(١) أوجد كلا من المشتقات التالية :

١. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٥}$)

٢. $\frac{ع}{ع س}$ ($ص^{٥}$)

٣. $\frac{ع}{ع س}$ ($٣ س - ٧)^{٥}$

٤. $\frac{ع}{ع س}$ ($٧ س$)

٥. $\frac{ع}{ع س}$ ($٥ ص$)

٦. $\frac{ع}{ع س}$ (جا س)

٧. $\frac{ع}{ع س}$ (جتا س)

٨. $\frac{ع}{ع س}$ (ظا س)

٩. $\frac{ع}{ع س}$ [جا ($٥ س + ٣$)]

١٠. $\frac{ع}{ع س}$ (ظا $٧ س$)

١١. $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{١}{س}$)

١٢. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt{س}$)

١٣. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt{ص}$)

١٤. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt[٣]{ص^{٢}}$)

١٥. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt{٥ س^{٢} + ٣ س}$)

١٦. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٢} + ٥ س ص + ص^{٣}$)

١٧. $\frac{ع}{ع س}$ [جا (س + ص)]

١٨. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٢} + ٣س$ جا ٢س)

.....

(٢) أوجد التكاملات التالية :

١. $\int ٧ . ع س$

٢. $\int ٧ س . ع س$

٣. $\int ص' . ع س$

٤. $\int ٧ ص' . ع س$

٥. $\int$ جا($٥ س - ٣$) . ع س

٦. $\int (٥ س - ٣)^{٧} . ع س$

٧. $\int$ قا^{٢} ($٣ س - ٥$) . ع س

٨. $\int \frac{ع س}{\sqrt[٥]{٢ س + ٩}}$

٩. $\int$ (جا ٢ س + جتا س) . ع س

١٠. $\int$ (جتا^{٢} س + جا س) . ع س

أ / السيد أبو الوفا

١١. $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} . ء س

١٢. $\int$ س^{١٠} ($\frac{٢}{س}$ + $\frac{٣}{س^{٢}}$)^{٥} . ء س

١٣. $\int$ $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١}$. ء س

١٤. $\int$ $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$. ء س

١٥. $\int$ (٣ س^{٢} – ٢) (٢ س + ٥) . ء س

١٦. $\int$ جا س جتا س . ء س

١٧. $\int$ $\frac{جتا^{٢} س}{١ + جا س}$. ء س

١٨. $\int$ $\sqrt[٣]{س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}}}$. ء س

١٩. $\int$ جتا ($\frac{س}{٢}$ + ٣) . ء س

٢٠. $\int$ (س + ١) (٢ س + ١)^{٩} . ء س

٢١. $\int$ $\frac{٣ + ٢س}{(٢س + ١)^{٣}}$. ء س

٢٢. $\int$ $\frac{س + ١}{(٣س + ١)^{٥}}$. ء س دور أول ٢٠١٣

٢٣. $\int$ ٣س $\sqrt[٣]{٣ س + ١}$. ء س

٢٤. $\int$ $\sqrt[٥]{٢٥ س^{٢} - ٣٠ س + ٩}$. ء س

٢٥. $\int$ $\frac{س^{٢} - ٦ س}{(س - ٣)^{٤}}$. ء س

٢٦. $\int$ قا^{٢} ($\frac{س}{٢}$ - ٣) . ء س

٢٧. $\int$ س $\sqrt[٣]{٣ س - ١}$. ء س

٢٨. $\int$ قا^{٢} $\frac{ط}{٢}$. ء س

٢٩. $\int$ $\sqrt{س^{٣} + س^{٢} - س - ١}$. ء س

النهايات والاتصال وقابلية الاشتقاق

(٣) أوجد : $\lim_{س \to -١}$ د(س) للدالة د(س) = $\frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$

.....

(٤) دور ثان ٢٠٠٦ : ابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ د(س)

للدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{جا(س - ١)}{(س - ١)} & ، \ س > ١ \\ ظا\left(\frac{ط س}{٤}\right) & ، \ س < ١ \end{cases}$

.....

(٥) ابحث اتصال الدالة

د(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{٣ س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} & ، \ س \neq ٢ \\ \frac{٣}{} & ، \ س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

.....

(٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & ، \quad س \leq ٢ \\ س + ٥ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند س = ٢ وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

.....

(٧) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \quad س > ١ \\ ٣ - أ س^{٢} & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية اشتقاقها عند س = ١

.....

(٨) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} أ س + ب & ، \quad س \leq ٢ \\ س^{٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فما قيمة كل من أ ، ب

.....

(٩) أوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق مرتين حيث د(س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ب س + جـ & ، \quad س \leq ٠ \\ ٢ س + ٥ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

المشتقات العليا والتطبيقات الهندسية

(١٠) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س – ٢ ص – ٦ = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، - ١)

.....

(١١) إذا كان ٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢} اثبت أن

ص $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ٢ $(\frac{ء ص}{ء س})^{٢}$ = $\frac{١}{ص}$

.....

(١٢) ** دور أول ٢٠١٣ : إذا كان جا س = س ص فاثبت أن

س^{٢} (ص + ص$''$) + ٢ جتا س = ٢ ص

.....

(١٣) * دور أول ٢٠٠٦ : إذا كانت ص = س^{٢} + ٣س + ٢ ، ع = ٣س^{٢} – ٥س + ٤ أوجد قيمة $\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}}$ عند س = ٢ [$-\frac{٤}{٤٩}$]

.....

(١٤) * إذا كان $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٢س – ٣ ، $\frac{ء ص}{ء س}$ = س^{٢} + ١ فأوجد $\frac{ء^{٢} ع}{ء ص^{٢}}$ عند س = ١

.....

(١٥) أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للمنحنى ص = جا٢س – جتا٤س عند النقطة س = صفر

.....

(١٦) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س^{٣} – ٣ س والتي عندها المماس للمنحنى // محور السينات

(١٧) إذا كان المستقيم ١٣ س – ص – ٧ = ٠ يمس المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب

.....

(١٨) أوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنيي الدالتين ص = أ س^{٣} + ب س ، ص = جـ س^{٢} – س مماسا مشتركا عند النقطة (- ١، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك [$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، ٣س + ص + ١ = ٠]

.....

(١٩) دور أول ٢٠٠٦ : إذا كان المماس للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠ يصنع مثلثا متساوي الساقين مع محوري الإحداثيات في الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس [س + ص = ١٠]

.....

(٢٠) * دور أول ٢٠١٣ : إذا كان المماس للمنحنى ص = س^{٢} يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس

المعدلات الزمنية المرتبطة

(٢١) الاختبار الثالث: تتحرك نقطة على المنحنى س ص= س + ص – ٥ أوجد موقع النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن يساوي معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن

.....

(٢٢) الاختبار الخامس : بدأت نقطة الحركة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} + ٦س – ٢٥ = ٠ من الموقع (٢ ، - ٣) وكانت السرعة الابتدائية للاحداثي السيني ٦سم/ث احسب السرعة الابتدائية للاحداثي الصادي

.....

(٢٣) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٦سم ، وقياس الزاوية بينهما (س) فإذا تغيرت س بمعدل $(\frac{ط}{٩٠})^{ع}$ فى الدقيقة حيث ط = ٣.١٤ فأوجد معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٣٠° (متروك للطالب) [ ]

.....

(٢٤) الاختبار الرابع
اسطوانة تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نق يزداد بمعدل ٠.٢ سم/ث وارتفاعها ع يزداد بمعدل ٠.١سم/ث . أوجد معدل التغير في حجم الاسطوانة عندما نق = ٢سم ، ع = ٥سم .

.....

(٢٥) دور ثان ٢٠٠٦

$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ طريقان متعامدان ، تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{أب}$ من أ بسرعة ٤٠ كم/س وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftarrow{أجـ}$ من النقطة أ بسرعة ٦٠ كم/س أوجد معدل تباعدهما بعد مضي ٢٠ دقيقة من بدء تحرك السيارة الثانية [$\frac{ع_ف}{ع_ن} = ٥٠\sqrt{٢}$ كم/س]

.....

(٢٦) كرة جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى والخارجى فى أى لحظة نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ على الترتيب . فإذا كان طول نصف قطرها الداخلى يزداد بمعدل ١سم/ث ، أوجد معدل تغير طول نصف قطرها الخارجى بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتا ، وذلك عند اللحظة التى فيها نق$_{١}$ = ٣سم ، نق$_{٢}$ = ٩سم (متروك للطالب) [ ]

.....

(٢٧) ** تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٤س – ٢س^{٣} بحيث يتناقص احداثيها الصادى بمعدل ٥ وحدات / ث . أوجد معدل تغير ميل المنحنى عندما س = ٢ [- ٦ وحدات / ث]

.....

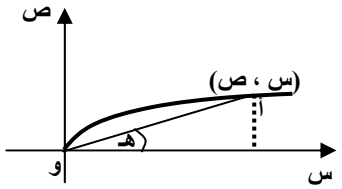
(٢٨) ** $\overline{أب}$ سلم طوله ١٠ أمتار يستند بطرفه أ على أرض أفقية وباحدى نقطه جـ على حافة حائط رأسى ارتفاعه ٦ أمتار فإذا انزلق الطرف السفلى مبتعدا عن الحائط بمعدل ١.٥متر/دقيقة أوجد معدل هبوط طرفه ب عندما يصل إلى حافة الحائط

.....

(٢٩) * دور أول ٢٠١٠: من نقطة الأصل (و) فى مستوى احداثى متعامد تحركت نقطة أ فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق بسرعة ٤متر/دقيقة وبعد دقيقة واحدة تحركت نقطة أخرى ب من نفس النقطة (و) على المستقيم $\overleftarrow{و\ ب}$ الذى معادلته س + $\sqrt{٣}$ ص = ٠ بسرعة مقدارها ٦متر/دقيقة فى الاتجاه الذى يجعل أ $\hat{و}$ ب حادة أوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد دقيقتين من تحرك ب [٥متر/دقيقة]

.....

(٣٠) * دور أول ٢٠١٣ : فى الشكل المقابل :



يتحرك جسيم موضعه (س ، ص) على منحنى الدالة ص = $\sqrt{س}$ وعندما س = ٤ كان الإحداثى الصادى لموضع الجسيم يتزايد بمعدل ١سم/ث
(١) ماهو معدل تغير الإحداثى السينى عند هذه اللحظة ؟
(٢) ماهو معدل تغير المسافة بين نقطة الأصل والجسيم عند نفس اللحظة ؟
(٣) ماهو معدل تغير زاوية الميل هـ عند نفس اللحظة ؟

.....

ـــــــ القيم العظمى والقيم الصغرى ورسم الدوال ـــــــ

(٣١) أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة ص = س^{٣} − ١٢ س في الفترة [- ١ ، ٤]

.....

(٣٢) دور أول ٢٠١٣ : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة

ص = $\frac{س}{س^{٢}+١}$ ، س ∈ [صفر ، ٢]

.....

(٣٣) * أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة
ص = س^{٢} − ٤|س| ، س ∈ [- ١ ، ٣] متروك للطالب

.....

(٣٤) * أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة

د(س) = $\frac{١}{٣}$ س - $\sqrt[٣]{س}$ ، س ∈ [- ١ ، ٨] متروك للطالب

.....

(٣٥) عين فترات التزايد والتناقص ونقط القيم العظمى المحلية ونقط القيم الصغرى المحلية وفترات التحدب ونقط الانقلاب للدالة
د(س) = س^{٣} − ٣ س + ٢ ثم ارسم منحنى الدالة .

.....

(٣٦) مثال٢ محلول صـ٨٨ـ
ارسم شكلا لمنحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٣] إذا علمت المعلومات التالية :
١- د(١) = ٠ ، د(٣) = ٤
٢- د/ (س) > ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]
٣- د// (س) < ٠ لكل س ∈ [١ ، ٣]

.....

(٣٧) الاختبار الأول : المنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س له نقطة انقلاب عند النقطة (٣ ، - ٩) أوجد :
أولا : قيمة كل من أ ، ب ثانيا :موقع القيم العظمى والصغرى المحلية له

.....

(٣٨) الاختبار الثاني : إذا علم أن الدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة عند (١ ، ٤) أوجد قيمة كل من أ ، ب وحدد نوع النقطة

.....

(٣٩) اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين :
(١) إذا كانت جـ نقطة حرجة للدالة د وكانت د//(جـ) < ٠ فإن (جـ ، د (جـ))
(أ) صغرى محلية (ب) عظمى محلية (جـ) انقلاب
(٢) الدالة د(س) = س (س − ٣)^{٢} محدبة لأسفل في الفترة
(أ)]٢ ، ∞ [(ب)] ٣ ، ∞ [(جـ)]- ∞ ، ٢ [

.....

(٤٠) الاختبار الثاني
وعاء اسطواني مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ط سم^{٣} أوجد أبعاده التي تجعل مساحته السطحية أقل مايمكن [نق = ٢٠سم ، ع = ٢٠سم]

.....

(٤١) مايو٩٨ : متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال جميع أحرفه ١٢٠سم . أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر مايمكن [١٠سم ، ١٠سم، ١٠سم]

.....

(٤٢) " أغسطس٩٨" : نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدي المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠سم . أوجد بعدي المستطيل التي تجعل

مساحة النافذة أكبر مايمكن . [٣٢سم ، ٢٤سم]

.....

(٤٣) الاختبار الثالث

إذا كانت المقاومة بثقل الكجم المؤثرة على قطار تحرك بسرعة ع كم/س تتعين بالعلاقة م = $\frac{١٠}{ع}$ + ١٠ ع أوجد أصغر قيمة للمقاومة

.....

(٤٤) مستقيم معادلته ٣ س – ص + ٣ = ٠ ، النقطتان أ (٤ ، ٢) ، ب (– ١ ، – ٣) . أوجد احداثيي النقطة جـ الواقعة على المستقيم المعلوم بحيث يكون (جـ أ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} قيمة صغرى [جـ (– ٠.٩ ، – ٠.٣)]

.....

(٤٥) دور أول ٢٠٠٧ : مثلث متساوى الساقين محيطه ٣٠سم ، أوجد أطوال أضلاعه لكى تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

.....

(٤٦) ** دور أول ٢٠١٣ : أوجد النقط على منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$ والتى يكون ميل المماس عندها أصغر ما يمكن وأيضا النقط التى يكون ميل المماس عندها أكبر ما يمكن

.....

(٤٧) مسألة (٣) من تمارين (٤ – ٢) صـ٩٢ـ

إذا كانت س > ٠ اثبت أن س + $\frac{١}{س}$ ≥ ٢

.....

(٤٨) أوجد معادله المستقيم الذي يمر بالنقطه (٢ ، ٥) ويصنع مع محوري الإحداثيات مثلثا ذو أصغر مساحة وليست أكبر مساحة

التكـــــامل

(٤٩) الاختبار الخامس : منحنى يمر بنقطة الأصل وميل العمودي عند أي نقطة هو $\frac{-١}{٣ س^{٢} + ٢ س}$ أوجد معادلة المنحنى

.....

(٥٠) الاختبار الثاني : إذا علم أن $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = س^{٢} – ١ عند أي نقطة من نقط المنحنى ص = د(س) أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمس المستقيم س + ١٢ص = جـ عند النقطة (١ ، ١)

.....

(٥١) إذا كان $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = ٦س – ٦ عند أي نقطة على المنحنى ص = د(س) وكانت النقطة (– ١ ، ١٠) نقطة عظمى محلية أوجد معادلة المنحنى

.....

دور أول ٢٠١٣

إذا كان د$''$(س) = = ٦س – ٤ عند أي نقطة على المنحنى ص = د(س) وكان هذا المنحنى يمر بالنقطة (١ ، – ٥) وله قيمة صغرى محلية عند س = ٣ فأوجد معادلة هذا المنحنى وأوجد القيمة العظمى المحلية له

.....

(٥٢) " مثال٦ محلول صـ١١١ـ" دور أول ٢٠٠٦

إذا كان ميل المماس للمنحنى يعطى بالعلاقة $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣س^{٢} – ٦س – ٩ وكان للمنحنى قيمة عظمى محلية قدرها ١٠ أوجد معادلة المنحنى وأوجد القيمة الصغرى المحلية إن وجدت .

.....

(٥٣) مثال٥ محلو ل صـ١١٠ـ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س)

إذا كان $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٢ س - ٣}{٥ - ٢ ص}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

.....

(٥٤) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{\sqrt{ص - ٣}}{\sqrt{س + ٢}}$

وكان المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

.....

(٥٥) الاختبار الخامس

خزان فارغ سعته ٦متر مكعب يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢) م^{٣}/ دقيقة حيث ن الزمن أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

.....

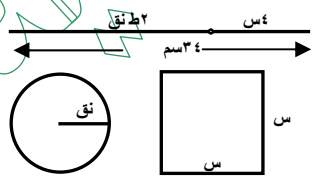
(٥٦) دور ثان ٢٠٠٦ – الاختبار الثاني

إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير بقاع الإناء ، فإذا كان حجم السائل في الإناء يتغير بمعدل (٠.٤ ن – ٤٠) سم^{٣}/ث حيث ن الزمن بالثانية وكان حجم الإناء بعد ٣٠ ثانية من بدء التسرب ٩٨٠ سم^{٣} أوجد سعة الإناء وبين بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغا [٢٠٠٠سم^{٣} ، ١٠٠ثانية]

.....

مسائل من تمارين(٤ – ٢) على تطبيقات القيم العظمى والصغرى صـ ٩٢ ـ

مسألة ١٢ صـ٩٤ـ



م = س^{٢} + ط نق^{٢} ..... (١)

٤ س + ٢ ط نق = ٣٤

نق = $\frac{١٧ - ٢ س}{ط}$ ..... (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) ثم نكمل الحل

.....

مسألة (٧) صـ٩٤ـ

	عدد الأجهزة	ربح الجهاز الواحد
قبل الزيادة	٥٠	٣٠ جنيه
نفرض أن عدد الأجهزة الزيادة = س ربح الجهاز الواحد يقل ٥٠ قرش عن كل جهاز زيادة		
بعد الزيادة	٥٠ + س	٣٠ - $\frac{١}{٢}$ س
الربح ر = (٥٠ + س) (٣٠ - $\frac{١}{٢}$ س) الجواب [س = ٥ أجهزة زيادة]		

.....

مسألة (١٨) صـ٩٥ـ

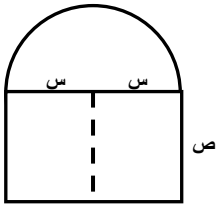
م = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

م = ٢س ص + $\frac{١}{٢}$ ط س^{٢} ..... (١)

محيط النافذة = ٦

٢س + ٢ص + ط س = ٦

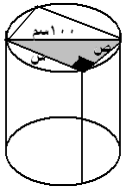
ص = ٣ – س - $\frac{١}{٢}$ ط س ..... (٢) **ثم نكمل**



الجواب [نق = $\frac{٦}{ط + ٤}$]

.....

مسألة (١٩) صـ٩٥



ق α س^{٢} ص

ق = أ س ص^{٢} ..... (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠^{٢}

ص^{٢} = ١٠٠٠٠ – س^{٢} ..... (٢) **ثم نكمل**

الشكل	المساحة	المحيط
المربع	ل^{٢}	٤ ل
المستطيل	الطول × العرض	٢ × (الطول + العرض)
الدائرة	ط نق^{٢}	٢ ط نق
المثلث	$\frac{١}{٢}$ ق × ع = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ	مجموع أطوال أضلاعه

المجسم	المساحة الجانبية (م ج)	المساحة الكلية (م ك)	الحجم
متوازى المستطيلات أبعاده س ، ص ، ع	٢ (س +ص) × ع	٢(س ص + ص ع + ع س)	س ص ع
مكعب طول حرفه س	٤س^{٢}	٦س^{٢}	س^{٣}
الاسطوانة	٢ط نق ع	٢ط نق ع + ٢ط نق^{٢}	ط نق^{٢} ع
الكرة	٤ط نق^{٢}		$\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

الحلول الكاملة للتمارين

(١)

١. $\frac{ع}{ع س}(س^{٥}) = ٥ س^{٤}$

٢. $\frac{ع}{ع س}(ص^{٥}) = ٥ص^{٤} \frac{ع ص}{ع س}$

٣. $\frac{ع}{ع س}(٣س-٧)^{٥} = ٥(٣س-٧)^{٤} \times ٣ = ١٥(٣س-٧)^{٤}$

٤. $\frac{ع}{ع س}(٧ س) = ٧$

٥. $\frac{ع}{ع س}(٥ ص) = ٥\frac{ع ص}{ع س}$

٦. $\frac{ع}{ع س}(جا س) = جتا س$

٧. $\frac{ع}{ع س}(جتا س) = -جا س$

٨. $\frac{ع}{ع س}(ظا س) = قا^{٢} س$

٩. $\frac{ع}{ع س}[جا(٥س+٣)] = ٥جتا(٥س+٣)$

١٠. $\frac{ع}{ع س}(ظا ٧ س) = ٧ قا^{٢} ٧س$

١١. $\frac{ع}{ع س}(\frac{١}{س}) = -\frac{١}{س^{٢}}$

١٢. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

١٣. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt{ص}) = (\frac{١}{٢\sqrt{ص}})\frac{ع ص}{ع س}$

١٤. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt[٣]{ص^{٢}}) = \frac{ع}{ع س}(ص^{\frac{٢}{٣}}) =$

$= \frac{٢}{٣} ص^{-\frac{١}{٣}} \frac{ع ص}{ع س}$

١٥. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt{٥ س^{٢} + ٣ س}) = \frac{١ \times (١٠ س + ٣)}{٢\sqrt{٥ س^{٢} + ٣ س}}$

١٦. $\frac{ع}{ع س}(س^{٢} + ٥ س ص + ص^{٣})$

$= ٢س + ٥س \times \frac{ع ص}{ع س} + ص \times ٥ + ٣ص^{٢} \frac{ع ص}{ع س}$

$= ٢س + ٥س \frac{ع ص}{ع س} + ٥ص + ص^{٢} \frac{ع ص}{ع س}$

١٧. $\frac{ع}{ع س}[جا(س + ص)]$

$= (١ + \frac{ع ص}{ع س}) جتا(س + ص)$

١٨. $\frac{ع}{ع س}(س^{٢} + ٣ س جا ٢ س)$

$= ٢س + ٣س \times ٢جتا٢س + جا٢س \times ٣$

$= ٢س + ٦س جتا٢س + ٣جا٢س$

.....

(٢)

١. $\int ٧ . ع س = ٧ س + ث$

٢. $\int ٧ س . ع س = \frac{٧}{٢} س^{٢} + ث$

٣. $\int ص' . ع س = ص + ث$

٤. $\int ٧ ص' . ع س = ٧ ص + ث$

٥. $\int جا(٥ س-٣) . ع س = -\frac{١}{٥} جتا(٥ س-٣)$

٦. $\int (٥ س-٣)^{٧} . ع س = \frac{(٥ س - ٣)^{٨}}{٨ \times ٥}$

$= \frac{١}{٤٠}(٥س - ٣)^{٨} + ث$

٧. $\int قا^{٢}(٣ س - ٥) . ع س = \frac{١}{٣} ظا(٣س - ٥) + ث$

٨. $\int \frac{ع س}{\sqrt[٥]{٢ س + ٩}} . ع س =$

$= \int (٢ س + ٩)^{-\frac{١}{٥}} . ع س$

$= \frac{(٢ س + ٩)^{\frac{٤}{٥}}}{\frac{٤}{٥} \times ٢} + ث$

$= \frac{٥}{٨}(٢ س + ٩)^{\frac{٤}{٥}} + ث$

٩. $\int (جا ٢س + جتا س) . ع س =$

$= -\frac{١}{٢} جتا ٢س + جا س + ث$

١٠. $\int (جتا^{٢} س + جا س) . ع س$

$= \int (\frac{١}{٢})[(١ + جتا ٢س) + جا س] . ع س$

$= \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤} جا٢س - جتا س + ث$

١١. $\int (جا س + جتا س)^{٢} . ع س$

$= \int جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢جاس جتاس) . ع س$

$= \int (١ + جا٢س) . ع س$

$= س - \frac{١}{٢} جتا٢س + ث$

١٢. $\int س^{١٠} (\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})^{٥} . ع س$

مدرسة الوسام

$= \int (٢س + ٣)^{٥} \, ع س = \frac{(٢س + ٣)^{٦}}{١٢} + ث$

١٣. $\int \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} \, ع س$

$= \int \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)} \, ع س$

$= \int (س + ٢) \, ع س = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س + ث$

١٤. $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, ع س$

$= \int \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٣)} \, ع س$

$= \int (س^{٢} + ٣س + ٩) \, ع س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٩س + ث$

١٥. $\int (٣س^{٢} - ٢)(٢س + ٥) \, ع س$

$= \int (٦س^{٣} + ١٥س^{٢} - ٤س - ١٠) \, ع س$

$= \frac{٣}{٢} س^{٤} + ٥س^{٣} - ٢س^{٢} - ١٠س + ث$

١٦. $\int جا س \, جتا س \, ع س$

$= \frac{١}{٢} \int ٢ جا س \, جتا س \, ع س$

$= \frac{١}{٢} جا^{٢} س \, ع س = -\frac{١}{٤} جتا ٢س + ث$

١٧. $\int \frac{جتا^{٢} س}{١ + جا س} \, ع س$

$= \int \frac{(١ - جا^{٢} س)}{١ + جا س} \, ع س$

$= \int \frac{(١ - جا س)(١ + جا س)}{١ + جا س} \, ع س$

$= \int (١ - جا س) \, ع س = س + جتا س + ث$

١٨. $\int س \sqrt[٣]{س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}}} \, ع س$

$= \int \sqrt[٣]{٦س + ٥} \, ع س = \int (٦س + ٥)^{\frac{١}{٣}} \, ع س$

$= \frac{١}{٨} (٦س + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

١٩. $\int جتا(\frac{س}{٢} + ٣) \, ع س$

$= ٢ جا(\frac{س}{٢} + ٣) + ث$

٢٠. $\int (س + ١)(٢س + ١)^{٩} \, ع س$

$= \frac{١}{٢} \int (٢س + ٢)(٢س + ١)^{٩} \, ع س$

$= \frac{١}{٢} \int [(٢س+١)+١](٢س+١)^{٩} \, ع س$

$= \frac{١}{٢} \int [(٢س+١)^{١٠} + (٢س+١)^{٩}] \, ع س$

$= \frac{(٢س+١)^{١١}}{٤٤} + \frac{(٢س+١)^{١٠}}{٤٠} + ث$

٢١. $\int \frac{٢س + ٣}{(٢س + ١)^{٣}} \, ع س$

$= \int \frac{٢س + ١ + ٢}{(٢س + ١)^{٣}} \, ع س$

$= \int (\frac{٢س + ١}{(٢س + ١)^{٣}} + \frac{٢}{(٢س + ١)^{٣}}) \, ع س$

$= \int [(٢س+١)^{-٢} + ٢(٢س+١)^{-٣}] \, ع س$

$= \frac{(٢س+١)^{-١}}{-٢} + \frac{(٢س+١)^{-٢}}{-٢} + ث$

٢٢. $\int \frac{س + ١}{(٣س + ١)^{٥}} \, ع س$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣س + ٣}{(٣س + ١)^{٥}} \, ع س$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣س + ١ + ٢}{(٣س + ١)^{٥}} \, ع س$

$= \frac{١}{٣} \int [\frac{٣س + ١}{(٣س + ١)^{٥}} + \frac{٢}{(٣س + ١)^{٥}}] \, ع س$

$= \frac{١}{٣} \int [(٣س+١)^{-٤} + ٢(٣س+١)^{-٥}] \, ع س$

$= \frac{١}{٣} [\frac{(٣س+١)^{-٣}}{-٣ \times ٣} + \frac{٢(٣س+١)^{-٤}}{-٤ \times ٣}]$

٢٣. $\int ٣س \sqrt[٣]{٣س + ١} \, ع س$

$= \int (٣س + ١ - ١) \sqrt[٣]{٣س + ١} \, ع س$

$= \int (٣س + ١) \sqrt[٣]{٣س + ١} \, ع س$

$- \int \sqrt[٣]{٣س + ١} \, ع س =$

$= \int (٣س+١)^{\frac{٤}{٣}} ع س - \int (٣س+١)^{\frac{١}{٣}} ع س$

$= \frac{(٣س+١)^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣} \times ٣} - \frac{(٣س+١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times ٣} + ث$

$= \frac{١}{٧} (٣س+١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{١}{٤} (٣س+١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

٢٤. $\int \sqrt[٥]{٢٥ س^{٢} - ٣٠ س + ٩}$. ع س

$= \int \sqrt[٥]{(٥س-٣)^{٢}}$. ع س

$= \int (٥ س - ٣)^{\frac{٢}{٥}}$. ع س

$= \frac{(٥ س - ٣)^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥} \times ٥} + ث = \frac{١}{٧} (٥ س - ٣)^{\frac{٧}{٥}} + ث$

٢٥. $\int \frac{س^{٢} - ٦ س}{(س - ٣)^{٤}}$. ع س

$= \int \frac{س^{٢} - ٦ س + ٩ - ٩}{(س - ٣)^{٤}}$. ع س

$= \int \frac{(س - ٣)^{٢} - ٩}{(س - ٣)^{٤}}$. ع س

$= \int [\frac{(س - ٣)^{٢}}{(س - ٣)^{٤}} - \frac{٩}{(س - ٣)^{٤}}]$. ع س

$= \int [(س - ٣)^{-٢} - ٩(س - ٣)^{-٤}]$. ع س

$= -(س - ٣)^{-١} + ٣(س - ٣)^{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{(س - ٣)} + \frac{٣}{(س - ٣)^{٣}}$

٢٦. $\int$ قا$^{٢}(\frac{س}{٢} - ٣)$. ع س

$= ٢$ظا$(\frac{س}{٢} - ٣) + ث$

٢٧. $\int س \sqrt[٣]{٣ س - ١}$. ع س

$= \frac{١}{٣} \int ٣س \sqrt[٣]{٣ س - ١}$. ع س

$= \frac{١}{٣} \int (٣س - ١ + ١) \sqrt[٣]{٣ س - ١}$. ع س

$= \frac{١}{٣} \int [(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}} + (٣س - ١)^{\frac{١}{٣}}]$. ع س

$= \frac{١}{٣} [\frac{(٣س - ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٧} + \frac{(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٤}] + ث$

$= [\frac{(٣س - ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٢١} + \frac{(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{١٢}] + ث$

٢٨. $\int$ قا$^{٢}\frac{ط}{٢}$. ع س $= (قا^{٢}\frac{ط}{٢})$ س $+ ث$

٢٩. $\int \sqrt[٣]{س^{٢} + س^{٢} - س - ١}$. ع س

$= \int \sqrt[٣]{س^{٢}(س + ١) - (س + ١)}$. ع س

$= \int \sqrt[٣]{(س^{٢} - ١)(س + ١)}$. ع س

$= \int (س + ١) \sqrt[٣]{س - ١}$. ع س

$= \int (س - ١ + ٢)(س - ١)^{\frac{١}{٣}}$. ع س

$= \int [(س - ١)^{\frac{٣}{٣}} + ٢(س - ١)^{\frac{١}{٣}}]$. ع س

$= \frac{٢}{٥}(س - ١)^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٤}{٣}(س - ١)^{\frac{٣}{٣}} + ث$

---

(٣) د(س) $= \frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{س^{٢} + س}{(س + ١)} & ، \quad س > -١ \\ \frac{س^{٢} + س}{-(س + ١)} & ، \quad س < -١ \end{cases}$$

د(-١$^{+}$) $= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{(س + ١)} =$

$= \lim_{س \to -١}$ س $= -١$

د(-١$^{-}$) $= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{-(س + ١)} =$

$= \lim_{س \to -١} (-س) = ١$

د(-١$^{+}$) $\neq$ د(-١$^{-}$)

$\lim_{س \to -١}$ د(س) غير موجودة

---

(٤)

د(١$^{+}$) $= \lim_{س \to ١}$ ظا$(\frac{ط س}{٤}) =$ ظا$\frac{ط}{٤} = ١$

د(١$^{-}$) $= \lim_{س \to ١} \frac{جا(س - ١)}{(س - ١)} =$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} = ١$

د(١$^{+}$) = د(١$^{-}$) = ١ $\Leftarrow \lim_{س \to ١}$ د(س) = ١

(٥) د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} & ، \ س \neq ٢ \\ ٣ & ، \ س = ٢ \end{cases}$$

د (٢) = ٣

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \ د(س) =$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} \times$$

$$\frac{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(٣س - ٢) - (س + ٢)}{(س - ٢)\left[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}\right]}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٤)}{(س - ٢)\left[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}\right]}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٢(س - ٢)}{(س - ٢)\left[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}\right]}$$

$$= \frac{٢}{٢ + ٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therfore \ \text{نهـــا}_{س \to ٢} \ د(س) = \frac{١}{٢} \neq د(٢)$$

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢

.....

(٦) د(س) =
$$\begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & ، \ س \leq ٢ \\ س + ٥ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

د(٢$^{+}$) = $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ (٢س^{٢} − ١) = ٧

د(٢$^{-}$) = $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ (س + ٥) = ٧

د(٢$^{+}$) = د(٢$^{-}$) = ٧

$\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ .....(١)

د(٢) = ٢ × ٢^{٢} − ١ = ٧ .....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ د(س) = د(٢)

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

$$د'(٢^{+}) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠^{+}} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$$

د(٢) = ٧

د(٢+هـ) = ٢(٢+هـ)^{٢} − ١

= ٧ + ٨هـ + هـ^{٢}

$$د'(٢^{+}) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{٧ + ٨هـ + هـ^{٢} - ٧}{هـ} =$$

$$\text{نهـــا}_{هـ \to ٠}(٨ + هـ) = ٨$$

$$د'(٢^{-}) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠^{-}} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$$

د(٢ + هـ) = ٢ + هـ + ٥ = ٧ + هـ

$$د'(٢^{-}) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{٧ + هـ - ٧}{هـ} = ١$$

د'(٢$^{+}$) ≠ د'(٢$^{-}$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

.....

(٧) د(س) =
$$\begin{cases} س + ١ & ، \ س > ١ \\ ٣ - أس^{٢} & ، \ س \leq ١ \end{cases}$$

∵ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د'(١$^{+}$) ≠ د'(١$^{-}$)

$\text{نهـــا}_{س \to ١}$(٣ − أس^{٢}) = $\text{نهـــا}_{س \to ١}$(س + ١)

٣ − أ = ٢ ⟸ أ = ١

∴ د(س) =
$$\begin{cases} س + ١ & ، \ س > ١ \\ ٣ - س^{٢} & ، \ س \leq ١ \end{cases}$$

ثم نكمل الحل

.....

(٨) د(س) =
$$\begin{cases} أس + ب & ، \ س \leq ٢ \\ س^{٢} & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

∵ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ فهي متصلة عند س = ٢

د(٢$^{+}$) = د(٢$^{-}$)

$\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ (أس + ب) = $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ س^{٢}

٢أ + ب = ٤ ..... (١)

د'(س) =
$$\begin{cases} أ & ، \ س < ٢ \\ ٢س & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

∵ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

د'(٢$^{+}$) ≠ د'(٢$^{-}$)

أ = ٢ × ٢ = ٤ ⟸ أ = ٤

بالتعويض في (١) ⟸ ب = − ٤

.....

(٩) د(س) =
$$\begin{cases} أس^{٢} + بس + جـ & ، \ س \leq ٠ \\ ٢س + ٥ & ، \ س > ٠ \end{cases}$$

د/ (س) = { ٢أ س + ب ، س ≤ ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

د// (س) = { ٢أ ، س ≤ ٠ ؛ صفر ، س > ٠ }

الدالة قابلة للاشتقاق مرتين

د// (٠+) = د// (٠-)

٢ أ = ٠ ⇐ أ = ٠

د/ (٠+) = د/ (٠-) ⇐ ب = ٢

الدالة قابلة للاشتقاق ⇐ الدالة متصلة

د (٠+) = د (٠-) ⇐ جـ = ٥

.....

(١٠) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س – ٢ص – ٦ = ٠

$\frac{ع}{ع س}$ (س^{٢} + ص^{٢} + ٢س – ٢ص – ٦)

٢س + ٢ص $\frac{ع ص}{ع س}$ + ٢ – ٢ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

(٢ص – ٢) $\frac{ع ص}{ع س}$ = – ٢س – ٢

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{- ٢ س - ٢}{٢ ص - ٢}$

عند النقطة (١ ، – ١)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{- ٢ \times ١ + - ٢}{٢ \times - ١ - ٢}$ = ١

ميل المماس = ١

ظاهـ = ١ ⇐ هـ = ٤٥°

.....

(١١) ٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢}

بإجراء اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

٦ص $\frac{ع ٢ ص}{ع س}$ = ٦ س بالقسمة على ٦

ص $\frac{ع ٢ ص}{ع س}$ = س

ص^{٢} × $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ + $\frac{ع ص}{ع س}$ × ٢ص $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١

ص^{٢} $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ + ٢ص ($\frac{ع ص}{ع س}$)^{٢} = ١

بالقسمة على ص

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ + ٢($\frac{ع ص}{ع س}$)^{٢} = $\frac{١}{ص}$

.....

(١٢) جا س = س ص ..... (١)

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ س

جتا س = س ص/ + ص ..... (٢)

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ س

– جا س = س ص// + ص/ × ١ + ص/

– جا س = س ص// + ٢ ص/ ..... (٣)

بجمع (١) ، (٣)

٠ = س ص// + ٢ص/ + س ص

بالضرب فى س

س^{٢} ص// + ٢س ص/ + س^{٢} ص = ٠ ..... (٤)

بضرب (٢) فى ٢

٢جتا س = ٢س ص/ + ٢ص ..... (٥)

بجمع (٤) ، (٥) ينتج أن

س^{٢} ص// + ٢س ص/ + س^{٢} ص + ٢ جتا س =

٢ س ص/ + ٢ص

س^{٢} ص// + س^{٢} ص + ٢ جتا س = ٢ص

س^{٢} (ص// + ص) + ٢ جتا س = ٢ص

.....

(١٣) ص = س^{٢} + ٣س + ٢

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ س + ٣ ..... (١)

ع = ٣س^{٢} – ٥س + ٤

$\frac{ع ع}{ع س}$ = ٦ س – ٥ ..... (٢)

$\frac{ع ص}{ع ع}$ = $\frac{ع ص}{ع س}$. $\frac{ع س}{ع ع}$ ..... (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) في (٣)

$\frac{ع ص}{ع ع}$ = $\frac{٢ س + ٣}{٦ س - ٥}$ ..... (٤)

$\frac{ع^{٢} ص}{ع ع^{٢}}$ = $\frac{ع}{ع ع}$ ($\frac{ع ص}{ع ع}$) = $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{ع ص}{ع ع}$) × $\frac{ع س}{ع ع}$

= $\frac{(٦س-٥) \times ٢ - (٢س+٣) \times ٦}{(٦ س - ٥)^{٢}}$ × $\frac{١}{٦س-٥}$

= $\frac{- ٢٨}{(٦ س - ٥)^{٣}}$

عند س = ٢ $\frac{ع^{٢} ص}{ع ع^{٢}}$ = $\frac{- ٢٨}{٣٤٣}$ = $\frac{- ٤}{٤٩}$

.....

(١٤) $\frac{ع^{٢} ع}{ع ص^{٢}}$ = $\frac{ع}{ع ص}$ ($\frac{ع ع}{ع ص}$) ..... (١)

$\frac{ع ع}{ع ص}$ = $\frac{ع ع}{ع س}$ × $\frac{ع س}{ع ص}$

= (٢س - ٣)($\frac{١}{س^{٢} + ١}$) = $\frac{٢س - ٣}{س^{٢} + ١}$

بالتعويض فى (١)

$\frac{ع^{٢} ع}{ع ص^{٢}}$ = $\frac{ع}{ع ص}$ ($\frac{٢س - ٣}{س^{٢} + ١}$)

= $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{٢س - ٣}{س^{٢} + ١}$) × $\frac{ع س}{ع ص}$ =

$\frac{(س^{٢} + ١) \times ٢ - (٢س - ٣) \times ٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ × $\frac{١}{س^{٢} + ١}$

$= \frac{-٢س^{٢} + ٦س + ٢}{(س^{٢} + ١)^{٣}} = \frac{-٢(١)^{٢} + ٦ \times ١ + ٢}{[(١)^{٢} + ١]^{٣}} = \frac{٣}{٤}$

.....

(١٥) ص= جا٢س – جتا٤س .....(١)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ جتا٢س + ٤جا٤س

عند س = صفر

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢جتا ٠ +٤ جا ٠ = ٢

ميل المماس م = ٢

بالتعويض في (١) عن س = ٠

ص = جا ٠ – جتا ٠ = – ١

نقطة التماس = (٠ ، – ١)

معادلة المماس هي(ص – ص١) = م (س – س١)

ص + ١ = ٢ س ⟸ ٢س– ص– ١= ٠

ميل العمودي = $-\frac{١}{٢}$

معادلة العمودي ص + ١ = $-\frac{١}{٢}$ س

.....

(١٦) ص = س^{٣} – ٣ س ..... (١)

ص/ = ٣س^{٢} -٣

المماس يوازي محور السينات ص/ = ٠

٣س^{٢} -٣ = ٠ ⟸ س^{٢} -١ = ٠

س = $\pm$ ١ بالتعويض في (١)

عند س = ١ ⟸ ص = – ٢

عند س = – ١ ⟸ ص = ٢

النقط المطلوبة (١ ، – ٢) ، (– ١ ، ٢)

.....

(١٧) بالتعويض بالنقطة (١ ، ٦)

٦ = أ + ب ..... (١)

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

عند النقطة (١ ، ٦)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ أ × (١)^{٢} + ٢ ب ×١

ميل المماس = ٣ أ + ٢ ب ..... (٢)

معادلة المماس ١٣ س – ص – ٧ = ٠

ميل المماس= – $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ميل المماس = ١٣ ..... (٣)

من (٢) ، (٣)

٣ أ + ٢ ب = ١٣ ..... (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٤) ينتج أن أ = ١ ، ب = ٥

.....

(١٨) ص = أ س^{٣} + ب س ..... (١)

ص = جـ س^{٢} – س ..... (٢)

بالتعويض بالنقطة (-١ ، ٢) في (١)

- أ – ب = ٢

أ + ب = – ٢ ..... (٣)

بالتعويض بالنقطة (-١ ، ٢) في (٢)

٢ = جـ + ١

جـ = ١

من (١) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ أ س^{٢} + ب

عند النقطة (- ١ ، ٢)

ميل المماس م = ٣ أ + ب ..... (٤)

من (٢) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ جـ س – ١

عند النقطة (- ١ ، ٢)

ميل المماس م = – ٢جـ - ١ = -٢×١-١

ميل المماس م = – ٣ ..... (٥)

من (٤) ، (٥) ٣ أ + ب = – ٣ ..... (٦)

بحل المعادلتين (٣)، (٦) ينتج أن أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = $-\frac{٣}{٢}$

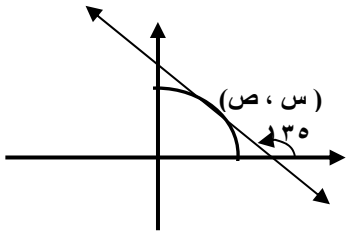
معادلة المماس ص- ص١ = م (س- س١)

ص – ٢ = – ٣ (س + ١)

ص – ٢ = – ٣س -٣ ومنها ٣س + ص + ١ = ٠

.....

(١٩) دور أول ٢٠٠٦



ميل المماس م = ظا ١٣٥° = – ١ ... (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠ ..... (٢)

٢ س + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠ ..... (٣)

بالتعويض من (١) في (٣) ينتج أن ٢س – ٢ص = ٠

س = ص ..... (٤)

بحل المعادلتين (٢) ، (٤)

س^{٢} + س^{٢} = ٥٠ ⟸ س = ٥

بالتعويض في (٤) ص = ٥

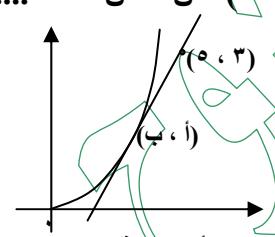
نقطة التماس = (٥ ، ٥)

معادلة المماس ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٥ = – ١ (س – ٥) ومنها س + ص = ١٠

.....

(٢٠) ص = س^{٢} ..... (١)



نفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

بالتعويض فى (١)

ب = أ^{٢} ..... (٢)

$\frac{ع ص}{ع س} = ٢ س$

عند النقطة (أ ، ب)

ميل المماس = ٢ أ

وأيضا ميل المماس = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ب - ٥}{أ - ٣}$

$\frac{ب - ٥}{أ - ٣} = ٢ أ$

ب – ٥ = ٢ أ^{٢} – ٦ أ ..... (٣)

بحل (٢) ، (٣)

أ^{٢} – ٥ = ٢ أ^{٢} – ٦ أ

٠ = أ^{٢} – ٦ أ + ٥

(أ - ٥)(أ - ١) = ٠ ومنها أ = ٥ ، أ = ١

بالتعويض فى (٢) ب = ٢٥ ، ب = ١

نقطتى التماس هما (١ ، ١) ، (٥ ، ٢٥)

عند النقطة (١ ، ١)	عند النقطة (٥ ، ٢٥)
ميل المماس = ٢	ميل المماس = ١٠
معادلة المماس هى	معادلة المماس هى
ص– ص$_{١}$= م(س – س$_{١}$)	ص– ص$_{١}$= م(س – س$_{١}$)
ص – ١ = ٢(س – ١)	ص– ٢٥ =١٠(س – ٥)

.....

(٢١) $\frac{ع س}{ع ن} = \frac{ع ص}{ع ن}$ معطى والمطلوب: (س ، ص)

س ص = س + ص – ٥ ..... (١)

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ ن

$س\frac{ع ص}{ع ن} + ص\frac{ع س}{ع ن} = \frac{ع س}{ع ن} + \frac{ع ص}{ع ن}$

$س\frac{ع س}{ع ن} + ص\frac{ع س}{ع ن} = \frac{ع س}{ع ن} + \frac{ع س}{ع ن}$

بالقسمة على $\frac{ع س}{ع ن}$ س + ص = ١ + ١

س + ص = ٢

س = ٢ – ص .....(٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

(٢- ص) ص = ٢ – ص – ص – ٥

٢ ص – ص^{٢} = - ٣ × - ١

ص^{٢} – ٢ ص – ٣ = ٠

(ص – ٣) (ص + ١) = ٠

ص = ٣ أ ، ص = - ١

بالتعويض في (٢)

عند ص = ٣ ⟸ س = - ١

عند ص = - ١ ⟸ س = ٣

النقطة (- ١ ، ٣) أو (٣ ، - ١)

.....

(٢٢) س^{٢} + ص^{٢} +٦س–٢٥=٠ ....(١)

$٢س\frac{ع س}{ع ن} + ٢ص\frac{ع ص}{ع ن} + ٦\frac{ع س}{ع ن} = ٠$

..... (٢)

عند بداية الحركة

س = ٢ ، ص = -٣ ، $\frac{ع س}{ع ن} = ٦$

بالتعويض في (٢)

$٢ \times ٢ \times ٦ + ٢ \times - ٣ \times \frac{ع ص}{ع ن} + ٦ \times ٦ = ٠$

$- ٦\frac{ع ص}{ع ن} = - ٦٠ \Leftarrow \frac{ع ص}{ع ن} = ١٠$سم/ث

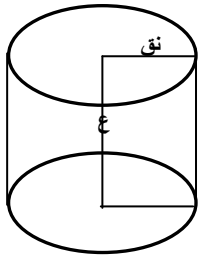
.....

(٢٣) متروك للطالب

.....

(٢٤) $\frac{ع نق}{ع ن} = ٠.٢$ سم/ث ، $\frac{ع ع}{ع ن} = ٠.١$سم/ث ، $\frac{ع ح}{ع ن} = ؟$

نق = ٢ ، ع = ٥سم



ح = ط نق^{٢} ع

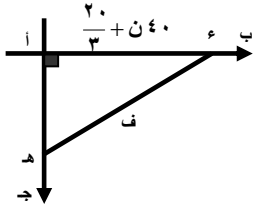
$\frac{ع ح}{ع ن} = ط (نق^{٢} \frac{ع ع}{ع ن} + ع \times ٢ نق \frac{ع نق}{ع ن})$

$= ط (٤ \times ٠.١ + ٢ \times ٢ \times ٥ \times ٠.٢)$

$\frac{ع ح}{ع ن} = ٤.٤$ ط سم^{٣}/ ث

.....

(٢٥) دور ثان ٢٠٠٦



المسافة التي تحركتها السيارة الأولى قبل تحرك السيارة الثانية = $٤٠ \times \frac{١٠}{٦٠} = \frac{٢٠}{٣}$ كم

نفرض أن السيارتان تحركتا معا زمن = ن ساعة

فتكون المسافة التي تحركتها السيارة الأولى من بدء الحركة = أ ء حيث أ ء = ٤٠ن + $\frac{٢٠}{٣}$

مسافة تحرك السيارة الثانية أ هـ = ٦٠ ن

البعد بين السيارتين ء هـ = ف

ف^{٢} = (أ ء)^{٢} + (أ هـ)^{٢}

ف^{٢} = (٤٠ن + $\frac{٢٠}{٣}$)^{٢} + (٦٠ ن)^{٢} ... (١)

ف^{٢} = ٥٢٠٠ ن^{٢} + $\frac{١٦٠٠}{٣}$ ن + $\frac{٤٠٠}{٩}$

$٢ف\frac{ع ف}{ع ن} = ٤٠٠ ١ن + \frac{١٦٠٠}{٣}$ ... (٢)

السيارتان تحركتا معا زمن= $\frac{٢٠}{٦٠} = \frac{١}{٣}$ ساعة

بالتعويض في (١) عن ن = $\frac{١}{٣}$

ف^{٢} = ٨٠٠ ⟸ ف=٢٠$\sqrt{٢}$

بالتعويض في(٢) ن = $\frac{١}{٣}$ ، ف=٢٠$\sqrt{٢}$

٤٠$\sqrt{٢}$ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ١٠٤٠٠×$\frac{١}{٣}$ + $\frac{١٦٠٠}{٣}$

٤٠$\sqrt{٢}$ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٤٠٠٠ ومنها $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٠$\sqrt{٢}$ كم/س

.....

(٢٦) متروك للطالب

.....

(٢٧) المطلوب هو $\frac{ع}{ع ن}$ (ص/)

الحل : ص = ٤س – ٢س^{٣}

ص/ = ٤– ٦س^{٢}

$\frac{ع}{ع ن}$ (ص/) = $\frac{ع}{ع ن}$ (٤– ٦س^{٢})

= – ١٢س $\frac{ع س}{ع ن}$ ..... (١)

ص = ٤س – ٢س^{٣}

$\frac{ع ص}{ع ن}$ = (٤ – ٦س^{٢}) $\frac{ع س}{ع ن}$

– ٥ = (٤ – ٦ × ٤) $\frac{ع س}{ع ن}$

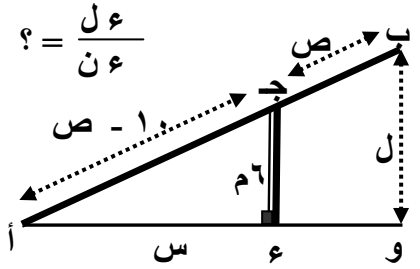
$\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{١}{٤}$ بالتعويض فى (١)

$\frac{ع}{ع ن}$ (ص/) = – ١٢س $\frac{ع س}{ع ن}$

= – ١٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ = – ٦

.....

(٢٨)



فى المثلث أ ع جـ

س^{٢} + ٣٦ = (١٠ – ص)^{٢} .....(١)

س^{٢} + ٣٦ = ١٠٠ – ٢٠ص + ص^{٢}

٢س $\frac{ع س}{ع ن}$ = – ٢٠ $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ٢ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ ..... (٢)

عندما يصل الطرف ب إلى حافة الحائط

ص = ٠ بالتعويض فى(١) ينتج أن س = ٨ ،

بالتعويض فى(٢) $\frac{ع س}{ع ن}$ = ١.٥ ، س = ٨ ، ص = ٠

٢ × ٨ × ١.٥= – ٢٠ $\frac{ع ص}{ع ن}$ ومنها $\frac{ع ص}{ع ن}$ = – ١.٢

من تشابه المثلثين أ ع جـ ، أ و ب

$\frac{٦}{ل}$ = $\frac{١٠ - ص}{١٠}$

ل = $\frac{٦٠}{١٠ - ص}$ = ٦٠ (١٠ – ص)$^{-١}$

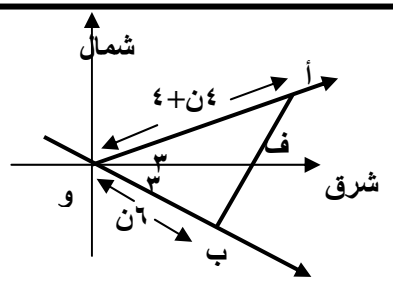
$\frac{ع ل}{ع ن}$ = – ٦٠ (١٠ – ص)$^{-٢}$ × – ١ × $\frac{ع ص}{ع ن}$

$\frac{ع ل}{ع ن}$ = ٦٠(١٠ – ص)$^{-٢}$ × $\frac{ع ص}{ع ن}$

= ٦٠(١٠)$^{-٢}$ × – ١.٢ = – ٠.٧٢م/دقيقة

.....

(٢٩)



(أ ب)^{٢} = (أ و)^{٢} + (ب و)^{٢} – ٢ أ و . ب و جتا ٦٠°

ف^{٢} = (٤ن + ٤)^{٢} + (٦ن)^{٢} – ٢ × ٦ن × (٤ن + ٤) جتا ٦٠°

ف^{٢} = ٢٨ن^{٢} + ٨ن + ١٦ ..... (١)

٢ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٦ن + ٨ ..... (٢)

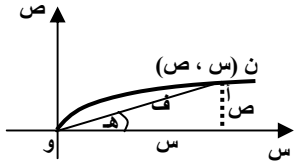
عند ن = ٢ دقيقة بالتعويض فى (١)

ف^{٢} = ١٤٤ ومنها ف = ١٢ بالتعويض فى (٢)

٢ × ١٢ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٦ × ٢ + ٨ ومنها $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥ متر/دقيقة

.....

(٣٠) ص = $\sqrt{س}$



(i) $\frac{ع ص}{ع ن}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ $\frac{ع س}{ع ن}$

$\frac{ع ص}{ع ن}$ = ١ عندما س = ٤

١ = $\frac{١}{٢\sqrt{٤}}$ $\frac{ع س}{ع ن}$ ومنها $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٤سم/ث

(ii) المسافة بين نقطة الأصل والجسيم ف = و ن

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

$\frac{ع ف}{ع ن} = ٢س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ص \frac{ع ص}{ع ن}$ ..... (١)

عند س = ٤ ص = ٢ ، ف = $٢\sqrt{٥}$

بالتعويض فى (١)

$\frac{ع ف}{ع ن} \sqrt{٤} = ٢ \times ٤ \times ٤ + ٢ \times ٢ \times ١$

$\frac{ع ف}{ع ن} = \frac{٩\sqrt{٥}}{٥}$

(iii) ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{س}}{س} = س^{-\frac{١}{٢}}$

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ ن

$قا^{٢} هـ \frac{ع هـ}{ع ن} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} \frac{ع س}{ع ن}$

$(\frac{\sqrt{٥}}{٢})^{٢} \frac{ع هـ}{ع ن} = -\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٨} \times ٤$

$\frac{ع هـ}{ع ن} = (-\frac{١}{٥})^{٦} / ث$

.....

(٣١) ص = $س^{٣} - ١٢$ س ..... (١)

$ص' = ٣س^{٢} - ١٢$

إيجاد النقاط الحرجة للدالة

$ص' = ٠ \Leftarrow ٣ س^{٢} - ١٢ = ٠$

$س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$

بالتعويض في (١)

د(٢) = ٨ − ٢٤ = − ١٦

د(−٢) = − ٨ + ٢٤ = ١٦

د(−١) = − ١ + ١٢ = ١١

د(٤) = ٦٤ − ٤٨ = ١٦

القيمة العظمى المطلقة هي ١٦

القيمة الصغرى المطلقة هي − ١٦

.....

(٣٢) د(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$

$د'(س) = \frac{(س^{٢} + ١) \times ١ - س \times ٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$د'(س) = \frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$د'(س) = ٠$

$١ - س^{٢} = ٠$ ومنها $س = \pm ١$

س = − ١ مرفوض

د(٠) = ٠ ، $د(١) = \frac{١}{٢}$ ، $د(٢) = \frac{٢}{٥}$

القيمة العظمى المطلقة = $\frac{١}{٢}$

القيمة الصغرى المطلقة = ٠

.....

(٣٣) متروك للطالب

.....

(٣٤) متروك للطالب

.....

(٣٥) د(س) = $س^{٣} - ٣$ س + ٢ ..... (١)

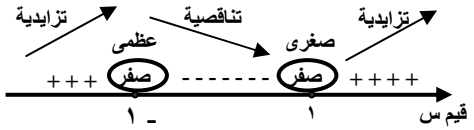
$د'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$د''(س) = ٦$ س

دراسة إشارة الدالة $د'(س)$

$د'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$س = \pm ١$



في الفترة]−١ ، ١[الدالة تناقصية حيث $د'(س) < ٠$

في كل من الفترتين $]-\infty ، -١[$ ، $]١ ، \infty[$

الدالة تزايدية حيث $د'(س) > ٠$

$د(-١) = (-١)^{٣} - ٣ \times (-١) + ٢ = ٤$

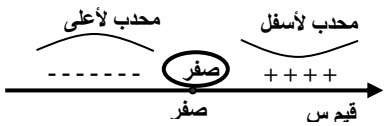
النقطة (− ١ ، ٤) عظمى محلية

$د(١) = (١)^{٣} - ٣ \times ١ + ٢ =$ صفر

النقطة (١ ، ٠) صغرى محلية

دراسة إشارة $د''(س)$

$د''(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$



في الفترة $]-\infty ، ٠[$

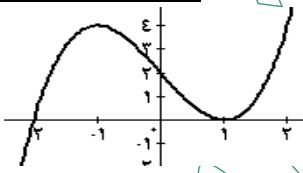
$د''(س) > ٠ \Leftarrow$ المنحنى محدب لأعلى

في الفترة $]٠ ، \infty[$

$د''(س) < ٠ \Leftarrow$ المنحنى محدب لأسفل

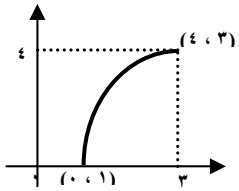
د(٠) = ٢ ⇐ (٠ ، ٢) نقطة انقلاب

س	− ٢	− ١	٠	١	٢
ص	٠	٤	٢	٠	٤



.....

(٣٦)



$د'(س) > ٠$ الدالة تزايدية

$د''(س) > ٠$ المنحنى محدب لأعلى

.....

(٣٧) ∵ (٣ ، ـ ٩) ∈ للمنحنى

∴ فهي تحقق معادلته

ـ٩ = ٢٧ + ٩ أ + ٣ ب

٣أ + ب = ـ ١٢ ..... (١)

ص= س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

ص$^{/}$ = ٣س^{٢} + ٢ أ س + ب

ص$^{//}$ = ٦ س + ٢ أ ..... (٢)

عند نقطة الانقلاب (٣ ، ـ ٩)

ص$^{//}$ = ٠ ، س = ٣

بالتعويض في (٢)

٠ = ١٨ + ٢ أ ⟸ أ = ـ ٩

بالتعويض في (١)

ـ ٢٧ + ب = ـ ١٢ ⟸ ب = ١٥

∴ معادلة المنحنى هي

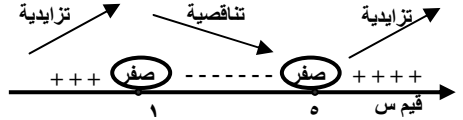
ص = س^{٣} ـ ٩ س^{٢} + ١٥ س

ص$^{/}$ = ٣ س^{٢} ـ ١٨ س + ١٥

ص$^{/}$ = ٠ ⟸ ٣س^{٢} ـ ١٨س + ١٥ = ٠

س^{٢} ـ ٦ س + ٥ = ٠

(س ـ ٥) (س ـ ١) = ٠ ومنها س = ٥ ، س = ١



د(١) =(١)^{٣} ـ ٩×(١)^{٢} + ١٥ × ١ = ٧

∴ (١ ، ٧) نقطة عظمى محلية

د(٥)=١٢٥ـ ٩ ×٢٥ + ١٥×٥ = ـ ٢٥

∴ (٥ ، ـ٢٥) نقطة صغرى محلية

.....

(٣٨) ∵ بالتعويض بالنقطة (١ ، ٤)

٤ = أ + ب + ٢

أ + ب = ٢ ..... (١)

د(س) = أ س^{٢} + ب س + ٢

د$^{/}$(س) = ٢ أ س + ب

عند النقطة الحرجة (١ ، ٤)

د$^{/}$(س) = ٠ ، س = ١

٠ = ٢ أ س + ب

ب = ـ ٢ أ ..... (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

أ ـ ٢ أ = ٢ ⟸ أ = ـ ٢

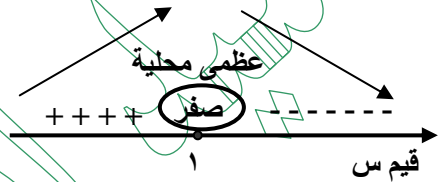
بالتعويض في (٢) ⟸ ب = ٤

معادلة المنحنى هي

ص = ـ ٢س^{٢} + ٤ س + ٢

ص$^{/}$ = ـ ٤س + ٤

ص$^{/}$ = ٠ ⟸ ـ ٤س + ٤ = ٠ ⟸ س=١



∴ (١ ، ٤) نقطة عظمى محلية

.....

(٣٩) (١) (جـ ، د(جـ)) صغرى محلية

(٢) د محدبة لأسفل في]٢ ، ∞ [

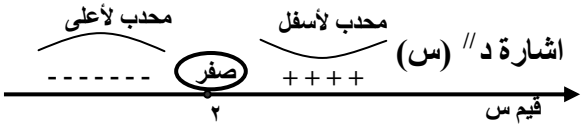
حيث د(س) = س (س ـ ٣)^{٢}

= س(س^{٢} ـ ٦س + ٩)

= س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س

د$^{/}$(س) = ٣س^{٢} ـ ١٢س + ٩

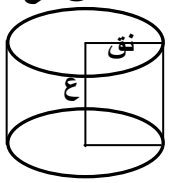
د$^{//}$(س) = ٦س ـ ١٢



الدالة محدبة لأسفل في الفترة]٢ ، ∞ [

.....

(٤٠) حجم الاسطوانة = ط نق^{٢} ع



٨٠٠٠ = ط نق^{٢} ع

ع = $\frac{٨٠٠٠}{\text{ط نق}^{٢}}$ ..... (١)

مـ = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

مـ = ٢ ط نق ع + ط نق^{٢} ع ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

مـ = ٢ ط نق × $\frac{٨٠٠٠}{\text{ط نق}^{٢}}$ + ط نق^{٢}

مـ = ٠ ١٦٠٠٠ ط نق$^{-١}$ + ط نق^{٢}

$\frac{\text{ع مـ}}{\text{ع نق}}$ = ـ ١٦٠٠٠ ط نق$^{-٢}$ + ٢ط نق

$\frac{\text{ع}^{٢}\text{ مـ}}{\text{ع نق}^{٢}}$ = + $\frac{٣٢٠٠٠\ \text{ط}}{\text{نق}^{٣}}$ + ٢ ط ..... (٢)

$\frac{\text{ع مـ}}{\text{ع نق}}$ = ٠ ـ ١٦٠٠٠ ط نق$^{-٢}$ + ٢ط نق = ٠

ـ $\frac{١٦٠٠٠\ \text{ط}}{\text{نق}^{٢}}$ + ٢ط نق = ٠ بالضرب × نق^{٢}

ـ ١٦٠٠٠ط + ٢ ط نق^{٣} = ٠

٢ ط نق^{٣} = ١٦٠٠٠ ط

نق^{٣} = ٨٠٠٠ ⟸ نق = ٢٠ بالتعويض في (٢)

$\frac{\text{ع}^{٢}\text{ مـ}}{\text{ع نق}^{٢}}$ = ٤ ط + ٢ ط = ٦ ط > ٠

المساحة السطحية أقل ما يمكن

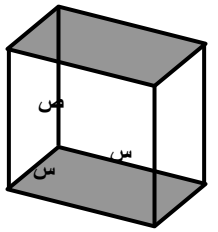
بالتعويض في (١) عن نق = ٢٠

ع = $\frac{٨٠٠٠}{٤٠٠}$ = ٢٠

نق = ٢٠سم ، ع = ٢٠سم

.....

(٤١) مجموع أطوال أحرفه = ١٢٠



٤ ص + ٨ س = ١٢٠

ص + ٢ س = ٣٠

ص = ٣٠ – ٢ س ..... (١)

ح = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = س^{٢} ص ..... (٢)

من (١) ، (٢)

ح = س^{٢} (٣٠ – ٢ س)

ح(س) = ٣٠ س^{٢} – ٢ س^{٣}

ح$^{/}$(س) = ٦٠ س – ٦ س^{٢}

ح$^{//}$(س) = ٦٠ – ١٢ س

ح$^{/}$ = ٠ ٦٠ س – ٦ س^{٢} = ٠

٦ س (١٠ – س) = ٠

س = ٠ مرفوض ومنها س = ١٠

ح$^{//}$(١٠)=٦٠–١٢×١٠= – ٦٠ > ٠

ح أكبر ما يمكن عندما س = ١٠سم

ص = ٣٠ – ٢ × ١٠ = ١٠سم

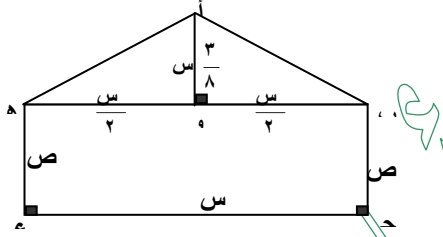
الأبعاد هي ١٠سم ، ١٠سم ، ١٠سم

.....

(٤٢) أ ب = $\sqrt{(\frac{٣س}{٨})^{٢} + (\frac{س}{٢})^{٢}}$

أ ب = $\sqrt{\frac{٩}{١٦} س^{٢} + \frac{س^{٢}}{٤}}$

= $\sqrt{\frac{٢٥}{٦٤} س^{٢}}$ = $\frac{٥ س}{٨}$



محيط النافذة = ١٢٠ سم

ب جـ + جـ ء + ء هـ + هـ أ + أ ب = ١٢٠

ص + س + ص + $\frac{٥ س}{٨}$ + $\frac{٥ س}{٨}$ = ١٢٠

٨ص+٨س+٨ص+٥س+٥س = ٩٦٠

١٨ س + ١٦ ص = ٩٦٠

٩ س + ٨ ص = ٤٨٠

ص = $\frac{٤٨٠ - ٩ س}{٨}$ ..... (١)

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

مـ = س ص + $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٣}{٨}$ س

مـ = س ص + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢} ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

مـ = س($\frac{٤٨٠ - ٩ س}{٨}$) + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

مـ = ٦٠ س - $\frac{٩}{٨}$ س^{٢} + $\frac{٣}{١٦}$ س^{٢}

مـ = ٦٠ س - $\frac{١٥}{١٦}$ س^{٢}

مـ$^{/}$ = ٦٠ - $\frac{١٥}{٨}$ س ⇐ مـ$^{//}$ = - $\frac{١٥}{٨}$

مـ$^{/}$ = ٠ ⇐ ٦٠ - $\frac{١٥}{٨}$ س = ٠

س = $\frac{٦٠ \times ٨}{١٥}$ = ٣٢ سم

بالتعويض في (١) ص = ٢٤ سم

بعدي المستطيل هما ٣٢ سم ، ٢٤ سم

.....

(٤٣) م = $\frac{١٠^{٥}}{ع}$ + ١٠ ع ..... (١)

م = ١٠ ^{٥} ع$^{-١}$ + ١٠ ع

م$^{/}$ = - ١٠ ^{٥} ع$^{-٢}$ + ١٠

م$^{//}$ = + ٢ × ١٠ ^{٥} ع$^{-٣}$

م$^{//}$ = $\frac{٢ \times ١٠^{٥}}{ع^{٣}}$ ..... (٢)

م$^{/}$ = ٠ ومنها - ١٠ ^{٥} ع$^{-٢}$ + ١٠ = ٠

- $\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}}$ + ١٠ = ٠ بالضرب × ع^{٢}

- ١٠ ^{٥} + ١٠ ع^{٢} = ٠

ع^{٢} = ١٠ ^{٤} ⇐ ع = ١٠ ^{٢} = ١٠٠

بالتعويض في (٢)

م$^{//}$ (١٠٠) = $\frac{٢ \times ١٠^{٥}}{(١٠٠)^{٣}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ > ٠

م أصغر ما يمكن عندما ع = ١٠٠

بالتعويض في (١)

م = $\frac{١٠^{٥}}{١٠٠}$ + ١٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠ث.كجم

.....

(٤٤) ٣ س – ص + ٣ = ٠

ص = ٣ س + ٣ ..... (١)

نفرض أن جـ = (س ، ص)

ف = (جـ أ)^{٢} + (جـ ب)^{٢}

المطلوب: جـ = (... ، ...) بحيث ف أصغر ما يمكن

أ = (٤ ، ٢) ، ب = (-١ ، -٣)

ف = (س– ٤)^{٢} + (ص-٢)^{٢} + (س+١)^{٢} + (ص+٣)^{٢} ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

ف = (س-٤)^{٢} + (٣س+٣-٢)^{٢} + (س+١)^{٢} + (٣س+٣+٣)^{٢}

ف = (س-٤)^{٢} + (٣س+١)^{٢} + (س+١)^{٢} + (٣س+٦)^{٢}

ف = س^{٢} – ٨س + ١٦ + ٩س^{٢} + ٦س + ١ + س^{٢} + ٢س + ١ + ٩س^{٢} + ٣٦س + ٣٦

ف = ٢٠س^{٢} + ٣٦س + ٥٤

ف$^{/}$ = ٤٠س + ٣٦

ف$^{//}$ = ٤٠

ف$^{/}$ = ٠ ⟸ ٤٠س + ٣٦ = ٠

س = – ٠.٩

ف$^{//}$ (– ٠.٩) = ٤٠ > ٠

ف أصغر ما يمكن عندما س = – ٠.٩

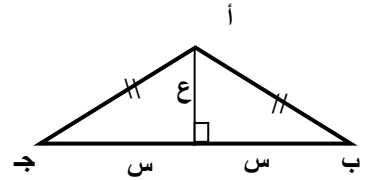
بالتعويض في (١)

ص = ٣ × – ٠.٩ + ٣ = ٠.٣

جـ = (– ٠.٩ ، ٠.٣)

.....

(٤٥)



نفرض أن قاعدة المثلث = ٢س ، والارتفاع = ع

أ ب = أ جـ = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ ..... (١)

محيط المثلث = ٣٠

أ ب + أ جـ + ب جـ = ٣٠

$\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ + $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ + ٢س = ٣٠

$\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$ = ١٥ – س بتربيع الطرفين

س^{٢} + ع^{٢} = ٢٢٥ – ٣٠س + س^{٢}

ع^{٢} = ٢٢٥ – ٣٠س ..... (٢)

ع = $\sqrt{٢٢٥ - ٣٠ \text{ س}}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢س × ع

م = س ع

م = س $\sqrt{٢٢٥ - ٣٠ \text{ س}}$

م = $\sqrt{٢٢٥\text{س}^{٢} - ٣٠ \text{ س}^{٣}}$

م$^{/}$ = $\frac{٤٥٠\text{س} - ٩٠\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{٢٢٥\text{س}^{٢} - ٣٠\text{س}^{٣}}}$

م$^{/}$ = ٠ عندما البسط = صفر

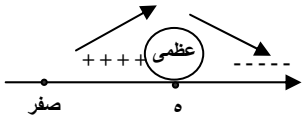
٤٥٠س – ٩٠س^{٢} = ٠

٥ س – س^{٢} = ٠

س(٥ – س) = ٠

س = صفر مرفوض

س = ٥ مقبول



مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما س = ٥سم

طول القاعدة = ١٠سم

بالتعويض فى (١) ينتج أن ع^{٢} = ٧٥

بالتعويض فى (١) أ ب = أ جـ = ١٠ سم

المثلث يصبح متساوى الأضلاع وطول ضلعه ١٠سم

.....

(٤٦) د(س) = $\frac{٦}{\text{س}^{٢} + ٣}$ = ٦ (س٢ + ٣)$^{-١}$

د$^{/}$ (س) = – ٦(س٢ + ٣)$^{-٢}$ × ٢س = $\frac{-١٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

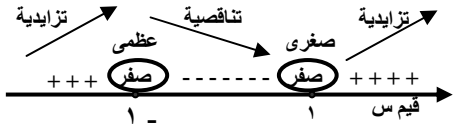
ميل المماس م(س) = $\frac{-١٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

م$^{/}$ (س) = $\frac{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢} \times -١٢ + ١٢\text{س} \times ٢ (\text{س}^{٢} + ٣) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٤}}$

م$^{/}$ (س) = $\frac{٣٦\text{س}^{٢} - ٣٦}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٣}}$

م$^{/}$ (س) = ٠

٣٦س^{٢} – ٣٦ = ٠ ومنها س = ± ١



د(– ١) = ١.٥

ميل المماس أكبر ما يمكن عند النقطة (– ١ ، ١.٥)

د(١) = ١.٥

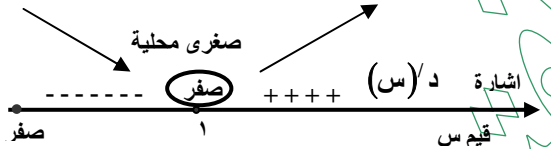
ميل المماس أصغر ما يمكن عند النقطة (١ ، ١.٥)

.....

(٤٧) نفرض أن د(س) = س + $\frac{١}{\text{س}}$

د$^{/}$(س) = ١ – $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}}$

دراسة اشارة د$^{/}$(س)



عند س = ١ قيمة صغرى محلية للدالة

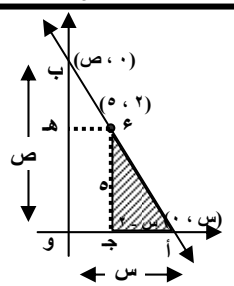
د(١) = ١ + ١ = ٢ ← القيمة الصغرى للدالة

د(س) ≥ ٢ ⟸ س + $\frac{١}{\text{س}}$ ≥ ٢

.....

(٤٨)

موقع أبو الوسيل التعليمي



من تشابه المثلثين أ جـ ء ، أ و هـ ينتج أن :

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ و}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ب و}}$ أى $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}} = \frac{٥}{\text{ص}}$

$\text{ص} = \frac{٥\,\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ..... (١)

مساحة المثلث و أ ب $= \frac{١}{٢}$ س ص

$\text{د(س)} = \frac{١}{٢}\,\text{س} \times \frac{٥\,\text{س}}{\text{س} - ٢}$

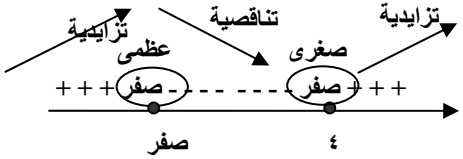
$\text{د(س)} = \frac{٥\,\text{س}^{٢}}{٢\text{س} - ٤}$

$\text{د}'\text{(س)} = \frac{(٢\,\text{س} - ٤) \times ١٠\,\text{س} - ٥\text{س}^{٢} \times ٢}{(٢\,\text{س} - ٤)^{٢}}$

$\text{د}'\text{(س)} = \frac{١٠\text{س}^{٢} - ٤٠\,\text{س}}{(٢\,\text{س} - ٤)^{٢}}$

بدراسة اشارة د/(س) وهى نفس اشارة البسط

د/(س) = ٠ عندما البسط = ٠ ومنها س = ٠ ، س = ٤



المساحة أصغر مايمكن عندما س = ٤

بالتعويض فى (١) ينتج أن ص $= \frac{٥ \times ٤}{٤ - ٢} = ١٠$

أ (٤ ، ٠) ، ب (٠ ، ١٠)

ميل المستقيم أ ب $= \frac{١٠ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{-٥}{٢}$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٠ $= \frac{-٥}{٢}$ (س – ٤)

٢ص = – ٥ س + ٢٠ ومنها ٥ س + ٢ ص – ٢٠ = ٠

.....

(٤٩) ميل العمودي $= \frac{-١}{٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}$

ميل المماس = ٣س^{٢} + ٢س

ص/ = ٣س^{٢} + ٢س

ص = $\int$ (٣س^{٢} + ٢س).ء س

ص= س^{٣} + س^{٢} + ث ..... (١)

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) نقطة الأصل

فهي تحقق معادلته

٠ = ٠ + ٠ + ث ث = ٠

معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} + س^{٢}

.....

(٥٠) ص// = س^{٢} – ١

ص/ = $\int$ (س^{٢} – ١) . ء س

ص/ $= \frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + ث ..... (١)

معادلة المماس هي س + ١٢ص = جـ

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ س

١ + ١٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -\frac{١}{١٢}$

عند س = ١ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -\frac{١}{١٢}$

بالتعويض في (١)

$-\frac{١}{١٢} = \frac{١}{٣} - ١ + \text{ث} \Leftarrow \text{ث} = \frac{٧}{١٢}$

بالتعويض في (١)

ص/ $= \frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + $\frac{٧}{١٢}$

ص = $\int$ ($\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + $\frac{٧}{١٢}$) . ء س

ص $= \frac{١}{١٢}$ س^{٤} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س + ث/

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ١)

فهي تحقق معادلته

١ $= \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٢} + \frac{٧}{١٢} + \text{ث}/ \Leftarrow \text{ث}/ = \frac{٥}{٦}$

معادلة المنحنى هي

ص $= \frac{١}{١٢}$ س^{٤} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س + $\frac{٥}{٦}$

.....

(٥١) ص// = ٦س – ٦

ص/ = $\int$ (٦س – ٦) . ء س

ص/ = ٣ س^{٢} – ٦س + ث ..... (١)

عند النقطة العظمى المحلية (-١ ، ١٠)

ص/ = ٠ ، س = - ١ بالتعويض في(١)

٠ = ٣ + ٦ + ث $\Leftarrow$ ث = - ٩

ص/ = ٣ س^{٢} – ٦س – ٩

ص = $\int$ (٣ س^{٢} – ٦س – ٩) . ء س

ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} - ٩ س+ ث/ .....(٢)

بالتعويض في (٢) بالنقطة (-١ ، ١٠)

١٠ = (-١)^{٣} -٣(-١)^{٢} - ٩ × -١ + ث/

ث/ = ٥ معادلة المنحنى هي

ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} - ٩ س+ ٥

.....

(٥٢) $\frac{ع ص}{ع س} = ٣س^{٢} - ٦س - ٩$ ..... (١)

$ص = \int (٣س^{٢} - ٦س - ٩) . ع س$

$ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ث$ .... (٢)

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٦ س - ٦$ ..... (٣)

عند النقطة العظمى أو الصغرى المحلية

$\frac{ع ص}{ع س} = ٠$ بالتعويض في (١)

$٣س^{٢} - ٦س - ٩ = ٠$

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ \quad س = -١$ بالتعويض في (٣)

عند $س = ٣$ $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ١٢ > ٠$ صغرى محلية

عند $س = -١$ $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = -١٢ < ٠$ ظمى محلية

$(-١ ، ١٠)$ نقطة عظمى محلية

فهي تحقق معادلة المنحنى بالتعويض في (٢)

$١٠ = -١ - ٣ + ٩ + ث$

$٥ = ث$ بالتعويض في (٢)

معادلة المنحنى هي

$ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥$ ..... (٤)

عند $س = ٣$ نقطة صغرى محلية

بالتعويض في (٤)

$ص = ٢٧ - ٢٧ - ٢٧ + ٥$

$ص = -٢٢$

النقطة $(٣ ، -٢٢)$ نقطة صغرى محلية

.....

(٥٣) $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٢ س - ٣}{٥ - ٢ ص}$

$\int (٥ - ٢ص) . ع ص = \int (٢س - ٣) . ع س$

$٥ص - ص^{٢} = س^{٢} - ٣س + ث$ .... (١)

بالتعويض بالنقطة $(١ ، ٢)$ في (١)

$١٠ - ٤ = ١ - ٣ + ث \quad ث = ٨$

معادلة المنحنى هي

$٥ ص - ص^{٢} = س^{٢} - ٣ س + ٨$

.....

(٥٤) $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{\sqrt{ص - ٣}}{\sqrt{س + ٢}}$

$\int \frac{ع ص}{\sqrt{ص - ٣}} = \int \frac{ع س}{\sqrt{س + ٢}}$

$\int (ص - ٣)^{-\frac{١}{٢}} . ع ص = \int (س + ٢)^{-\frac{١}{٢}} . ع س$

$٢ (ص - ٣)^{\frac{١}{٢}} = ٢ (س + ٢)^{\frac{١}{٢}} + ث$

بالتعويض بالنقطة $(٢ ، ٤)$

$٢ = ٤ + ث \quad ث = -٢$

المعادلة هي : $(ص - ٣)^{\frac{١}{٢}} = (س + ٢)^{\frac{١}{٢}} - ١$

.....

(٥٥) $\frac{ع ح}{ع ن} = (ن + ٢)$

$ح = \int (ن + ٢) . ع ن$

$ح = \frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ ن + ث$

$ن = ٠ ، ح = ٠ \Leftarrow \quad ث = ٠$

$ح = \frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ ن$

عندما يمتلئ الخزان $ح = ٦$

$\frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ ن = ٦ \quad \times ٢$

$ن^{٢} + ٤ ن - ١٢ = ٠$

$(ن + ٦)(ن - ٢) = ٠$

$ن = -٦$ مرفوض لأن الزمن موجب

$ن = ٢$ دقيقة

.....

(٥٦) $\frac{ع ح}{ع ن} = ٠.٤ ن - ٤٠$

$ح = \int (٠.٤ ن - ٤٠) . ع ن$

$ح = ٠.٢ ن^{٢} - ٤٠ ن + ث$

عند $ن = ٣٠ \quad ح = ٩٨٠$

$٩٨٠ = ٠.٢ \times ٣٠^{٢} - ٤٠ \times ٣٠ + ث$

$ث = ٢٠٠٠$

$ح = ٠.٢ ن^{٢} - ٤٠ ن + ٢٠٠٠$ ..... (١)

عند بداية تسرب السائل

$ن = ٠$ بالتعويض في (١)

$ح = ٢٠٠٠$ سم^{٣}

عندما يصبح الإناء فارغا

$ح = ٠$ بالتعويض في (١)

$٠.٢ ن^{٢} - ٤٠ن + ٢٠٠٠ = ٠ \quad \div ٠.٢$

$ن^{٢} - ٢٠٠ن + ١٠٠٠٠ = ٠$

$(ن - ١٠٠)^{٢} = ٠$ ومنها $ن = ١٠٠$ ثانية