

إجابة السؤال الرابع :

(أ) (١) ∫ (س^{٢} − ٢ س + ١) (س − ١)^{٥} . ع س

= ∫ (س − ١)^{٢} (س − ١)^{٥} . ع س

= ∫ (س − ١)^{٧} . ع س = $\frac{١}{٨}$ (س − ١)^{٨} + ث

(٢) ∫ س $\sqrt{\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س}}$. ع س

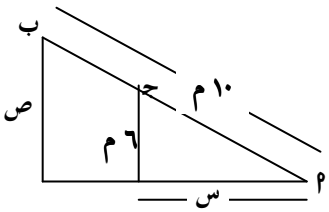
= ∫ $\sqrt{س^{٢} (\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س})}$. ع س

= ∫ $\sqrt{(٣ - ٢ س)}$. ع س

= ∫ (٣ − ٢ س)$^{\frac{١}{٢}}$. ع س

= − $\frac{١}{٣}$ (٣ − ٢ س)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(ب) من تشابة المثلثين :



$\frac{٦}{ص}$ = $\frac{\sqrt{س^{٢} + ٣٦}}{١٠}$

∴ ص = ٦٠ (س^{٢} + ٣٦)$^{-\frac{١}{٢}}$

⇐ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = − ٣٠ (س^{٢} + ٣٦)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$

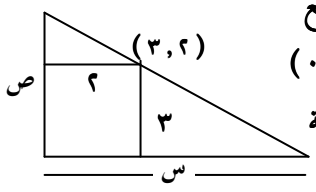
عندما يصل الطرف ب إلى حافة الحائط ئ س = ٨ م

∴ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = − ٣٠ × (١٠^{٢} + ٣٦)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢ × ١٦ × ٢,٥

= − ١,٢ م / د

إجابة السؤال الخامس :

(أ) نفرض أن المستقيم يقطع



محور السينات فى النقطة (س ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة

(٠ ، ص)

⇐ ميل المستقيم = $\frac{٠ - ٣}{س - ٠}$ = $\frac{ص - ٣}{٢ - ٠}$ = − $\frac{ص}{س}$

∴ س ص − ٣ س = ٢ ص

∴ س ص = ٢ ص + ٣ س

، مساحة المثلث : م = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ (٢ ص + ٣ س)

ومن التشابة : $\frac{٣}{ص}$ = $\frac{س - ٢}{س}$

∴ ص = $\frac{٣ س}{س - ٢}$

∴ م = $\frac{٣ س}{س - ٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ س = $\frac{٦ س + ٣ س^{٢} - ٦ س}{٢ (س - ٢)}$

∴ م = $\frac{٣ س^{٢}}{٢ (س - ٢)}$

⇐ $\frac{ع م}{ع س}$ = $\frac{٦ س (٢ س - ٤) - ٦ س^{٢}}{٤ (س - ٢)^{٢}}$ = $\frac{٦ س (س - ٤)}{٤ (س - ٢)^{٢}}$

$\frac{ع م}{ع س}$ = صفر عندما س (س − ٤) = ٠

أى عندما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٤

عند س < ٤ ⇐ م/ < ٠

عند س > ٤ ⇐ م/ > ٠

∴ عند س = ٤ تكون المساحة قيمة صغرى

∴ أصغر مساحة = $\frac{٣ (٤)^{٢}}{٢ (٤ - ٢)}$ = ١٢ وحدة مربعة

ب ∵ ميل العمودى = $\sqrt{٣ - ٢س}$

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{١}{\sqrt{٣ - ٢س}} = -(٣ - ٢س)^{-\frac{١}{٢}}$

∴ ص = $\int -(٣ - ٢س)^{-\frac{١}{٢}} . ع س$

$= \sqrt{٣ - ٢س} + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣) فهى تحقق معادلته

∴ ٣ = ١ + ث ⇐ ث = ٢

∴ معادلة المنحنى هى ص = $\sqrt{٣ - ٢س} + ٢$

الرياضة التطبيقية

أولاً : الديناميكا

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أكمل كلاً مما يأتى :

(١) المعدل الزمنى لبذل الشغل يسمى .....

(٢) سقط جسم وزنه ١ كجم من ارتفاع ٤.٩ متر عن سطح الأرض فسكن تماماً عند سطح الأرض فإن رد فعل الأرض على الجسم يساوى .....

(٣) يُعرف مقدار القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته ١ كجم لأكسبته عجلة مقدراها ١ م / ث^{٢} .....

(٤) جسمان كتلتاهما ك ، ك كجم مربوطان بطرفى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء أحدهما على مستوى مائل أملس والآخر يتدلى رأسياً . إذا بدأت المجموعة الحركة من السكون فإن الضغط على محور البكرة يساوى .....

(٥) الحصان = ... وات

(٦) إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{ق} = ٢\overleftarrow{س} - ٣\overleftarrow{ص}$ من نقطة الأصل إلى النقطة م (-١ ، ٢) فإن مقدار الشغل المبذول بواسطة هذه القوة .....

السؤال الثانى :

م جسم معلق فى خطاف ميزان زنبركى ومثبت فى سقف صعد يتحرك رأسياً إلى أعلى بتقصير منتظم مقداره $\frac{٥}{٧}$ عجلة الجاذبية الأرضية . أوجد النسبة بين وزن الجسم الظاهرى ووزنه الحقيقى .

ب يتحرك قطار بسرعة ثابتة مقدارها ٧٢ كم / س ، فُصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ١٦ طن فزادت سرعة القطار إلى ٩٦ كم / س . أوجد قدرة القطار بوحدة الحصان وكتلة القطار علماً بأن مقدار المقاومة التى يلاقيها يساوى ٦ ث كجم لكل طن .

السؤال الثالث :

م كرة كتلتها ٤٠٠ جم تتحرك فى خط مستقيم أفقى خشن وعندما كانت سرعتها ٩ م / ث صدمت كرة أخرى ساكنة كتلتها ٤٠٠ جم فكونتا جسماً واحداً بعد التصادم تحرك على المستوى مسافة قدرها ٩ متر حتى سكن . أوجد السرعة المشتركة للكرتين بعد التصادم مباشرة ، وطاقة الحركة المفقودة بالتصادم ، ثم أوجد مقدار مقاومة المستوى لحركة الجسم بالنيوتن .

ب يتحرك جسيم كتلته ٥ كجم وكان متجه الازاحة له يعطى بالعلاقة : $\overleftarrow{ف} = (٢ن^{٣} + ب ن^{٢} + ٦)\overleftarrow{س}$ ، حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة ثابت ، ومعيار $\overleftarrow{ف}$ بوحدة المتر وكانت القوة المؤثرة على هذا الجسيم ثابتة وتعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ق} = ١٥\overleftarrow{س}$ ، ومعيار $\overleftarrow{ق}$ بالنيوتن

① عيّن الثابتين ٢ ، ب

② أحسب بوحدة الجول الشغل الذى تبذله القوة $\overleftarrow{ق}$ فى مدة ٢ ث من بدء الحركة .

السؤال الرابع :

م عُلق جسمان كتلتاهما ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ حيث ك$_{١}$ > ك$_{٢}$ فى طرفى خيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء بدأت المجموعة الحركة من السكون عندما كان الجسمان فى مستوى أفقى واحد . إذا أصبحت المسافة بينهما تساوى ١٩٦ بعد ثانيتين من بدء الحركة أوجد ك$_{١}$: ك$_{٢}$.

ب يتحرك قطار كتلته ١٠٠ طن على مستوى أفقى بسرعة ثابتة ٦٣ كم / س . إنفصلت منه العربة الأخيرة وكتلتها ٢٠ طن . فإذا كانت المقاومات تعادل ٥ ث

كجم لكل طن من الكتلة فاثبت أن العربة تتحرك ٣,١٢٥ كم قبل أن تسكن ، وأوجد البُعد بين القطار والعربة المنفصلة لحظة سكون العربة

السؤال الخامس :

(أ) وُضع جسم كتلته ٤٠٠ جم على تضد أفقى خشن (معامل الاحتكاك = $\frac{٥}{٨}$) ، رُبط هذا الجسم بخيط خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبته عند حافة النضد ويحمل فى طرفه الآخر جسماً كتلته ٣٠٠ جم . تركت المجموعة للحركة من السكون . أحسب مقدار عجلة الحركة . وإذا فُصل من الجسم الثانى جزء كتلته ٧٠ جم بعد ثانيتين من بدء الحركة فاثبت أن المجموعة تقطع مسافة ٣١٥ سم قبل أن تسكن .

(ب) أثرت قوة قدرها ١٢,٦ نيوتن على جسم ساكن موضوع على مستوى أفقى لفترة زمنية فأكتسب الجسم فى نهايتها طاقة حركة قدرها ٩ ث كجم . متر وبلغت كمية حركته عندئذ ٤٢ كجم . م / ث ، ثم رُفعت القوة فعاد الجسم إلى السكون مرة أخرى بعد قطع مسافة ٢١ متر من لحظة رفع القوة . أوجد كتلة الجسم ومقاومة المستوى لحركة الجسم بالنيوتن بفرض ثبوتها ، ثم أوجد زمن تأثير القوة .

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاختيارات :

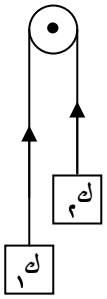
(١) إذا تحرك جسم كتلته ك بسرعة $\overleftarrow{ع}$ فإن متجه كمية حركته $\overleftarrow{م}$ = ...

(أ) ك $\overleftarrow{ع}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ ك || $\overleftarrow{ع}$ ||^{٢} (ج) ك $\frac{\overleftarrow{ع}}{ع}$ (د) $\frac{١}{ك}\overleftarrow{ع}$

(٢) إذا تحرك جسم بسرعة منتظمة تحت تأثير القوتين : $\overleftarrow{ق_{١}}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ فإن أ − ب = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) −٥ (د) ٥

(٣) الشكل المقابل يمثل بكرة ملساء يمر بها خيط ويتدلى من طرفيه جسمان كتلتاهما ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ حيث ك$_{١}$ > ك$_{٢}$ ، وتحركت المجموعة من السكون فإن عجلة الحركة تساوى ..... حيث ء تمثل عجلة الجاذبية الأرضية .



(أ) (ك$_{١}$ + ك$_{٢}$) ء (ب) ء

(ج) $\left(\frac{ك_{١}+ك_{٢}}{ك_{١}-ك_{٢}}\right)$ ء (د) $\left(\frac{ك_{١}-ك_{٢}}{ك_{١}+ك_{٢}}\right)$ ء

(٤) إذا أثرت قوة مقدارها ٢ نيوتن فى جسم لمدة ٠,٧ ثانية فإن مقدار دفع هذه القوة على الجسم = ...

(أ) ٧ ث كجم . ث (ب) $\frac{٥}{٧}$ نيوتن . ث

(ج) $\frac{٥}{٧}$ ث كجم . ث (د) $\frac{٧}{٥}$ نيوتن . ث

(٥) إذا قُذف جسم كتلته ٥ كجم رأسياً لأعلى بسرعة ١٨ م / ث فإن الشغل المبذول من قوة الوزن للوصول لأقصى ارتفاع يساوى ..... جول

(أ) صفر (ب) ٧٠ (ج) ١٩٦٠ (د) −١٩٦٠

(٦) جسم كتلته ك على ارتفاع ل من سطح الأرض فإن طاقة وضعه تساوى .....

(أ) ك ل (ب) ك ء ل (ج) ك ع (د) $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢}

السؤال الثانى :

(أ) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن على طريق أفقى مستقيم تحت تأثير مقاومة تتناسب طردياً مع مقدار سرعتها . فإذا كانت المقاومة ٨ ث كجم لكل طن من كتلة السيارة عندما كانت السرعة ٧٢ كم / س فاوجد أقصى سرعة لها علماً بأن أقصى قوة يولدها المحرك هى ٦٠ ث كجم .

(ب) تحرك جسيم على المستوى الاحداثى من النقطة أ (− ١ ، ٤) إلى النقطة ب (٣ ، ١) تحت تأثير قوة مقدارها ١٠ نيوتن تميل على الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$. أوجد الشغل المبذول بواسطة هذه القوة علماً بأن المسافة مقاسة بالمتر .

السؤال الثالث :

(أ) أطلقت قذيفة كتلتها ١ كجم من ماسورة مدفع بسرعة ٤٥٠ م / ث فإذا كان طول الماسورة ٢ متر فاثبت أن متوسط القوة المؤثرة على القذيفة أثناء الانفجار هى ٥٠٦٢٥ نيوتن

(ب) تتحرك كرتان كتلتاهما ك ، ١٥ جم فى خط مستقيم وفى نفس الاتجاه الأولى بسرعة ع والثانية بسرعة ٤ ع على الترتيب . فإذا كونت الكرتان بعد التصادم جسماً واحداً وتحرك هذا الجسم بسرعة ٢ ع فما قيمة ك ؟ وإذا كانت ع = ١٠ م / ث أوجد دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى .

السؤال الرابع :

(أ) مصعد وزنه ٢٤٠ ث كجم يهبط رأسياً لأسفل بعجلة تقصيرية منتظمة مقدارها ٤٩ سم /ث٢ وبه رجل وزنه ٧٠ ث كجم . أوجد مقدار كل من ضغط الرجل على أرضية المصعد والشد فى الحبل الذى يحمل المصعد بثقل الكجم .

(ب) إذا كانت السرعة القصوى لدراجة على طريق أفقى هى ٢٤ كم / س فما مقدار المقاومة التى تلاقيها علماً بأن قدرة راكب الدراجة هى $\frac{1}{5}$ حصان . وإذا كانت كتلة الرجل ودراجته ٧٢ كجم فما هى أقصى سرعة يمكن أن تصعد بها الدراجة طريقاً منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{1}{16}$ علماً بأن مقاومة الطريقين لم تتغير .

السؤال الخامس :

(أ) جسم كتلته ك موضوع على نضد أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما $\frac{3}{4}$ ومتصل بخيط أفقى خفيف يمر على بكرة ملساء عند حافة النضد ويحمل الخيط فى طرفه الآخر جسم كتلته ٣ ك . إذا إنقطع الخيط بعد ٤ ثوان من بدء الحركة أحسب السرعة لحظة انقطاع الخيط ، ثم أوجد المسافة الكلية التى يقطعها الجسم الموضوع على النضد حتى يسكن مرة أخرى

(ب) بندول بسيط طول خيطه ١٥٠ سم ويحمل كرة كتلتها ٥٠ جم ويتحرك حراً ليتذبذب فى زاوية قياسها ٢ هـ حيث ظاهـ = $\frac{3}{4}$. أوجد :

(١) سرعة الكرة فى منتصف المسار .

(٢) كمية حركة الكرة فى منتصف المسار .

ثانياً : الإستاتيكا

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أكمل كلاً مما يأتى :

(١) إذا كان $\overleftarrow{ق_1}$ × $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{و}$ فإن .....

(٢) إذا كانت قوة الاحتكاك النهائى ٦٠ نيوتن ومعامل الاحتكاك ٠,٧٥ فإن رد الفعل المحصل = ...

(٣) $\overleftarrow{ق_1}$ // $\overleftarrow{ق_2}$ ومحصلتهما $\overleftarrow{ح}$ إذا كان $ق_1$ = ٣ نيوتن ، ح = ٧ نيوتن فإن $ق_2$ = ...

(٤) أ ، ب نقطتان فى مستوى القوة $\overleftarrow{ق}$. إذا كان $\overleftarrow{ج_أ}$ + $\overleftarrow{ج_ب}$ = $\overleftarrow{و}$ فإن .....

(٥) إذا كان $\overleftarrow{ق_1}$ ٤ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ٣ هما قوتى ازدواج وكان $\overleftarrow{ق_1}$ = (٦ ، – ٩) فإن $\overleftarrow{ق_2}$ = ...

(٦) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية فيكون المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى .....

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ = (٢ ، م) ، $\overleftarrow{ق_2}$ = (– ٦ ، ٣) متوازيتين فاوجد قيمة م ، وإذا أثرت القوتان فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٥ ، ٠) على الترتيب فاوجد إحداثى نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور السينات .

(ب) أ ب جـ ء شبة منحرف متساوى الساقين فيه أ ء = ب جـ = ١٠ سم ، أ ب = ٢١ سم ، جـ ء = ٩ سم . أثرت القوى التى مقاديرها ١٨ ، ٢٠ ، ٦٨ ، ٢٠ ، ٤٢ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$ على الترتيب ، أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه .

السؤال الثالث :

(أ) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ٨ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤ ، ق نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{ءجـ}$ ، $\overleftarrow{هء}$ ، $\overleftarrow{وهـ}$ ، $\overleftarrow{وأ}$ على الترتيب . أوجد ق التى تجعل المجموع الجبرى لعزوم المجموعة ينعدم حول الرأس جـ .

(ب) $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم يرتكز على حاملين عند جـ ، ء حيث ٢ أ جـ = ٣ ء ب = جـ ء . وُجد أن القضيب يكون على وشك الدوران إذا عُلق من أ ثقل قدره ق ، أو عُلق من ب ثقل قدره ك . أثبت أن نقطة تأثير وزن القضيب تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٣ ق + ك : ق + ٣ ك

السؤال الرابع :

(أ) جسم وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن . لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى تجعله على وشك الحركة .

(ب) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٤٠ سم ووزنه ٥٠٠ ثجم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى خشن ويستند بإحدى نقطه جـ على مسمار أملس مثبت على ارتفاع ٩٠ سم من المستوى الأفقى . وعندما كان القضيب على وشك الانزلاق كان ب جـ = ٩٠ سم . أوجد رد فعل المسمار عند جـ ، ثم أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى الأفقى .

السؤال الخامس :

(أ) أثرت القوة $\overleftarrow{ق}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (١ ، ٢) أوجد :

(١) عزم القوة بالنسبة للنقطة ب (٣ ، ٢) .

(٢) المركبة الجبرية للقوة $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$.

(٣) مساحة Δ أ ب جـ حيث جـ (٣ ، ٥) .

(ب) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣,٩ ث كجم يتصل بمفصل رأسى عند طرفه أ ، أثر عليه ازدواج عزمه ٣٠ ث كجم . سم فاتزن القضيب فى وضع يميل فيه على الحائط بزاوية قياسها هـ . أوجد مقدار واتجاه ورد فعل المفصل وقياس الزاوية هـ .

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاختيارات :

(١) إذا كانت هـ قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل ، م هو معامل الاحتكاك فإن م = ...

(أ) ظاهـ (ب) جاهـ (جـ) جتاهـ (ء) ظتاهـ

(٢) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (- ٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (- ١ ، ٤) فإن مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه ضلعان متجاوران يمثلان المتجهين أ ، ب تساوى ..... وحدة مربعة

(أ) ١١ (ب) ١٤ (جـ) ٥ (ء) - ٥

(٣) المركبة الجبرية للقوة $\overleftarrow{ق}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{أب}$ حيث أ (- ١ ، ٤) ، ب (٢ ، ٠) تساوى .....

(أ) $\frac{١٢}{٥}\overleftarrow{س} + \frac{٤}{٥}\overleftarrow{ص}$ (ب) $-\frac{١٣}{٥}$

(جـ) $\frac{١٦}{\sqrt{١٣}}$ (ء) $\frac{١٦}{٥}$

(٤) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ (٢ ، ٣) وتؤثر القوة $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ - ٦ $\overleftarrow{ص}$ فى النقطة ب (- ١ ، - ٣) فإن المحصلة تؤثر فى النقطة .....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، - ١)

(جـ) (٣ ، - ١) (ء) (- ١ ، ٠)

(٥) إذا كونت القوتان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ازدواجاً فإن ٢ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) - ٨ (ء) - ٢

(٦) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى هو .....

(أ) إنعدام متجه محصلة القوى .

(ب) إنعدام متجه عزم القوى حول أى نقطة .

(جـ) إنعدام متجه محصلة القوى ومتجه عزم القوى حول أى نقطة .

(ء) أن تكون القوى متوازية .

السؤال الثانى :

(أ) وُضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ . فإذا كان قياس الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى ل حيث هـ > ل . أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى وتمنعه من الانزلاق أثبت أن أقل قيمة للقوة هى : $\left(\frac{\text{جا}(\text{هـ} - \text{ل})}{\text{جتا ل}}\right)$ و

(ب) تؤثر القوتان $\overleftarrow{\text{ق}_1} = \text{ف}\,\overleftarrow{\text{س}} - 2\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = \overleftarrow{\text{س}} + 3\,\overleftarrow{\text{ص}}$ فى النقطة ف (٢ ، ٠) . فإذا كان خط عمل المحصلة ينصف $\overline{\text{جـ ء}}$ حيث جـ (٣ ، −١) ، ء (١ ، ٣)

(١) أوجد قيمة ف

(٢) أثبت أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة (٦ ، −١)

السؤال الثالث :

(أ) قوتان متوازيتان فى اتجاه واحد مقدارهما ق_1 ، ق_2 نيوتن تؤثران فى النقطتين ف ، ب على الترتيب . فإذا تحركت القوة $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على $\overleftarrow{\text{ب ف}}$ فأثبت أن محصلة القوتين تتحرك فى نفس الاتجاه مسافة قدرها $\left(\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}\right)$ س

(ب) $\overline{\text{ف ب}}$ سلم منتظم وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بطرفه ف على مستوى أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك بينه وبين السلم يساوى $\frac{1}{\sqrt{3}}$. حُفظ السلم فى مستوى رأسى فى حالة اتزان بواسطة حبل أفقى يصل الطرف ف بنقطة من المستوى تقع رأسياً أسفل ب . فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان الحبل لا يتحمل شد أكبر من $20\sqrt{3}$ ث كجم فاثبت أن رجلاً وزنه ٨٤ ث كجم لا يستطيع أن يصعد أكثر من $\frac{5}{6}$ طول السلم دون أن ينقطع الحبل

السؤال الرابع :

(أ) $\overline{\text{ف ب}}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم يدور حول مسمار فى ثقب صغير عند نقطة جـ $\in \overline{\text{ف ب}}$ حيث ف جـ = ٥ سم فاتزن القضيب فى وضع أفقى بتأثير قوتين مقدار كل منهما ٥٠ نيوتن تؤثران عند طرفيه ف ، ب فى اتجاهين متضادين وتصنع كل منهما مع القضيب زاوية قياسها ٣٠° . أوجد وزن القضيب ومقدار رد فعل المسمار .

(ب) $\overleftarrow{\text{ق}}$ قوة فى مستوى متوازى الأضلاع ف ب جـ ء بحيث القياس الجبرى لعزوم القوة حول كل من ف ، ب ، جـ يساوى ١٥ ، −١٠ ، ١٥ نيوتن . سم على الترتيب . أوجد القياس الجبرى لعزوم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ حول ء .

السؤال الخامس :

(أ) $\overline{\text{ف ب}}$ قضيب غير منتظم يرتكز فى وضع الاتزان أفقياً على حاملين أملسين عند جـ ، ء حيث ف جـ = ٦ سم ، ب ء = ٧ سم ، ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف ف . وُجد أنه لو عُلق من الطرف ف ثقل قدره ١٢٠ ث كجم أو من الطرف ب ثقل قدره ١٨٠ ث كجم كان القضيب على وشك الدوران . أوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين .

(ب) ف ب جـ ء مستطيل فيه ف ب = ٩ سم ، ب جـ = ٢٤ سم . النقطتان هـ ، و منتصفات $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ف ء}}$ على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٤٨ ، ٣٠ ، ٢٤ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{ف ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ف}}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه . ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى $\overleftarrow{\text{هـ ف}}$ ، $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ حتى تحدث إتزاناً مع القوى المعلومة .

حلول اختبارات الرياضة التطبيقية

أولاً : الديناميكا

حل الاختبار الأول

إجابة السؤال الأول :

(١) القدرة (٢) ١ ث كجم (٣) النيوتن

(٤) ٢ ش جتا $\left(\frac{90 - \text{هـ}}{2}\right)$ حيث هـ زاوية ميل المستوى

(٥) ٧٣٥ وات (٦) −٨

إجابة السؤال الثانى :

(أ) ش = ك (ء + جـ) = ك (ء − $\frac{5}{7}$ ء) = ك ء × $\frac{2}{7}$

∴ ش : و = ٢ : ٧

ب نفرض كتلة القطار كاملاً = ك طن

الحالة الأولى : قبل فصل العربة الأخيرة

$ع_1 = \frac{5}{18} \times 72 = 20$ م/ث ، $م_1 = 6$ ك

∵ $ق_1 = م_1$ (لأن السرعة ثابتة) ⇐ $ق_1 = 6$ ك

∴ القدرة = $ق_1 \times ع_1 = 6$ ك $\times 20$ ك $= 120$ ك ..... (١)

الحالة الثانية : بعد الفصل

$ع_2 = 96 \times \frac{5}{18} = \frac{80}{3}$ م/ث ، $م_2 = 6$ (ك − ١٦)

∴ $ق_2 = م_2 = 6$ (ك − ١٦)

∴ القدرة = $ق_2 \times ع_2 = 6$ (ك − ١٦) $\times \frac{80}{3}$

$= 160$ (ك − ١٦) ..... (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ١٦٠ (ك − ١٦) = ١٢٠ ك ⇐ ك = ٦٤ طن

قدرة القطار = $120 \times 64 = 7680 = 102,4$ حصان

إجابة السؤال الثالث :

أ $ك_1 ع_1 + ك_2 ع_2 = (ك_1 + ك_2) ع$

⇐ $0,2 \times 9 + 0,4 \times 0 = (0,2 + 0,4) ع$ ⇐ ع = ٣ م/ث

∴ سرعة الجسم بعد التصادم مباشرة = ٣ م/ث

طاقة الحركة المفقودة = $ط_. - ط = \frac{1}{2} ك (ع_.)^2 - \frac{1}{2} ك / ع^2$

$= \frac{1}{2} \times 0,2 \times 81 - \frac{1}{2} \times 0,6 \times 9 = 5,4$ جول

∵ $ع^2 = ع_.^2 + 2 جـ ف$ ⇐ $0 = (3)^2 + 2 جـ \times 9$

⇐ $جـ = -0,5$ م/ث

، معادلة الحركة : $- م = ك جـ$ ⇐ $- م = 0,6 \times -0,5$

⇐ م = ٠,٣ نيوتن

ب $\overrightarrow{ف} = (أ ن^3 + ب ن^2 + 6) \overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ع} = (3 أ ن^2 + 2 ب ن) \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{جـ} = (6 أ ن + 2 ب) \overrightarrow{س}$

، ∵ $ق = ك جـ$ ⇐ $15 = 5 (6 أ ن + 2 ب)$

ومنها $3 = 6 أ ن + 2 ب$ ⇐ $أ = 0$ ، $ب = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ف} = 15 \overrightarrow{س} \odot (\frac{3}{4} ن^2 + 6) \overrightarrow{س}$

∴ $ش = 15 [\frac{3}{4} (2)^2 + 6] = 180$ جول

إجابة السؤال الرابع :

أ $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2$ ⇐ $196 = 0 + \frac{1}{2} جـ \times 4$

⇐ $جـ = 98$ سم/ث^2

معادلات الحركة :

$ك_1 ء - ش = ك_1 جـ$ ، $ش - ك_2 ء = ك_2 جـ$

بالجمع ⇐ $جـ = \frac{ك_1 - ك_2}{ك_1 + ك_2} \times ء$

∴ $98 = \frac{ك_1 - ك_2}{ك_1 + ك_2} \times 980$

∴ $10 ك_1 - 10 ك_2 = ك_1 + ك_2$ ⇐ $9 ك_1 = 11 ك_2$

⇐ $ك_1 : ك_2 = 11 : 9$

ب دراسة حركة العربة المنفصلة :

معادلة الحركة : $- م = ك جـ$

$- 5 \times 20 \times 9,8 = 20 \times 1000 جـ$ ⇐ $جـ = -0,049$ م/ث^2

، ∵ $ع^2 = ع_.^2 + 2 جـ ف$ ⇐ $0 = (17,5)^2 - 2 \times 0,049 ف$

⇐ ف = ٣١٢٥ م = ٣,١٢٥ كم

ثم نحسب زمن الوصول لحالة السكون :

∵ $ع = ع_. + جـ ن$ ⇐ $0 = 17,5 - 0,049 ن$ ⇐ $ن = \frac{2500}{7}$

∴ العربة المنفصلة تصل للسكون بعد قطعها مسافة ٣,١٢٥ كم فى زمن قدره $\frac{2500}{7}$ ث

دراسة حركة بقيه القطار :

قبل انفصال العربة الأخيرة :

القطار يسير بسرعة ثابتة ⇐ $ق = م$

∴ $ق = 5 \times 100 = 500$ ث كجم

بعد إنفصال العربة الأخيرة :

معادلة الحركة : $ق - م = ك جـ$

⇐ $500 - 9,8 \times 5 \times 80 = 9,8 \times 80 \times 1000 جـ$

⇐ $جـ = 0,012245$ م/ث^2

∵ $ف = ع_. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2 = 17,5 \times \frac{2500}{7} + \frac{1}{2} \times 0,012255$

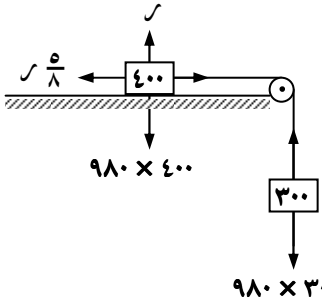
$\times (\frac{2500}{7})^2 = 7031,25$ متر = ٧,٠٣١٢٥ كم

∴ المسافة بين القطار والعربة = ٣,١٢٥ + ٧,٠٣١٢٥

= ١٠.١٥٦٢٥ = ١٠ كم تقريباً

إجابة السؤال الخامس :

(أ) قبل الانفصال :



م ر = ٥/٨ × ٤٠٠ = ٢٥٠ ث جم

معادلات الحركة :

٣٠٠ × ٩٨٠ − ش = ٣٠٠ جـ

ش − ٢٥٠ × ٩٨٠ = ٤٠٠ جـ

بالجمع : ٥٠ × ٩٨٠ = ٧٠٠ جـ ⇐ جـ = ٧٠ سم / ث٢

، ع = ع٠ + جـ ن = ٠ + ٢ × ٧٠ = ١٤٠ سم / ث

بعد الانفصال :

معادلات الحركة :

٢٣٠ × ٩٨٠ − ش = ٢٣٠ جـ/

ش − ٢٥٠ × ٩٨٠ = ٤٠٠ جـ/

بالجمع : − ٢٠ × ٩٨٠ = ٦٣٠ جـ/ ⇐ جـ/ = ٢٨٠/٩ سم / ث٢

، ∵ ع٢ = ع٠٢ + ٢ جـ ف

⇐ ٠ = (١٤٠)٢ − ٢ × ٢٨٠/٩ ف ⇐ ف = ٣١٥ سم

(ب) قبل ابطال القوة :

كمية الحركة = ٤٢ ⇐ ك ع = ٤٢ ..... (١)

، طاقة الحركة = ٩ ⇐ ١/٢ ك ع٢ = ٩ × ٩,٨ ..... (٢)

بحل المعادلتين بالتعويض ينتج أن ك = ١٠ كجم

ومن (١) ⇐ ع = ٤,٢ م / ث

بعد فصل القوة :

ع٠ = ٤,٢ ، ع = ٠ ، ف = ٢١ م

ع٢ = ع٠٢ + ٢ جـ/ ف ئ ٠ = (٤,٢)٢ + ٢ × ٢١ جـ/

⇐ جـ/ = − ٠,٤٢ م / ث٢

معادلة الحركة : − م = ك جـ/ ∴ − م = ١٠ × − ٠,٤٢

⇐ م = ٤,٢ نيوتن

ولكن معادلة حركة الجسم قبل ايقاف القوة :

ن − م = ك جـ ⇐ ١٢,٦ − ٤,٢ = ١٠ جـ

⇐ جـ = ٠,٨٤ م / ث٢

ع = ٤,٢ م / ث ، ع٠ = ٠ ، جـ = ٠,٨٤ م / ث٢

ع = ع٠ + جـ ن ⇐ ٤,٢ = ٠ + ٠,٨٤ ن ∴ ن = ٥ ثوان

حل الاختبار الثانى

إجابة السؤال الأول :

(١) ك ع← (٢) − ٥ (٣) ء ((ك١ − ك٢)/(ك١ + ك٢))

(٤) ٥/٧ ث كجم . ث (٥) − ١٩٦٠ جول (٦) ك ء ل

إجابة السؤال الثانى :

(أ) م١/م٢ = ع١/ع٢ ، م١ = ٨ × ٤ = ٣٢ ث كجم

، ع١ = ٧٢ كم / س ، م٢ = ٦٠ ث كجم

⇐ ع٢ = ١٣٥ كم / س

(ب) ق← = ١٠ جتا هـ س← + ١٠ جا هـ ص← = (٨ ، ٦)

، ش = ق← ⊙ ف← = ق← ⊙ أ ب←

= (٨ ، ٦) ⊙ (٤ ، − ٣) = ١٤ جول

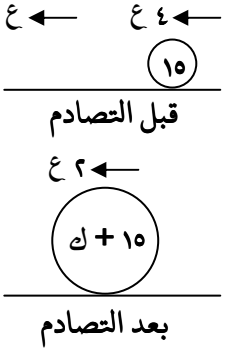
إجابة السؤال الثالث :

(أ) ع٠ = ٠ ، ع = ٤٥٠ م / ث ، ف = ٢ م

∵ ع٢ = ع٠٢ + ٢ جـ ف ⇐ جـ = (٤٥٠)٢ / ٢ × ٢ = ٥٠٦٢٥ م / ث٢

، ∵ ق = ك جـ ⇐ ق = ١ × ٥٠٦٢٥ = ٥٠٦٢٥ نيوتن

(ب)



ك١ ع١ + ك٢ ع٢ = (ك١ + ك٢) ع

١٥ × ٤ ع + ك × ع = (١٥ + ع) × ٢ ع

⇐ ك = ٣٠ جم

دفع الكرة الثانية على الأولى =

التغير فى كمية حركة الكرة الأولى

= ك (٢ ع − ع) = ك ع = ٣٠ × ١٠٠٠ جم . سم / ث

= ٠,٣ كجم . م / ث

إجابة السؤال الرابع :

(أ) ∵ الحركة لأسفل بعجلة تقصيرية

∴ ض = ك (ء + جـ) = ٧٠ (٩,٨ + ٠,٤٩)

= ٧٢٠,٣ نيوتن = ٧٣,٥ ث كجم

، ش = ك (ء + جـ) = ٤٢٠ (٩,٨ + ٠,٤٩) = ٤٤١ ث كجم

(ب) ∵ السرعة قصوى (منتظمة) ⇐ ق = م

∵ القدرة = ق × ع

∴ ١/٥ × ٧٥ = م × ٢٤ × ٥/١٨ ⇐ م = ٢,٢٥ ث كجم

على الطريق المائل :

$\because$ ق = م + ك ء جا هـ = ٢,٢٥ × ٩,٨ + ٧٢ × ٩,٨ × $\frac{١}{١٦}$ = ٦٦,١٥

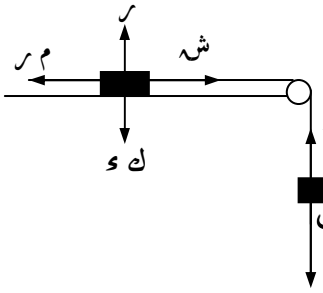
$\because$ القدرة = ق × ع

$\therefore$ $\frac{١}{٥}$ × ٧٥ × ٩,٨ = ٦٦,١٥ × ع

$\Leftarrow$ ع = $\frac{٢٠}{٩}$ م / ث = ٨ كم / س

إجابة السؤال الخامس :

(أ)



معادلة حركة الجسم المعلق

٣ ك ء − شـ = ٣ ك جـ ... (١)

معادلة حركة الجسم على المستوى

شـ − م ر = ك جـ .... (٢)

، ر = ك ء

بالجمع (١) + (٢) $\Leftarrow$ جـ = $\frac{(٣ - \sqrt{٣})}{٤}$ ء

بعد ن = ٤ ثوان

ع = ع$_{.}$ + جـ ن = ٠ + ٤ × $\frac{(٣ - \sqrt{٣})}{٤}$ ء = (٣ − $\sqrt{٣}$) ء

$\because$ ف = ع$_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(٣ - \sqrt{٣})}{٤}$ ء × ١٦

المسافة المقطوعة قبل انقطاع الخيط = (٦ − ٢$\sqrt{٣}$) ء متر

بعد انقطاع الخيط : يتحرك الجسم على المستوى بتقصير منتظم

− م ر = ك جـ$_{/}$ $\Leftarrow$ جـ$_{/}$ = − $\sqrt{٣}$ × ء

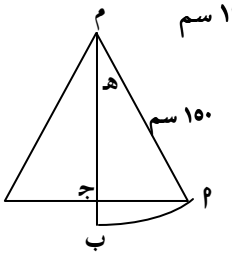
$\because$ ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف

$\Leftarrow$ ٠ = [(٣ − $\sqrt{٣}$) ء]^{٢} + ٢ × − $\sqrt{٣}$ ء × ف

$\Leftarrow$ ف = ٤,٥ متر تقريباً

$\therefore$ المسافة الكلية = (٦ − ٢$\sqrt{٣}$) ء + ٤,٥ = ٢٩,٤ متر

(ب) م جـ = ١٥٠ جتا هـ = ١٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٢٠ سم



$\therefore$ ب جـ = ٣٠ سم

طاقة الوضع عند م = ك ء ل

= ٥٠ × ٩٨٠ × ٣٠ = ١٤٧٠٠٠٠ إرج

طاقة الحركة عند م = صفر

طاقة الوضع عند ب = صفر

$\because$ مجموع طاقتى الوضع والحركة عند م = مجموعهما عند ب

$\therefore$ ١٤٧٠٠٠٠ + ٠ = ٠ + ٥٠ × ع^{٢}

$\therefore$ ع^{٢} = ٥٨٨٠٠ ومنها ع = ١٤٠ $\sqrt{٣}$ سم / ث

كمية الحركة عند ب = ك ع = ٥٠ × ١٤٠ $\sqrt{٣}$

= ٧٠٠٠ $\sqrt{٣}$ جم . سم / ث

ثانياً : الإستاتيكا

حل الاختبار الأول

إجابة السؤال الأول :

(١) م ب $\perp$ ب ء (٢) ١٠٠ نيوتن (٣) ٤ نيوتن

(٤) خط عمل ق ينصف م ب (٥) (٨ ، − ١٢) (٦) صفر

إجابة السؤال الثانى :

(أ) (− ٦ ، ٣) = − ٣ (٢ ، − ١) $\Leftarrow$ م = − ١

نفرض نقطة تقاطع محصلتهما مع محور السينات = جـ (س ، ٠)

$\Leftarrow$ ج جـ = ٠ (لأن خط عمل المحصلة يمر بها)

ر$_{١}$ = جـ م = م − جـ = (١ ، ٠) − (س ، ٠) = (١ − س ، ٠)

، ر$_{٢}$ = جـ ب = ب − جـ = (٥ ، ٠) − (س ، ٠) = (٥ − س ، ٠)

ج$_{١}$ = جـ م × ق$_{١}$ = (١ − س ، ٠) × (٢ ، − ١)

= (س − ١) ع

ج$_{٢}$ = جـ ب × ق$_{٢}$ = (٥ − س ، ٠) × (− ٦ ، ٣)

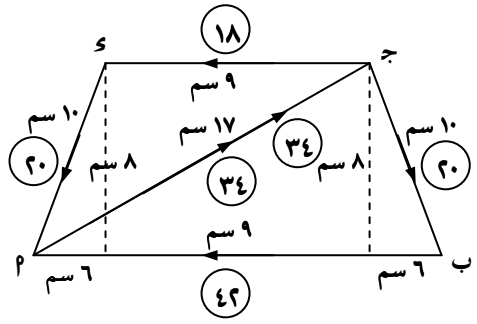
= (٣ س − ١٥) ع

$\because$ ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ = ٠

$\Leftarrow$ س − ١ + ٣ س − ١٥ = ٠ $\Leftarrow$ ٤ س = ١٦ $\Leftarrow$ س = ٤

$\therefore$ خط عمل المحصلة يقطع محور السينات فى النقطة (٤ ، ٠)

(ب)



Δ م ب جـ :

القوى فى ترتيب دورى واحد ، $\frac{٢٠}{١٠}$ = $\frac{٤٢}{٢١}$ = $\frac{٣٤}{١٧}$ = ٢

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواج عزمه ج$_{١}$

ج$_{١}$ = − ٢ × مـ (Δ م ب جـ) × ٢ = − ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٢١ × ٨

= − ٣٣٦ جم . سم

∆ م جـ ء :

القوى فى ترتيب دورى واحد ، $\frac{٣٤}{١٧} = \frac{١٨}{٩} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج عزمه ج م

ج م = ٢ × مـ (∆ م جـ ء) × ٢ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٨

= ١٤٤ جم . سم

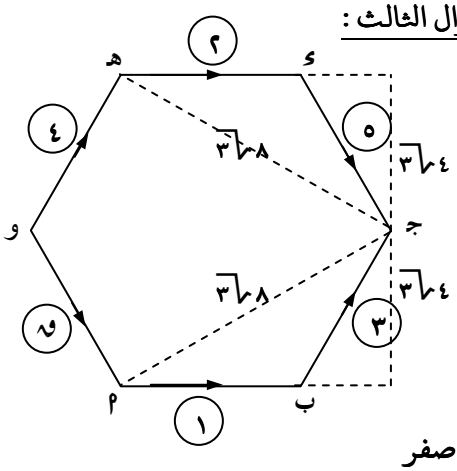
∴ المجموعة تكافئ ازدواج عزمه ج = ج ١ + ج ٢

ج = − ٣٣٦ + ١٤٤ = − ١٩٢ جم . سم

∴ معيار عزم الازدواج = ١٩٢ جم . سم

إجابة السؤال الثالث :

(م)



∵ ج جـ = صفر

∴ ٣ × ٠ − ٥ × ٠ − ٢ × ٤√٣ − ٤ × ٨√٣ + ٦ × ٨√٣ + ١

× ٤√٣ = ٠

∴ − ٨√٣ − ٣٢√٣ + ٤√٣ + ٨√٣ ٦ = ٠

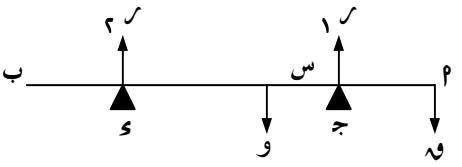
⇐ ٦ = ٤,٥ نيوتن

(ب) ∵ ٢ م جـ = ٢ ء ب = جـ ء = ٢ ص

∴ م جـ = ص ، ء ب = ص ، جـ ء = ٢ ص

نفرض أن وزن القضيب يبعد عن الحامل جـ بمقدار س سم

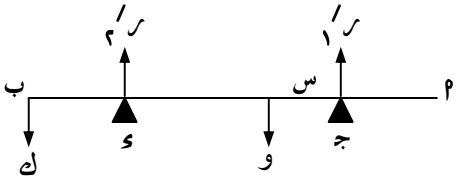
الحالة الأولى :



∵ القضيب على وشك الدوران ∴ ر م = ٠

، ∵ ج جـ = ٠ ∴ و × س = ٦ × ص ..... (١)

الحالة الثانية :



∵ القضيب على وشك الدوران ∴ ر١/ = صفر

، ∵ ج ء = ٠ ∴ و × (٢ ص − س) = ك × ص ..... (٢)

بالقسمة (١) ÷ (٢) : ⇐ $\frac{س}{٢ ص - س} = \frac{٦}{ك}$

⇐ س ك = ٢ ٦ ص − ٦ س ⇐ س = $\frac{٢ ٦ ص}{٦ + ك}$

نسبة التقسيم = (ص + س) : (٢ ص − س + ص)

= (ص + $\frac{٢ ٦ ص}{٦ + ك}$) : (٣ ص − $\frac{٢ ٦ ص}{٦ + ك}$)

= $\frac{ص (٦ + ك) + ٢ ٦ ص}{٦ + ك}$: $\frac{٣ ص (٦ + ك) − ٢ ٦ ص}{٦ + ك}$

= $\frac{ص (٣ ٦ + ك)}{٦ + ك}$: $\frac{ص (٦ + ٣ ك)}{٦ + ك}$

= ٣ ٦ + ك : ٦ + ٣ ك

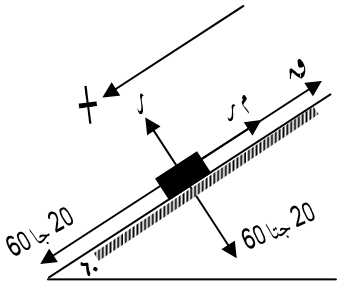
إجابة السؤال الرابع :

(م) ∵ الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثيربر وزنه

∴ معامل الاحتكاك = ظا ٣٠ ⇐ م = $\frac{٣√}{٣}$

أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل

معادلات الاتزان :

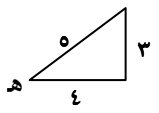


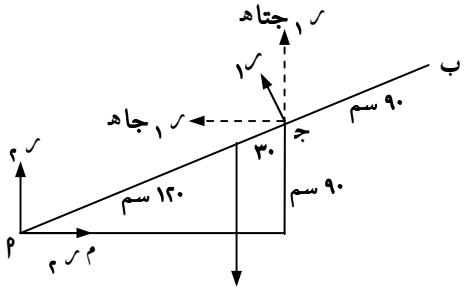
ر = ٢٠ جتا ٦٠ = ١٠ نيوتن

، ٦ = ٢٠ جا ٦٠ − م ر

⇐ ٦ = $\frac{٢٠}{٣}$ √٣ نيوتن

(ب)





∵ القضيب على وشك الانزلاق (متزن)

∴ س ٦ = ٠ ⇐ ر م م = ر١ جاهـ ..... (١)

، ص ٦ = ٠ ⇐ ر١ جتاهـ + ر م = ٥٠٠ ..... (٢)

، ج م = ٠

⇐ ر١ × ١٥٠ = ٥٠٠ × ١٢٠ جتاهـ ⇐ ر١ = ٣٢٠ ث جم

بالتعويض فى (٢) ⇐ ر م = ٢٤٤ ث جم

بالتعويض فى (١) ⇐ م = $\frac{٤٨}{٦١}$

إجابة السؤال الخامس :

(أ) $\overrightarrow{ج ب} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ب ف} \times \overrightarrow{ق}$ ‖ $\overrightarrow{ب ف} = \overrightarrow{ف} - \overrightarrow{ب}$

$= (-٢، ٠) \times (٤، ٥)$ ‖ $= (١، ٢) - (٣، ٢)$

$= (-١٠ - ٠)$ ع $= -١٠$ ع ‖ $= (-٢، ٠)$

، المركبة الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ا ب} = \dfrac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ا ب}}{\| \overrightarrow{ا ب} \|}$

$= [(٤، ٥) \times (٠، ٢)] / ٢ = ٤$

، $\overrightarrow{ب ج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{ب} = (٣، ٥) - (٣، ٢) = (٠، ٣)$

∵ $\overrightarrow{ا ب} \odot \overrightarrow{ب ج} = (٢، ٠) \odot (٠، ٣) = ٠$ ⇐ $\overrightarrow{ا ب} \perp \overrightarrow{ب ج}$

∴ مساحة سطح Δ ا ب ج $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٣ = ٣$ وحدات مربعة

(ب) ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

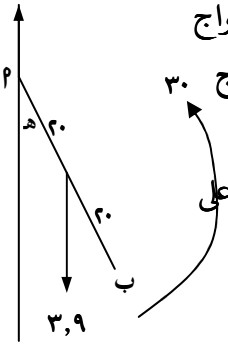
∴ القوتان (٣,٩ ، ر) يكونان ازدواج ٣٠

عزمه = − ٣٠ ث كجم . سم

∴ رد فعل المسمار = ٣,٩ ث كجم ولأعلى

⇐ − ٣,٩ × ٢٠ جاهـ = − ٣٠

⇐ قـ(هـ) = ٢٢° ٣٧′



حل الاختبار الثانى

إجابة السؤال الأول :

(١) ظتاهـ (٢) ٥ (٣) $\frac{١٦}{٥}$

(٤) (٠، −١) (٥) − ٨ (٦) (ج)

إجابة السؤال الثانى :

(أ) معادلات الاتزان :

ر = و جتاهـ ..... (١)

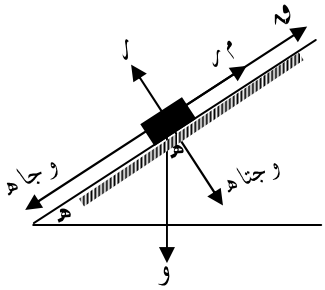
قـ = و جاهـ − م ر ..... (٢)

∴ قـ = و (جاهـ − م جتاهـ)

∵ م = ظ ل

∴ قـ = و (جاهـ − ظ ل جتاهـ) = و (جاهـ − $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$ جتاهـ)

= و ($\frac{\text{جاهـ جتا ل − جتاهـ جا ل}}{\text{جتا ل}}$) = و × $\frac{\text{جا (هـ − ل)}}{\text{جتا ل}}$



(ب) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{قـ} + \overrightarrow{قـ} = (١، ١) + (٢، ٣)$

∵ المحصلة تنصف $\overline{ج ء}$

∴ عزم المحصلة حول ج = − عزمها حول ء

∴ $\overrightarrow{ج ف} \times \overrightarrow{ح} = -\overrightarrow{ء ف} \times \overrightarrow{ح}$

$(-٣، ٣) \times (٢ + ١، ١) = (١، ١) \times (٢ + ١، ١)$

∴ $-٣ - ٣ ف - ٣ = ١ - ف - ١$ ومنها ف = − ٣

⇐ ح = (١، − ٢)

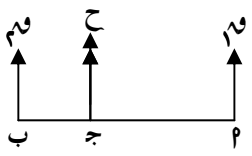
عزم المحصلة حول النقطة م (٦ ، − ١) = $\overrightarrow{م ف} \times \overrightarrow{ح}$

= (− ٦، ٣) × (١، − ٢) = (− ٦ + ٦) ع = ٠

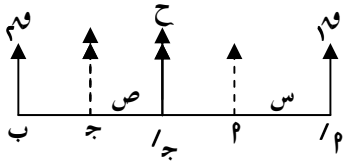
⇐ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م

إجابة السؤال الثالث :

(أ) قـ × ا ج = قـ × ب ج .... (١)



، نفرض أن قـ تحركت مسافة س ، والمحصلة تحركت مسافة ص



∴ قـ × ا/ ج/ = قـ × ب ج/ ..... (٢)

بالطرح : (٢) − (١) :

∴ قـ (ا/ ج/ − ا ج) = قـ (ب ج/ − ب ج)

∴ قـ (س + ا ج/ − ا ج/ − ص) = قـ ص

قـ (س − ص) = قـ ص

قـ س = قـ ص + قـ ص

ص = $\left(\frac{\text{قـ}}{\text{قـ + قـ}} \right)$ س

(ب) نفرض طول السلم = ل

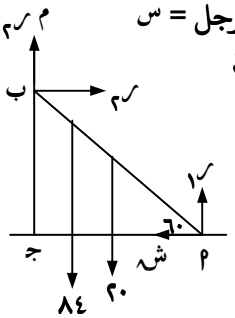
وأن أقصى مسافة يمكن أن يصعدها الرجل = س

ويكون الشد فى أقصى قيمة له = ٢٠ $\sqrt{٣}$

ويكون السلم على وشك الانزلاق

∵ السلم متزن

∴ س = ٠ ⇐ م ر = ش = ٢٠ $\sqrt{٣}$



، ج م = صفر

∴ ٢٠ × ل جتا ٦٠ + ٨٤ × س جتا ٦٠ − م ر × ل جا ٦٠

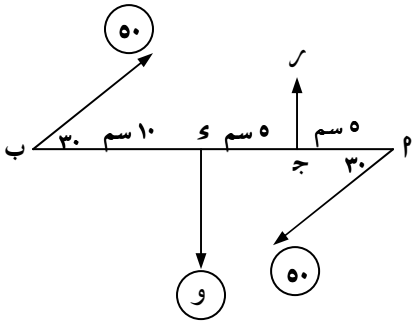
− م ر × ل جتا ٦٠ = صفر

∴ ٥ ل + ٤٢ س − ٣٠ ل − ١٠ ل = ٠

٤٢ س = ٣٥ ل ⇐ س = $\frac{٥}{٦}$ ل

إجابة السؤال الرابع :

(أ)



القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواج عزمه $ج_1$

$ج_1 = -٥٠ \times ٢٠ جا ٣٠ = -٥٠٠$ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

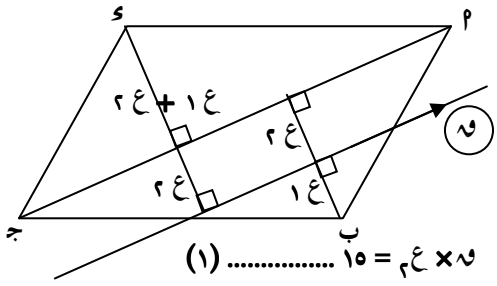
∴ القوتان (ر ، و) تكونان ازدواج عزمه $ج_م = ٥ و$

∵ $ج_م + ج_1 = ٠$

∴ $-٥٠٠ + ٥ و = ٠ \Leftarrow و = ر = ١٠٠$ نيوتن

(ب) ∵ $ج_م = ج_جـ$ ⇐ خط عمل القوة // $\overline{أ جـ}$

، ∵ $ج_م = - ج_ب$ ⇐ خط عمل القوة ينصف $\overline{أ ب}$



$ج_م = ١٥ \Leftarrow ق \times ع_م = ١٥$ ..... (١)

، $ج_ب = -١٠ \Leftarrow - ق \times ع_1 = -١٠$

$\Leftarrow ق \times ع_1 = ١٠$ ..... (٢)

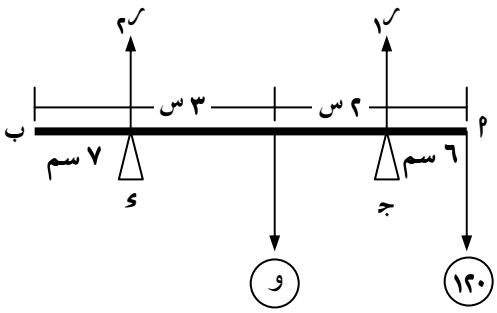
، $ج_ء = ق(ع_1 + ع_م + ع_م) = ق ع_1 + ٢ ق ع_م$ ..... (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣)

∴ $ج_ء = ١٠ + ٢ \times ١٥ = ٤٠$ نيوتن . سم

إجابة السؤال الخامس :

(أ) أولاً :

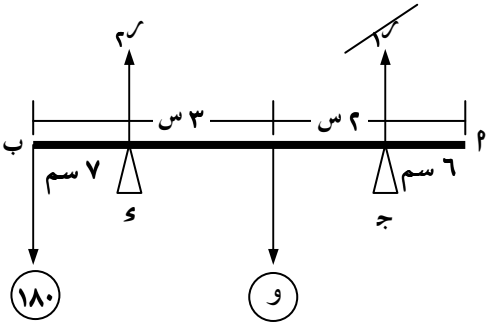


نفرض طول القضيب = ٥ س

$ج_جـ$ = صفر ⇐ $-١٤٠ \times ٦ + و (٢ س - ٦) = ٠$

∴ $و (٢ س - ٦) = ٧٢٠$ ..... (١)

ثانياً :



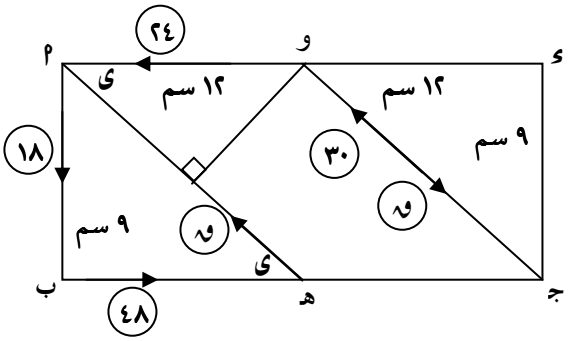
$ج_و$ = صفر ⇐ $١٨٠ \times ٧ - و (٣ س - ٧) = ٠$

∴ $و (٣ س - ٧) = ١٢٦٠$ ..... (٢)

بقسمة (١) / (٢) ⇐ س = ٧

∴ و = ٩٠ ث كجم ، $ج_ء = ٥ \times ٧ - (٦ + ٧) = ٢٢$ سم

(ب)



$و جـ = \sqrt{(و ء)^2 + (ء جـ)^2} = ١٥$ سم

∵ $\frac{١٨}{٩} = ٢$ ، $\frac{٤٨}{١٢} = ٢$ ، $\frac{٣٠}{١٥} = ٢$ ، $\frac{٢٤}{١٢} = ٢ = ك$

، القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواج عزمه = ضعف مساحة شبة المنحرف أ ب جـ و × ك

$= ٢ \times (١٢ + ٢٤) / ٢ \times ٩ \times ٢ = ٦٤٨$ ث جم . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج عزمه = -٦٤٨

∴ $- ق \times ١٢ جا ى = -٦٤٨$

∴ $ق \times ١٢ \times = ٦٤٨ \Leftarrow ق = ٩٠$ ث جم .