بعض قوانين الجبر

التباديل والتوافيق

١. **ملخص قوانين التباديل**

$ل^{ن}_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) \times ..... \times (ن-ر+١)$ حيث ر عدد العوامل ، ر ≤ ن يستخدم غالبا إذا كانت ر معلومة

$|ن = ن(ن-١)(ن-٢) \times ..... \times ٣ \times ٢ \times ١$

$|ن = ن|ن-١ = ن(ن-١)|ن-٢$

يستخدم غالبا في اختصار المضروبات

$ل^{ن}_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$ يستخدم غالبا عندما تكون ر غير معلومة

$|١ = ١$ ، $|٠ = ١$ ، $ل^{ن}_{٠} = ١$

.....

٢. **ملخص قوانين التوافيق :**

$ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{|ر}$ يستخدم غالبا إذا كانت ر معلومة

نتيجة١ : $ق^{ن}_{ر} = \frac{|ن}{|ر \, |ن-ر}$ يستخدم غالبا إذا كانت ر غير معلومة

نتيجة٢ : $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر}$ يسمى قانون التبسيط ويستخدم عندما ر > ن

نتيجة٣ : $\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

نتيجة٤ : $ق^{ن}_{ر} + ق^{ن}_{ر-١} = ق^{ن+١}_{ر}$

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظرية : إذا كان س ، أ عددين حقيقيين ، ن ∈ ص$^{+}$ فإن :

$(س+أ)^{ن} = س^{ن} + ق^{ن}_{١} أ س^{ن-١} + ق^{ن}_{٢} أ^{٢} س^{ن-٢} + ... + أ^{ن}$

نتيجة : إذا كان س ∈ ح ، ن ∈ ص فإن :

$(١+س)^{ن} = ١ + ق^{ن}_{١} س + ق^{ن}_{٢} س^{٢} + ... + س^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية

$(١-س)^{ن} = ١ - ق^{ن}_{١} س + ق^{ن}_{٢} س^{٢} + ... + (-س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية

$(س+١)^{ن} = س^{ن} + ق^{ن}_{١} س^{ن-١} + ق^{ن}_{٢} س^{ن-٢} + ... + ١$ حسب قوى س التنازلية

الحد العام في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

$(س+أ)^{ن} = س^{ن} + ق^{ن}_{١} أ^{١} س^{ن-١} + ق^{ن}_{٢} أ^{٢} س^{ن-٢} + ق^{ن}_{٣} أ^{٣} س^{ن-٣} + ... + أ^{ن}$

$ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر} أ^{ر} س^{ن-ر} = ق^{ن}_{ر}$ (الثاني)^{ر} (الأول)$^{ن-ر}$

(الحد الأوسط – الحدان الأوسطان) في مفكوك ذات الحدين

أولا : إذا كانت ن زوجية فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون فرديا ويوجد حد أوسط واحد

رتبته $\frac{ن}{٢}+١$

ثانيا : إذا كانت ن فردية فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون زوجيا ويوجد حدان أوسطان

رتبتاهما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك $(س+أ)^{ن}$ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{أ}{س}$

الأعداد المركبة

تعريف : مجموعة الأعداد المركبة كـ

كـ = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = - ١ }

تساوي عددين مركبين :

س١ + ت ص١ = س٢ + ت ص٢ إذا كان س١ = س٢ ، ص١ = ص٢

من هذا التعريف إذا كان س + ت ص = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

مجموع عددين مركبين :

س١ + ت ص١ + س٢ + ت ص٢ = (س١ + س٢) + ت (ص١ + ص٢)

حاصل ضرب عددين مركبين :

إذا كان ع١ = س١ + ت ص١ ، ع٢ = س٢ + ت ص٢ فإن

ع١ ع٢ = (س١ س٢ – ص١ ص٢) + (س١ ص٢ + س٢ ص١) ت

خصائص جمع وضرب الأعداد المركبة

المعكوس الجمعي للعدد ع = س + ت ص هو العدد
(- ع) = - س – ت ص ويكون ع + (- ع) = ٠ لكل ع ∈ كـ

تعريف الطرح ع١ - ع٢ = ع١ + (- ع٢)

المعكوس الضربي للعدد ع = س + ص ت هو العدد

$ع^{-١} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} - \frac{ص}{س^{٢} + ص^{٢}}$ ت

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان ع = س + ت ص فإن العدد المركب $\overline{ع}$ = س – ت ص يسمى مرافق العدد ع

ملحوظة : ع ، $\overline{ع}$ يختلفان في الجزء التخيلي فقط

خواص العددين المترافقين

(١) $ع + \overline{ع} = ٢$ س ∈ ح

(٢) $ع . \overline{ع} = س^{٢} + ص^{٢}$ ∈ ح

(٣) $\overline{ع_{١} + ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$

(٤) $\overline{ع_{١} . ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} . \overline{ع_{٢}}$

تذكر $ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٢ ل م$

، $(ل - م)^{٢} = (ل + م)^{٢} - ٤ ل م$

ملحوظة : إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعدادا حقيقية ووجد لها جذر مركب أ + ب ت (أ ، ب ∈ ح) فإن مرافقه $\overline{ع}$ = أ – ب ت هو الآخر جذر لهذه المعادلة

المقياس والسعة – الصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ص ت

$| ع | = ل = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

جتا θ = $\frac{س}{ل}$ ، جا θ = $\frac{ص}{ل}$ وتسمى θ سعة العدد المركب

وعموما إذا كانت θ سعة عدد مركب فإن كل من الأعداد θ + ٢ م ط ، (م عدد صحيح) يكون أيضا سعة للعدد المركب ، قيمة θ التي تنتمي للفترة [٠ ، ٢ ط [تسمى " السعة الأساسية " للعدد المركب

الصورة المثلثية للعدد المركب ع = س + ص ت

ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث جتا θ = $\frac{س}{ل}$ ، جا θ = $\frac{ص}{ل}$

ملحوظة : ١ = جتا ٠ + ت جا ٠ ، - ١ = جتا ط + ت جا ط

ت = جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$ ، - ت = جتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٢}$

مقياس وسعة حاصل ضرب وقسمة عددين مركبين

نفرض أن ع١ = ل١ (جتا $θ_{١}$ + ت جا $θ_{١}$)

ع٢ = ل ٢ (جتا $θ_{٢}$ + ت جا $θ_{٢}$)

ع١ ع٢ = ل١ ل ٢ [جتا $(θ_{١} + θ_{٢})$ + ت جا $(θ_{١} + θ_{٢})$]

$ع^{ن} = ل^{ن}$ (جتا ن θ + ت جا ن θ)

$\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ [(جتا $(θ_{١} - θ_{٢})$ + ت حا $(θ_{١} - θ_{٢})$] ، حيث ع٢ ≠ ٠

نتيجة : إذا كان ع = ل (جتا θ + ت جا θ) فإن

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$ [جتا (- θ) + ت جا (- θ)] أي أن مقياس $\frac{١}{ع}$ هو $\frac{١}{ل}$ وسعته (- θ)

نظرية ديموافر

نظرية ديموافر (بدون برهان)

(جتا θ + ت جا θ)^{ن} = جتا ن θ + ت جا ن θ ، ن عدد نسبي

ملحوظة ١ إذا كانت ن عددا صحيحا فإن جتا ن θ + ت جا ن θ = (جتا θ + ت جا θ)^{ن}

ملحوظة "٢" إذا كان ك عددا موجبا فإن

$\left(جتا θ + ت حا θ \right)^{\frac{١}{ك}}$ = جتا $\frac{θ + ٢ ط ر}{ك}$ + جا $\frac{θ + ٢ ط ر}{ك}$ ،

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ك – ١ ، θ ∈ [٠ ، ٢ط [أي أن

المقدار جتا θ + ت جا θ يمكن إيجاد له ك من الجذور

الصورة الأسية للعدد المركب

ع = س + ص ت = ل (جتا θ + ت جا θ) = ل $هـ^{θ ت}$ حيث θ بالقياس الدائري

العمليات على الأعداد المركبة في الصورة الأسية

ل١ $هـ^{θ_{١} ت}$ × ل٢ $هـ^{θ_{٢} ت}$ = ل١ ل٢ $هـ^{(θ_{١} + θ_{٢}) ت}$

$\frac{ل_{١} هـ^{θ_{١} ت}}{ل_{٢} هـ^{θ_{٢} ت}} = \frac{ل_{١}}{ل_{٢}} هـ^{(θ_{١} - θ_{٢}) ت}$ ، $\left(ل هـ^{θ ت} \right)^{ن} = ل^{ن} هـ^{θ ت ن}$

$\overline{ل هـ^{ت}_{\theta}} = \overline{ل هـ^{\frac{\theta + ٢ط ر}{ن}}_{ت}}$ ، ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، (ن − ١)}

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

أولا : أحد الجذور التكعيبية هو العدد الحقيقي ١ والآخران مركبان ومترافقان والجذور الثلاثة لها نفس المقياس وهو الواحد والسعات الأساسية لها هي ٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠°

ثانيا : نرمز لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω والآخر $\omega^{٢}$ حيث مربع أي من الجذرين المركبين = الجذر المركب الآخر

ثالثا : $١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر $\Leftarrow$ $١ + \omega^{٢} = -\omega$ ، $١ + \omega = -\omega^{٢}$

، $\omega + \omega^{٢} = -١$

رابعا : $\omega^{٣} = ١$ ومنها $\omega^{٢} = \frac{١}{\omega}$ ، $\omega = \frac{١}{\omega^{٢}}$

القوى الصحيحة للعدد ω

$\omega^{١} = \omega$	$\omega^{٤} = \omega$	$\omega^{٣ن} = ١$	$\omega^{٤٠} = \omega$ ، ن ∈ ص+
$\omega^{٢} = \omega^{٢}$	$\omega^{٥} = \omega^{٢}$	$\omega^{٣ن+١} = \omega$	$\omega^{٨١} = ١$
$\omega^{٣} = ١$	$\omega^{٦} = ١$	$\omega^{٣ن+٢} = \omega^{٢}$	$\omega^{-٤} = \frac{١}{\omega^{٤}} = \frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$

مسائل مختارة من امتحانات الثانوية العامة

التباديل والتوافيق

١- أوجد قيمة المجهول في كل معادلة مما يلي :

(أ) $ل^{١٠}_{ر} = ٧٢٠$ (ب) $ل^{ن}_{٢} = ٤٢$ (جـ) $ق^{ن}_{٢} = ١٥$

(ء) $ق^{ن}_{ن-٢} = ٢١$ (هـ) $|\underline{ن} = ٧٢٠$ (و) $\frac{|\underline{ن - ٢}}{|\underline{ن - ٤}} = ٤٢$

(ى) $ق^{ن}_{٨} = ق^{ن}_{١٢}$ (ط) $\frac{ق^{ن}_{٥}}{ق^{ن}_{٤}} = \frac{٣}{٥}$

.....

٢- مايو٩٨ : إذا كان $ل^{ن}_{ر} = ٣٦٠$ ، $|\underline{ر} = ٢٤$ أوجد قيمة $ق^{٢}_{ر}$

.....

٣- دور أول ٢٠١١ : إذا كان $ل^{س+ص}_{٤} = ٣٦٠$ ،

$|\underline{٢س + ص} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة $ق^{ص}_{٢س}$

.....

٤- أغسطس٩٧ : إذا كان $|\underline{ن} = ٧٢٠$ ، $ق^{ن+١}_{ر} : ق^{ن+١}_{ر-١} = ٣ : ٥$

أوجد قيمة $ل^{ن+١}_{ر-٢}$

.....

٥- دور أول ٢٠٠٥ : إذا كان $ل^{٦}_{ر} = ١٢٠$ ، $ق^{ن+١}_{ر} : ق^{ن+١}_{ر-١}$

$= ٣$ فأوجد قيمة $|\underline{ن - ٢ ر}$

.....

٦- كتاب المدرسة :اثبت أن : $ق^{ن}_{ر} + ق^{ن}_{ر+١} = ق^{ن+١}_{ر+١}$ ومن ثم

(أ) أوجد قيمة $\frac{ق^{١٧}_{٦} + ق^{١٧}_{٥}}{ق^{١٨}_{٥}}$

(ب) اثبت أن : $ق^{ن}_{ر+١} + ٢ ق^{ن}_{ر} + ق^{ن}_{ر-١} = ق^{ن+٢}_{ر+١}$

.....

٧- دور ثان ٢٠٠٣ : اثبت أن :

$ق^{ن}_{ر} : ق^{ن-١}_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ثم أوجد قيمة $\frac{ق^{٢٥}_{٤} + ق^{٢٤}_{٣}}{ق^{٢٤}_{٣} + ق^{٢٣}_{٢}}$

.....

نظرية ذات الحدين

٨- أغسطس ٢٠٠٠ : في مفكوك $(س + \frac{٢}{س^{٢}})^{١٢}$ أوجد قيمة

(١) معامل الحد الأوسط (٢) قيمة الحد الخالي من س

.....

٩- يونيو ٢٠٠٠ : في مفكوك $(أ س + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع فاثبت أن ٦ أ ب = ٥

.....

١٠- في مفكوك $(١ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحد الرابع يساوي ٧ أوجد قيمة س . ثم أوجد النسبة بين الحد السادس والحد الأوسط في هذا المفكوك [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$]

.....

١١- يونيو ٢٠٠١ : في مفكوك $(٤ س^{٢} + \frac{١}{٢ س})^{١٥}$ أوجد :

(١) قيمة الحد الخالي من س (٢) قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويان [ح١١ = ٣٠٠٣ ، س = $\frac{١}{٢}$]

.....

١٢- دور أول ٢٠٠٥:

في مفكوك $(\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١١}$ حسب قوى س التنازلية أوجد :

أولا : قيمة معامل $س^{٥}$

ثانيا : قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين مساويا الصفر

.....

١٣- دور أول ٢٠٠٤ :

في مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد

أولا : قيم ك التي تجعل للمفكوك حدا خاليا من س

ثانيا : النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها في أولا

.....

١٤- دور أول ٢٠٠٣ : في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$

(أولا) أوجد معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣ن}$ [^{٣ن} ق ن]

(ثانيا) إذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط [٢١ : ٥٥]

.....

١٥- دور أول ٢٠١١

(٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فما قيمة كل من س ، ص ، ن ؟

.....

١٦- إذا كان س = ٣ ، ص = ٤ اثبت أن

$س^{١٩} - ١٩ س^{١٨} ص + \frac{١٨ \times ١٩}{١ \times ٢} س^{١٧} ص^{٢} - \frac{١٧ \times ١٨ \times ١٩}{١ \times ٢ \times ٣} س^{١٦} ص^{٣} + ... - ص^{١٩} = -١$

.....

١٧- مصر ٨٨ : إذا كان $(٣ س - ١)^{٥} = أ س^{٥} + ب س^{٤} + جـ س^{٣} + ء س^{٢} + هـ س + و$ أوجد قيمة أ + ب + جـ + ء + هـ + و

.....

١٨- مصر ٨٩ : إذا كان $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + ٢٠ س + أ١ س^{٢} + أ٢ س^{٣} + ...$ ، ١٦ أ١ = ٣ أ٢ أوجد قيمتي ن ، جـ [١٠ ، ٢]

.....

١٩- أوجد معامل $س^{٦}$ في مفكوك $(١ - س)^{٧} (١ + س)^{٧}$ [-٣٥]

.....

حل بنفسك :

أوجد معامل $س^{٦}$ في مفكوك $س (\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١١}$ [ ]

.....

٢٠- باستخدام مفكوك $(١ + س)^{ن}$ اثبت أن :

$ق_{٠}^{ن} + ق_{١}^{ن} + ق_{٢}^{ن} + ... + ق_{ن}^{ن} = ٢^{ن}$

.....

٢١- دور ثان٢٠٠٣ : إذا كانت $(أ - س)^{١٤} = جـ_{٠} + جـ_{١} س + جـ_{٢} س^{٢} + جـ_{٣} س^{٣} + ... + جـ_{١٤} س^{١٤}$ وكان $٤ جـ_{٤} + ١١ (جـ_{٣} + جـ_{٢}) =$ صفر أوجد قيمة أ

.....

الأعداد المركبة

٢٢- مايو٩٩ : إذا كانت $ع_{١} = ٤ (جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦})$ ،

$ع_{٢} = (جتا \frac{ط}{٢} + ت جا \frac{ط}{٢})$ ، $ت^{٢} = -١$ ضع العدد $ع_{١} ع_{٢}$ على الصورة الجبرية ، وأوجد الجذور التربيعية للعدد $ع_{١} ع_{٢}$ في الصورة الأسية

.....

٢٣- دور أول٢٠٠٥: إذا كان $ع_{١} = جتا \frac{٧ ط}{٤} - ت جا \frac{٧ ط}{٤}$ ،

$ع_{٢} = -١ + ت$ فأوجد العدد $ع = ع_{١}^{٢} ع_{٢}^{٦}$ على الصورة الأسية

.....

٢٤- إذا كان $ع^{٣} = \frac{١}{١ + \sqrt[٣]{ت}}$ أوجد ع على الصورة المثلثية

.....

٢٥- دور أول٢٠٠٣ : إذا كان العدد $ع = \frac{-١ + \sqrt[٣]{ت}}{٢}$ حيث $ت^{٢} = -١$

، وكان $ع_{١} = \frac{١ - ع}{١ + ع}$ فأوجد العدد $ع_{١}$ في الصورة المثلثية ، ثم اوجد الجذرين التربيعيين للعدد $ع_{١}$ في الصورة الأسية

[$\sqrt[٣]{٣}$ (جتا $\frac{٣ ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٣ ط}{٢}$) ، $\sqrt[٤]{٣}$ هـ $^{\frac{٣ ط}{٤} ت}$ ، $\sqrt[٤]{٣}$ هـ $^{\frac{٧ ط}{٤} ت}$]

.....

٢٦- دور ثان ٢٠٠٢

بوضع $ى = \frac{ط}{٢} - ٢ \theta$ أو بأي طريقة أخرى ، حيث $ت^{٢} = -١$ اثبت أن

$(\frac{١ + جا ى + ت جتا ى}{١ + جا ى - ت جتا ى})^{ن} = جتا ن(\frac{ط}{٢} - ى) + ت جا ن(\frac{ط}{٢} - ى)$

.....

٢٧- مصر٨٨ : أوجد قيمتي س ، ص الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة $(١ - ت) س + (١ + ت) ص = ٢ ت$ ومن ثم اثبت أن :

$(س + ت ص)^{٨} = ١٦$ [-١ ، ١]

.....

٢٨- أوجد الجذر التربيعي للعدد المركب $٣ + ٤ ت$ [$\pm (٢ + ت)$]

.....

٢٩- أوجد مجموعة الحل في كـ للمعادلة $ع^{٢} - ٤ ع + ٨ =$ صفر

[$٢ \pm ٢ت$]

.....

٣٠- إذا كان $ع + ٢ = ت (ع - ٢)$ حيث $ت^{٢} = -١$ ، فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة الأسية

.....

٣١- أوجد كل من : $|٣ + ٤ ت|$ ، $|-٣|$ ، $|٢ ت|$ [٥ ، ٣ ، ٢]

٣٢- أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق المعادلة | ٢ + ت ص + س | + س + ت ص = ٠ [-١ ، ٠]

حل بنفسك : مايو ٢٠١٣ :

إذا كان (س + ت ص) (١ – ٣ت) = ٣٧($\frac{١}{٣-٤\omega^{٢}}$ + $\frac{١}{٧+٤\omega^{٢}}$)

فأوجد قيمة كل من س ، ص حيث س ، ص عددان حقيقيان

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

٣٣- أغسطس ٢٠٠٠ :

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن :

(٢ + ٧ ω + ٢ $\omega^{٢}$) (٢ + ٧ $\omega^{٢}$ + ٢ $\omega^{٤}$) = ٢٥

٣٤- مايو ٢٠٠١ : اثبت أن

(١ + ٢ ω + $\omega^{٥}$ + $\frac{١}{\omega^{٢}}$) (١ + ٢ ω + $\frac{١}{\omega^{٤}}$) = ١

٣٥- مايو ٢٠٠٠ : اثبت أن (١ + $\frac{١}{\omega}$ + ت) (١ + $\frac{١}{\omega^{٢}}$ + ت) = ت

٣٦- مايو ٩٩ : اثبت أن ($\frac{٣-\omega^{٢}٥}{\omega٣-٥}$ + $\frac{\omega٤+٧}{٤+\omega^{٢}٧}$)^{٢} = ١

٣٧- أغسطس ٩٨ : اثبت أن $\frac{\omega+٢}{\omega^{٢}-\omega٢}$ + $\frac{\omega^{٢}+٢}{\omega-\omega^{٢}٢}$ = $\frac{٣}{٧}$

٣٨- أوجد جذري المعادلة :

س^{٢} + (١ + ٢ ω + $\omega^{٢}$) (١ + ω + ٢ $\omega^{٢}$) = صفر [± ت]

٣٩- اثبت أن ($\frac{س+\omega^{٤}ص}{\omega^{٢}س+ص}$ - $\frac{س+\omega^{٢}ص}{\omega س+ص}$)^{٤} = ٩

حل بنفسك

اثبت أن ($\frac{س+\omega^{٤}ص}{\omega^{٢}س+ص}$ + $\frac{س+\omega^{٢}ص}{\omega س+ص}$)$^{٢م+١}$ = - ١

٤٠- دور ثان ٢٠٠٣ : أوجد قيمة $\left(\frac{\omega}{\omega^{٢}+١}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢}+١}\right)^{٢}$

٤١- دور ثان ٢٠٠٤ : إذا كان $\left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢}+١}\right)^{٤}$ + $\left(\frac{\omega^{٢}+١}{\omega}\right)^{٤}$ = أ^{٢} ω ، ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة أ

٤٢- دور أول ٢٠١١

أوجد القيمة العددية للمقدار : ($\frac{١}{\omega^{٢}(٣+\omega)}$ - $\frac{١}{٤+\omega^{٣}٣}$)^{٢}

٤٣- دور أول ٢٠٠٤ : إذا كانت ل = أ + ب ، م = أ ω + ب $\omega^{٢}$ ، ن = أ $\omega^{٢}$ + ب ω حيث أ ، ب ∈ ح ، ω هي أحد الجذور التكعيبية

للواحد الصحيح فأوجد قيمة المقدار $\frac{\text{ل م ن}}{\text{أ}^{٣}+\text{ب}^{٣}}$

.....

٤٤- دور ثان٢٠٠٢ : اثبت أن

$\frac{٢}{٣}$ ت هو أحد الجذرين التربيعيين للمقدار $\frac{١-٣\omega-٣\omega^{٢}}{١+١٠\omega+١٠\omega^{٢}}$

.....

٤٥- دور أول٢٠٠٢ : اثبت أن $(\omega^{٢}-\frac{\omega}{\omega-١})^{٢}=-\frac{٤}{٣}$

.....

٤٦- مصر ٩٠ : أوجد العدد المركب ع الذي يحقق المعادلة $ع^{٢}+\overline{ع}$ = صفر حيث $\overline{ع}$ مرافق ع [صفر أ، $-\frac{١}{٢}(١\pm\sqrt{-٣}\,ت)$]

.....

حل بنفسك :

(١) اثبت أن :

١- $\omega^{٣ن}=٠$ حيث ن ∈ ص ثم اثبت أن $١+\omega^{ن}+\omega^{٢ن}=٠$

(٢) اثبت أن : $\frac{(١+ت)^{ن}}{(١-ت)^{ن-٢}}=٢\,ت^{ن-١}$ حيث ن ∈ ص

.....

المحددات

٤٧- بدون فك المحدد اثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix}١ & أ & ب\,جـ\\ ١ & ب & جـ\,أ\\ ١ & جـ & أ\,ب\end{vmatrix}=(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)$

(٢) $\begin{vmatrix}١ & ب & جـ\\ ب & ١+ب^{٢} & ب\,جـ\\ جـ & ب\,جـ & ١+جـ^{٢}\end{vmatrix}=١$

(٣) $\begin{vmatrix}١ & ب\,جـ & جـ\,أ+أ\,ب\\ ١ & جـ\,أ & أ\,ب+ب\,جـ\\ ١ & أ\,ب & ب\,جـ+جـ\,أ\end{vmatrix}=$ صفر

(٤) $\begin{vmatrix}س+ص+٢ & س & ص\\ ١ & ٢س+ص+١ & ص\\ ١ & س & س+٢ص+١\end{vmatrix}=٢(س+ص+١)^{٣}$

(٥) $\begin{vmatrix}١ & ١ & س\\ -٢س+٢س^{٢} & ١+٢س^{٢} & ٢س^{٣}\\ -٣س+٣س^{٢} & ٣س^{٢} & ١+٣س^{٣}\end{vmatrix}=١+٢س+٣س^{٢}$

.....

٤٨- مايو٢٠٠١ : إذا كان (س – ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix}س-١ & ١ & ١\\ ١ & ١ & س+١\\ -١ & ١ & س+ك\end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك [-١]

.....

٤٩- مصر ٨١ : أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملا للمحدد

$$\begin{vmatrix} س+١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ س & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

[ك = - ٤]

.....

٥٠- مصر٨٧ : إذا كانت ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

اثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ت & \omega^{٢} \\ \omega & -\omega ت & ٠ \\ \omega^{٢} ت & -\omega^{٢} & \omega \end{vmatrix} = ٠$

.....

٥١- مصر٩٣ـ مصر٨٤ : باستخدام خواص المحددات

اثبت أن : $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س - أ)(س - ب)(س + أ + ب)$

.....

٥٢- مايو٩٦ : بدون فك المحدد أوجد مجموعة حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^{٢}-٢ & ٤ \end{vmatrix} = صفر$$

{٠ ، ٣ ، - ٣}

.....

٥٣- دور أول ٢٠٠٣ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix} = ٢$ فأوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ٢س & ٢ص & ٢ع \\ ٥ل+س & ٥م+ص & ٥ن+ع \\ ٧ك-٣ل & ٧ط-٣م & ٧هـ-٣ن \end{vmatrix}$$

[١٤٠]

.....

٥٤- دور أول ٢٠٠٢ بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} أ-أب & ١ & ب-٣ \\ أب-أجـ & ب & جـ-٣ب \\ أجـ-أ & جـ & ١-٣جـ \end{vmatrix} = صفر$$

.....

٥٥- دور أول ٢٠١١ بدون فك المحددات اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ص+ع & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$$

.....

٥٦- مايو٩٩ : باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات التالية :

س + ص = ٥ ، ٢س + ٥ص – ٤ع = ٣ ، ٢س + ٤ص – ٥ع = - ٤

[(٢ ، ٣ ، ٤)]

.....

حل بنفسك

مايو ٢٠١٣ : إذا كانت مجموعة حل المعادلات س + ص + ع = أ ، س – ٢ص + ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ع = ٣ هى { (١ ، ب ، جـ)}

فأوجد باستخدام طريقة كرامر قيمة كل من أ ، ب ، جـ

.....

حلول جبر ٣ث

١. (أ) $ل_{ر}^{١٠} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$ل_{ر}^{١٠} = ل_{٣}^{١٠} \Leftarrow ر = ٣$

(ب) $ل_{٢}^{ن} = ٤٢ = ٧ \times ٦$

$ل_{٢}^{ن} = ل_{٢}^{٧} \Leftarrow ن = ٧$

(جـ) $ق_{٢}^{ن} = ١٥ = \frac{ل_{٢}^{ن}}{|٢}$

$ل_{٢}^{ن} = ٣٠ = ٦ \times ٥$

$ل_{٢}^{ن} = ل_{٢}^{٦} \Leftarrow ن = ٦$

حل آخر $ق_{٢}^{ن} = ١٥ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} = ١٥$

$ن(ن-١) = ٣٠ = ٦ \times ٥ \Leftarrow ن = ٦$

(ء) $ق_{ن-٢}^{ن} = ٢١$

$ق_{٢}^{ن} = ٢١ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} = ٢١$

$ن(ن-١) = ٤٢$ ومنها $ن(ن-١) = ٧ \times ٦$

$\Leftarrow ن = ٧$

(هـ) $|ن = ٧٢٠$

$|ن = |٦ \Leftarrow ن = ٦$

(و) $\frac{|ن-٢}{|ن-٤} = ٤٢$

$\frac{(ن-٢)(ن-٣)|ن-٤}{|ن-٤} = ٤٢$

$(ن-٢)(ن-٣) = ٧ \times ٦ \Leftarrow ن-٢ = ٧$

$\Leftarrow ن = ٩$

(ى) $ق_{٨}^{ن} = ق_{١٢}^{ن} \Leftarrow ن = ٨ + ١٢ = ٢٠$

(ط) $\frac{ق_{٥}^{ن}}{ق_{٤}^{ن}} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ن-٥+١}{٥} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow ن = ٧$

---

٢. $|ر = ٢٤ \Leftarrow |ر = |٤ \Leftarrow ر = ٤$

$ل_{٤}^{ن} = ٣٦٠ \quad ل_{٤}^{ن} = ل_{٤}^{٦}$

$ن = ٦ \Leftarrow ق_{ر}^{ن} = ق_{٤}^{١٢} = ٤٩٥$

---

٣. $س + ص = ٦ \quad ..... (١)$

$|٢س + ص = ٥٠٤٠ \quad |٢س + ص = |٧$

$٢س + ص = ٧ \quad ..... (٢)$

من (١) ، (٢) ينتج أن $س = ١$ ، $ص = ٥$

$ق_{٢س}^{ص} = ق_{٢}^{٥} = ١٠$

---

٤. $|ن = ٧٢٠ \Leftarrow |ن = |٦ \Leftarrow ن = ٦$

$ق_{ر}^{ن+١} : ق_{ر-١}^{ن+١} = ٣ : ٥$

$\frac{ق_{ر}^{(ن+١)}}{ق_{ر-١}^{(ن+١)}} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ر}{(ن+١)-ر+١} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ر}{(٦+١)-ر+١} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow \frac{ر}{٨-ر} = \frac{٣}{٥}$

$٣ر = ٤٠ - ٥ر \qquad ر = ٥$

$ل_{ر-٢}^{ن+١} = ل_{٣}^{٧} = ٢١٠$

---

٥. $ل_{٣}^{٦} = ١٢٠ \Leftarrow ل_{ر}^{٦} = ل_{٣}^{٦} \Leftarrow ر = ٣$

$\frac{ق_{ر}^{(ن+١)}}{ق_{ر-١}^{(ن+١)}} = ٣$

$\frac{(ن+١)-٣+١}{٣} = ٣ \Leftarrow \frac{(ن-١)}{٣} = ٣$

$ن-١ = ٩ \Leftarrow ن = ١٠$

$|ن-٢ر = |٤ = ٢٤$

---

٦. الطرف الأيسر $= ق_{ر+١}^{ن+١}$

الطرف الأيسر $= \frac{|ن+١}{|ر+١|ن-ر} \quad .... (١)$

الأيمن $= ق_{ر}^{ن} + ق_{ر+١}^{ن}$

$= \frac{|ن}{|ر|ن-ر} + \frac{|ن}{|ر+١|ن-ر-١}$

$= \frac{(ر+١)|ن + (ن-ر)|ن}{|ر+١|ن-ر}$

$= \frac{(ر+١+ن-ر)|ن}{|ر+١|ن-ر} = \frac{(ن+١)|ن}{|ر+١|ن-ر}$

الأيمن $= \frac{|ن+١}{|ر+١|ن-ر} \quad ..... (٢)$

من (١) ، (٢) ينتج أن

$ق_{ر}^{ن} + ق_{ر+١}^{ن} = ق_{ر+١}^{ن+١}$

(أ) $\frac{ق_{٦}^{١٧} + ق_{٥}^{١٧}}{ق_{٥}^{١٨}} = \frac{ق_{٦}^{١٨}}{ق_{٥}^{١٨}}$

$= \frac{١٨-٦+١}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

(ب) الأيمن $= ق_{ر+١}^{ن} + ق_{ر}^{ن} + ق_{ر-١}^{ن}$

$= (ق_{ر+١}^{ن} + ق_{ر}^{ن}) + (ق_{ر}^{ن} + ق_{ر-١}^{ن})$

$= ق_{ر+١}^{ن+١} + ق_{ر}^{ن+١} = ق_{ر+١}^{ن+٢}$

---

٧. $ق_{ر}^{ن} : ق_{ر-١}^{ن-١} =$

$$= \frac{\text{ن}|}{\text{ر}|\text{ن-ر}|} \div \frac{\text{ن-١}|}{\text{ر-١}|\text{ن-ر}|}$$

$$= \frac{\text{ن}|}{\text{ر}|\text{ن-ر}|} \times \frac{\text{ر-١}|\text{ن-ر}|}{\text{ن-١}|}$$

$$= \frac{\text{ن}\,|\text{ن-١}|}{\text{ر}\,|\text{ر-١}|\text{ن-ر}|} \times \frac{\text{ر-١}|\text{ن-ر}|}{\text{ن-١}|}$$

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن-١}}\text{ق}_{\text{ر-١}}} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$$

$$\frac{{}^{٢٥}\text{ق}_{٤} + {}^{٢٤}\text{ق}_{٣}}{{}^{٢٤}\text{ق}_{٣} + {}^{٢٣}\text{ق}_{٢}} = \frac{1 + \frac{{}^{٢٥}\text{ق}_{٤}}{{}^{٢٤}\text{ق}_{٣}}}{1 + \frac{{}^{٢٣}\text{ق}_{٢}}{{}^{٢٤}\text{ق}_{٣}}}$$

$$= \frac{1 + \frac{٢٥}{٤}}{1 + \frac{٣}{٢٤}} = \frac{\frac{٢٩}{٤}}{\frac{٢٧}{٢٤}} = \frac{٥٨}{٩}$$

---

٨. $(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{١٢}$

(١) رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

$\text{ح}_{٧} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦}$ (الثاني)^{٦} (الأول)$^{\text{ن-٦}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{٦} (\frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{٦} (\text{س})^{\text{ن-٦}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{٦} (٢)^{٦} (\text{س})^{-٦}$

معامل الحد الأوسط $= {}^{١٢}\text{ق}_{٦} (٢)^{٦} = ٥٩١٣٦$

(٢) نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو الحد الخالي من س

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (الثاني)$^{\text{ر}}$ (الأول)$^{\text{ن-ر}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{٢}{\text{س}^{٢}})^{\text{ر}} (\text{س})^{١٢-\text{ر}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} (٢)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٢\text{ر}} \times \text{س}^{١٢-\text{ر}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} (٢)^{\text{ر}} \times \text{س}^{١٢-٣\text{ر}}$

$١٢ - ٣\text{ر} = ٠ \iff \text{ر} = ٤$

$\text{ح}_{\text{ه}}$ هوالحد الخالي من س

$\text{ح}_{\text{ه}} = {}^{١٢}\text{ق}_{٤} (٢)^{٤} = ٧٩٢٠$

---

٩. $(\text{أ س} + \frac{١}{\text{ب س}})^{١٠}$

نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو الحد الخالي من س

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (الثاني)$^{\text{ر}}$ (الأول)$^{\text{ن-ر}}$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{١}{\text{ب س}})^{\text{ر}} (\text{أ س})^{١٠-\text{ر}}$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{١}{\text{ب}^{\text{ر}}} \times \text{س}^{\text{ر}} \times (\text{أ})^{١٠-\text{ر}} \times \text{س}^{١٠-\text{ر}}$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}^{١٠-\text{ر}}}{\text{ب}^{\text{ر}}} \times \text{س}^{١٠-٢\text{ر}}$

$١٠ - ٢\text{ر} = ٠ \iff \text{ر} = ٥$

$\text{ح}_{\text{ه}}$ هوالحد الخالي من س

$\text{ح}_{٦} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥} \times \frac{\text{أ}^{٥}}{\text{ب}^{٥}}$

معامل $\text{ح}_{٧} = {}^{١٠}\text{ق}_{٦} \times \frac{\text{أ}^{٤}}{\text{ب}^{٦}}$

الحد الأوسط = معامل $\text{ح}_{٧}$

${}^{١٠}\text{ق}_{\text{ه}} \times \frac{\text{أ}^{٥}}{\text{ب}^{٥}} = {}^{١٠}\text{ق}_{٦} \times \frac{\text{أ}^{٤}}{\text{ب}^{٦}} \ldots\ldots \times \frac{\text{ب}^{٦}}{\text{أ}^{٤}}$

${}^{١٠}\text{ق}_{\text{ه}}$ أ ب $= {}^{١٠}\text{ق}_{٦} \iff$ أ ب $= \frac{{}^{١٠}\text{ق}_{٦}}{{}^{١٠}\text{ق}_{\text{ه}}}$

أ ب $= \frac{٥}{٦} \iff ٦$ أ ب $= ٥$

---

١٠. $(١ + \text{س})^{٨} = ١ + {}^{٨}\text{ق}_{١}\text{س} + {}^{٨}\text{ق}_{٢}\text{س}^{٢} + \ldots\ldots + \text{س}^{٨}$

$\text{ح}_{٤} = ٧ \iff {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\ \text{س}^{٣} = ٧$

${}^{٨}\text{ق}_{٣}\ \text{س}^{٣} = ٧ \iff ٥٦\ \text{س}^{٣} = ٧$

$\text{س}^{٣} = \frac{١}{٨} \iff \text{س} = \frac{١}{٢}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

$\frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٥}} = \frac{\text{ن - ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}} = \frac{٨ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{س}}{١}$

$= \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٥}$

---

١١. $(٤\ \text{س}^{٢} + \frac{١}{٢\ \text{س}})^{١٥}$

(١) نفرض أن $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ هو الحد الخالي من س

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (الثاني)$^{\text{ر}}$ (الأول)$^{\text{ن-ر}}$

$= {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} (\frac{١}{٢\ \text{س}})^{\text{ر}} (٤\text{س}^{٢})^{١٥-\text{ر}}$

$= {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \frac{١}{٢^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}}} (٤)^{١٥-\text{ر}} \times \text{س}^{٣٠-\text{ر}}$

$= {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} (٢)^{٣٠-٣\text{ر}} \times \text{س}^{٣٠-\text{ر}}$

$٣٠ - ٣\text{ر} = ٠ \iff \text{ر} = ١٠$

$\text{ح}_{١١}$ هوالحد الخالي من س

$\text{ح}_{١١} = {}^{١٥}\text{ق}_{١٠} = ٣٠٠٣$

(٢) رتبة أول حد أوسط $= \frac{١ + ١٥}{٢} = ٨$

$\text{ح}_{٨}$ ، $\text{ح}_{٩}$ هما الحدان الأوسطان

$\text{ح}_{٨} = \text{ح}_{٩}$

$\frac{\text{ح}_{٩}}{\text{ح}_{٨}} = ١ \iff \frac{\text{ن - ٨} + ١}{٨} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}} = ١$

$\frac{-١٥ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{\left(\frac{١}{٢ س}\right)}{٤ س^{٢}} = ١$

$\frac{١}{٨ س^{٣}} = ١ \Leftarrow$ س $= \frac{١}{٢}$

---

١٢. $(\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١١}$

(١) نفرض أن ح $_{ر+١}$ هوالحدالمشتمل على $س^{٥}$

ح $_{ر+١} = {}^{ن}$ق $_{ر}$(الثاني) ^{ر} (الأول) $^{ن-ر}$

$= {}^{١١}$ق $_{ر}(\frac{-٤}{س})^{ر} (\frac{س^{٣}}{٢})^{١١-ر}$

$= {}^{١١}$ق $_{ر} \times \frac{(-٤)^{ر}}{س^{ر}} \times \frac{س^{٣٣-٣ر}}{٢^{١١-ر}}$

$= {}^{١١}$ق $_{ر} \times \frac{(-٤)^{ر}}{٢^{١١-ر}} \times س^{٣٣-٤ر}$

$٣٣ - ٤ ر = ٥ \Leftarrow ر = ٧$

ح$_{٨}$ هوالحد المشتمل على $س^{٥}$

ح$_{٨} = {}^{١١}$ق$_{٧} \times \frac{(-٤)^{٧}}{٢^{٤}} \times س^{٥}$

معامل $س^{٥} = {}^{١١}$ق$_{٧} \times \frac{(-٤)^{٧}}{٢^{٤}} = -٣٣٧٩٢٠$

ثانيا: رتبة أول حد أوسط $= \frac{١+١١}{٢} = ٦$

ح$_{٦}$ ، ح$_{٧}$ هما الحدان الأوسطان

ح$_{٦}$ + ح$_{٧} = ٠ \Leftarrow \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = -١$

$\frac{-١١ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{\left(\frac{-٤}{س}\right)}{\frac{س^{٣}}{٢}} = -١$

$\frac{-٨}{س^{٤}} = -١ \Leftarrow س^{٤} = ٨$

$س = \pm \sqrt[٤]{٨}$

---

١٣. في مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٦}$

(١) نفرض أن ح $_{ر+١}$ هو الحد الخالي من س

ح $_{ر+١} = {}^{٦}$ق $_{ر}$(الثاني) ^{ر} (الأول) $^{٦-ر}$

$= {}^{٦}$ق $_{ر}(\frac{١}{س})^{ر} (س^{ك})^{٦-ر}$

$= {}^{٦}$ق $_{ر}$ س $^{-ر} \times$ س $^{٦ك - ك ر}$

$= {}^{٦}$ق $_{ر}$ س $^{-ر + ٦ك - ك ر}$

$-ر + ٦ ك - ك ر = ٠$

$(٦ - ر)$ ك $= ر$

ك $= \frac{ر}{٦ - ر}$

ر $\leq ٦ - ر$ ، $٦ - ر > ٠$

$٢ ر \leq ٦$ $٦ > ر$

ر ≤ ٣ $٦ > ر$

$٦ > ر \leq ٣ \Leftarrow ر \in [٣ ، ٦]$

ر $= ٣$ ك $= ١$

ر $= ٤$ ك $= ٢$

ر $= ٥$ ك $= ٥$

ثانيا : ر $= ٥$ ، ك $= ٥$

الحد الخالي من س هو ح$_{٦} = {}^{٦}$ق$_{٥}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٦}{٢} + ١ = ٤$

ح$_{٤} = {}^{٦}$ق$_{٣} (\frac{١}{س})^{٣} (س^{٥})^{٦-٣}$

$= {}^{٦}$ق$_{٣}$ س$^{-٣}$ س$^{١٥} = {}^{٦}$ق$_{٣}$ س^{١٢}

معامل ح٤ هو ^{٦}ق$_{٣}$

$\frac{ح_{٦}}{معامل\ ح_{٤}} = \frac{{}^{٦}ق_{٥}}{{}^{٦}ق_{٣}} = \frac{٣}{١٠}$

---

١٤. $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$

(١) نفرض ح $_{ر+١}$ هوالحدالمشتمل على $س^{٣ن}$

ح $_{ر+١} = {}^{٣ن}$ق $_{ر}$(الثاني) ^{ر} (الأول) $^{٣ن-ر}$

$= {}^{٣ن}$ق $_{ر}(\frac{١}{س})^{ر} (س^{٢})^{٣ن-ر}$

$= {}^{٣ن}$ق $_{ر}(س)^{-ر} (س)^{٦ن-٢ر}$

$= {}^{٣ن}$ق $_{ر}$ س $^{٦ن-٣ر}$

٦ن $-$ ٣ر $= ٣$ن ر $= ن$

ح$_{ن+١}$ هوالحد المشتمل على $س^{٣ن}$

ح$_{ن+١} = {}^{٣ن}$ق $_{ن} \times س^{٣ن}$

معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ هو ^{٣ن}ق $_{ن}$

(٢) إذا كانت ن $= ٦$ يصبح المفكوك هو

$(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٨}$

معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ هو ^{١٨}ق $_{٦}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٨}{٢} + ١ = ١٠$

ح$_{١٠}$ هو الحد الأوسط

ح$_{١٠} = {}^{١٨}$ق$_{٩} (\frac{١}{س})^{٩} (س^{٢})^{٩}$

$= {}^{١٨}$ق$_{٩}$ س^{٩}

معامل الحد الأوسط $= {}^{١٨}$ق$_{٩}$

معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ / معامل الحد الأوسط $= \frac{ق_{٦}^{١٨}}{ق_{٩}^{١٨}} = \frac{٢١}{٥٥}$

---

١٥. ت

$ح_{٢} = ٢٤٠$ ، $ح_{٣} = ٧٢٠$ ، $ح_{٤} = ١٠٨٠$

$\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = ٣$ ، $\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س} = ٣$ ..... (١)

$\frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$ ..... (٢)

بالقسمة $\frac{٣ (ن - ١)}{٢ (ن - ٢)} = \frac{٣ \times ٢}{٣}$

٣ ن – ٣ = ٤ن – ٨ ومنها ن = ٥ بالتعويض فى(١)

٢ ص = ٣ س ومنها ص = $\frac{٣ س}{٢}$

$ح_{٢} = ٢٤٠$

$ق_{١}^{ن} ص س^{ن - ١} = ٢٤٠$

$ق_{١}^{٥} ص س^{٤} = ٢٤٠$

٥ ص $س^{٤} = ٢٤٠$

ص $س^{٤} = ٤٨ \Leftarrow \frac{٣ س^{٥}}{٢} = ٤٨$

$س^{٥} = ٣٢$ ومنها س = ٢ ، ص = ٣

١٦.

$س^{١٩} - ١٩ س^{١٨} ص + \frac{١٨ \times ١٩}{١ \times ٢} س^{١٧} ص^{٢} - \frac{١٧ \times ١٨ \times ١٩}{١ \times ٢ \times ٣} س^{١٦} ص^{٣} + ... - ص^{١٩}$

$= س^{١٩} - ق_{١}^{١٩} س^{١٨} ص + ق_{٢}^{١٩} س^{١٧} ص^{٢} - ق_{٣}^{١٩} س^{١٦} ص^{٣} + ... - ص^{١٩}$

$= (س - ص)^{١٩} = (٣ - ٤)^{١٩} = -١$

---

١٧. $(٣ س - ١)^{٥}$

$= أ س^{٥} + ب س^{٤} + جـ س^{٣} + ء س^{٢} + هـ س + و$

بوضع س = ١ في الطرفين ينتج أن

$٢^{٥} = أ + ب + جـ + ء + هـ + و = ٣٢$

---

١٨. $(١ + جـ س)^{ن}$

$= ١ + ٢٠ س + أ_{١} س^{٢} + أ_{٢} س^{٣} + ...(١)$

، $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + ق_{١}^{ن} جـ س + ق_{٢}^{ن} جـ^{٢} س^{٢} + ق_{٣}^{ن} جـ^{٣} س^{٣} + ...(٢)$

بمقارنة معاملات س في (١) ، (٢)

$ق_{١}^{ن} جـ = ٢٠$ ن جـ = ٢٠ .... (٣)

$أ_{١} = ق_{٢}^{ن} جـ^{٢}$ ، $أ_{٢} = ق_{٣}^{ن} جـ^{٣}$

لكن ١٦ $أ_{١}^{٢} = ٣ أ_{٢}$ معطى $\frac{أ_{٢}}{أ_{١}} = \frac{١٦}{٣}$

$\frac{ق_{٣}^{ن} جـ^{٣}}{ق_{٢}^{ن} جـ^{٢}} = \frac{١٦}{٣}$ ومنها $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} جـ = \frac{١٦}{٣}$

(ن – ٢) جـ = ١٦

ن جـ - ٢ جـ = ١٦ ..... (٤)

بالتعويض من (٣) في (٤)

٢٠ – ٢ جـ = ١٦ $\Leftarrow$ جـ = ٢

بالتعويض في (٣)

٢ ن = ٢٠ $\Leftarrow$ ن = ١٠

---

١٩. $(١ - س)^{٧} (١ + س)^{٧} = (١ - س^{٢})^{٧}$

والمطلوب معامل $س^{٦}$

نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد المشتمل على $س^{٦}$

$ح_{ر+١} = ق_{ر}^{ن}$ (الثاني)^{ر} (الأول)$^{ن - ر}$

$= ق_{ر}^{٧} (- س^{٢})^{ر} = ق_{ر}^{٧} (- ١)^{ر} س^{٢ر}$

٢ ر = ٦ $\Leftarrow$ ر = ٣

ح ٤ $= ق_{٣}^{٧} (- ١)^{٣} س^{٦}$

معامل ح٤ $= ق_{٣}^{٧} (- ١)^{٣} = -٣٥$

---

٢٠. $(١ + س)^{ن} =$

$= ١ + ق_{١}^{ن} س + ق_{٢}^{ن} س^{٢} + ... + س^{ن}$

$(١ + س)^{ن}$

$= ق_{٠}^{ن} + ق_{١}^{ن} س + ق_{٢}^{ن} س^{٢} + ... + ق_{ن}^{ن} س^{ن}$

نضع س = ١ في الطرفين

$٢^{ن} = ق_{٠}^{ن} + ق_{١}^{ن} + ق_{٢}^{ن} + ... + ق_{ن}^{ن}$

---

٢١. $(أ - س)^{١٤} = جـ_{٠} + جـ_{١} س + جـ_{٢} س^{٢} + جـ_{٣} س^{٣} + ... + جـ_{١٤} س^{١٤}$

$(أ - س)^{١٤} = أ^{١٤} - ١٤ ق_{١}^{١٤} س أ^{١٣} + ق_{٢}^{١٤} س^{٢} أ^{١٢} - ق_{٣}^{١٤} س^{٣} أ^{١١} + ق_{٤}^{١٤} س^{٤} أ^{١٠} + ...$ بالمقارنة

$جـ_{٢} = ق_{٢}^{١٤} أ^{١٢}$

$جـ_{٣} = - ق_{٣}^{١٤} أ^{١١}$

$جـ_{٤} = ق_{٤}^{١٤} أ^{١٠}$

٤ جـ٤ + ١١ (جـ٣ + جـ٢) = صفر

$٤ \times ق_{٤}^{١٤} أ^{١٠} + ١١ (- ق_{٣}^{١٤} أ^{١١} + ق_{٢}^{١٤} أ^{١٢}) =$ صفر

بالقسمة على $أ^{١٠}$

$٤ \times ق_{٤}^{١٤} - ١١ \times ق_{٣}^{١٤} أ + ١١ \times ق_{٢}^{١٤} أ^{٢} = ٠$

بالقسمة على $ق_{٣}^{١٤}$

$٤ \times \frac{ق_{٤}^{١٤}}{ق_{٣}^{١٤}} - ١١ أ + \frac{ق_{٢}^{١٤}}{ق_{٣}^{١٤}} أ^{٢} = ٠$

$٤ \times \frac{١١}{٤} - ١١ أ + ١١ \times \frac{١}{٤} أ^{٢} = ٠ .... \times \frac{٤}{١١}$

$أ^{٢} - ٤ أ + ٤ = ٠$

$(أ - ٢)^{٢} = ٠$ أ = ٢

---

٢٢. $ع_{١} = ٤ (جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦})$ ،

ع٢ = (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$) ، ت^{٢} = -١

ع١ ع٢ = ٤(جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$) ×

(جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

= ٤ (جتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٤ط}{٣}$)

= ٤ (-$\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = - ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت

ع١ ع٢ = ل هـ$^{\theta ت}$ ، θ = ٢٤٠° = $\frac{٤ط}{٣}$

ع١ ع٢ = ٤ هـ$^{\frac{٤}{٣}ط ت}$

$\sqrt{ع١ ع٢}$ = $\left(٤ هـ^{\frac{٤}{٣}ط ت} \right)^{\frac{١}{٢}}$

$\sqrt{ع١ ع٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{\theta + ٢ط ر}{٢} ت}$

$\sqrt{ع١ ع٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{\frac{٤}{٣}ط + ٢ط ر}{٢} ت}$

$\sqrt{ع١ ع٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{٤ط + ٦ط ر}{٦} ت}$ ، ر = ٠ ، ١

ر = ٠ $\Leftarrow$ $\sqrt{ع١ ع٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{٢ط}{٣} ت}$

ر = ١ $\Leftarrow$ $\sqrt{ع١ ع٢}$ = ٢ هـ$^{\frac{٥ط}{٣} ت}$

---

٢٣. ع١ = جتا $\frac{٧ط}{٤}$ - ت جا $\frac{٧ط}{٤}$ ،

جتاθ موجبة ، جاθ سالبة في الربع الرابع

θ = ٢ ط - هـ = ٢ط - $\frac{٧ط}{٤}$ = $\frac{ط}{٤}$

ع١ = ل هـ$^{\frac{ط}{٤} ت}$ $\Leftarrow$ ع١ = هـ$^{\frac{ط}{٤} ت}$ .... (١)

ع٢ = - ١ + ت

ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٢}$

جتاθ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

θ في الربع الثاني θ = ١٨٠ - ٤٥

θ = $\frac{٣ط}{٤}$ = ١٣٥°

ع٢ = ل هـ$^{\theta ت}$ ومنها ع٢ = $\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٣ط}{٤} ت}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ع = (ع١)^{٢} (ع٢)^{٦}

ع = (هـ$^{\frac{ط}{٤} ت}$)^{٢} ($\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{٣ط}{٤} ت}$)^{٦}

ع = هـ$^{\frac{ط}{٢} ت}$ × ٨ هـ$^{\frac{٩ط}{٢} ت}$

ع = ٨ هـ$^{٥ط ت}$ $\Leftarrow$ ع = ٨ هـ$^{ط ت}$

---

٢٤. ع^{٣} = $\frac{١}{١ + \sqrt{٣} ت}$ × $\frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - \sqrt{٣} ت}$

= $\frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - ٣ ت^{٢}}$ = $\frac{١ - \sqrt{٣} ت}{٤}$

ع^{٣} = $\frac{١}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ت = ل(جتاθ + ت جاθ)

ل = $\sqrt{\frac{١}{١٦} + \frac{٣}{١٦}}$ = $\frac{١}{٢}$

جتاθ = $\frac{س}{ل}$ = $\frac{١}{٢}$ ، جاθ = $\frac{ص}{ل}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حيث θ في الربع الرابع

θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠° ، θ = $\frac{٥}{٣}$ ط

ع^{٣} = ل (جتاθ + ت جاθ)

ع^{٣} = $\frac{١}{٢}$ (جتا $\frac{٥}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٥}{٣}$ ط)

ع = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ $\left(\text{جتا} \frac{٥}{٣}ط + ت \text{ جا} \frac{٥}{٣}ط \right)^{\frac{١}{٣}}$

= $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ (جتا $\frac{\frac{٥}{٣}ط + ٢ط ر}{٣}$ + ت جا $\frac{\frac{٥}{٣}ط + ٢ط ر}{٣}$)

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ع = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ (جتا $\frac{٥ط + ٦ط ر}{٩}$ + ت جا $\frac{٥ط + ٦ط ر}{٩}$)

ر = ٠ ع = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ (جتا $\frac{٥ط}{٩}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٩}$)

ر = ١ ع = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ (جتا $\frac{١١ط}{٩}$ + ت جا $\frac{١١ط}{٩}$)

ر = ٢ ع = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$ (جتا $\frac{١٧ط}{٩}$ + ت جا $\frac{١٧ط}{٩}$)

---

٢٥. ع = $\frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢}$

$$ع_{١} = \frac{١ - ع}{١ + ع} = \frac{١ - (\frac{-١ + \sqrt[٣]{ت}}{٢})}{١ + (\frac{-١ + \sqrt[٣]{ت}}{٢})} \times \frac{٢}{٢}$$

$$= \frac{٢ + ١ - \sqrt[٣]{ت}}{٢ - ١ + \sqrt[٣]{ت}} = \frac{٣ - \sqrt[٣]{ت}}{١ + \sqrt[٣]{ت}} \times \frac{١ - \sqrt[٣]{ت}}{١ - \sqrt[٣]{ت}}$$

$$= \frac{٣ - ٤\sqrt[٣]{ت} + ٣ت^{٢}}{١ - ٣ت^{٢}}$$

$$ع_{١} = \frac{-٤\sqrt[٣]{ت}}{٤} = -\sqrt[٣]{ت} = \sqrt[٣]{-١} \times -ت$$

$$= \sqrt[٣]{-١}\,(جتا\frac{٣ط}{٢} + ت\,جا\frac{٣ط}{٢})$$

$$= \sqrt[٣]{-١}\,هـ^{\theta ت} = \sqrt[٣]{-١}\,هـ^{\frac{٣ط}{٢}ت}$$

$$\sqrt[٣]{ع_{١}} = \sqrt[٣]{-١}\,هـ^{\frac{\frac{٣ط}{٢} + ٢ط ر}{٢}ت} \quad ، \quad ر = ٠ ، ١$$

$$\sqrt[٤]{ع_{١}} = \sqrt[٤]{-١}\,هـ^{\frac{٣ط + ٤ط ر}{٤}ت}$$

ر = ٠ $\Leftarrow$ $\sqrt[٤]{ع_{١}} = \sqrt[٤]{-١}\,هـ^{\frac{٣ط}{٤}ت}$

ر = ١ $\Leftarrow$ $\sqrt[٤]{ع_{١}} = \sqrt[٤]{-١}\,هـ^{\frac{٧ط}{٤}ت}$

---

٢٦. $(\frac{١ + جا\,ى + ت\,جتا\,ى}{١ + جا\,ى - ت\,جتا\,ى})^{ن}$

$$= \frac{\left(١ + جا(\frac{ط}{٢} - \theta٢) + ت\ جتا(\frac{ط}{٢} - \theta٢)\right)^{ن}}{\left(١ + جا(\frac{ط}{٢} - \theta٢) - ت\ جتا(\frac{ط}{٢} - \theta٢)\right)^{ن}}$$

$$= \left(\frac{١ + جتا\theta٢ + ت\,جا\theta٢}{١ + جتا\theta٢ - ت\,جا\theta٢}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{١ + ٢\ جتا^{٢}\theta - ١ + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{١ + ٢\ جتا^{٢}\theta - ١ - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{٢\ جتا^{٢}\theta + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{٢\ جتا^{٢}\theta - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$$

$$= \left(\frac{٢\ جتا^{٢}\theta + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{٢\ جتا^{٢}\theta - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$$

بالقسمة على ٢جتاθ بسطا ومقاما

المقدار $= \left(\frac{جتا\theta + ت\ جا\theta}{جتا\theta - ت\ جا\theta}\right)^{ن}$

$$= \left(\frac{جتا\theta + ت\ جا\theta}{جتا(-\theta) + ت\ جا(-\theta)}\right)^{ن}$$

$$= (جتا٢\theta + ت\ جا٢\theta)^{ن}$$

ى $= \frac{ط}{٢} - ٢\theta$ $\Leftarrow$ $٢\theta = \frac{ط}{٢} - ى$

المقدار $= [جتا(\frac{ط}{٢} - ى) + ت\ جا(\frac{ط}{٢} - ى)]^{ن}$

$$= (جتا\,ن(\frac{ط}{٢} - ى) + ت\ جا\,ن(\frac{ط}{٢} - ى)$$

---

٢٧. (١ – ت) س + (١ + ت) ص = ٢ت

(س + ص) + (- س + ص) ت = ٢ت

س + ص = ٠ ..... (١)

- س + ص = ٢ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٢ ص = ٢ $\Leftarrow$ ص = ١

بالتعويض في (١)

س + ١ = ٠ $\Leftarrow$ س = - ١

س + ت ص = - ١ + ت

= ل (جتا θ + ت جا θ)

ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{س}{ل} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

هـ تقع في الربع الثاني

هـ = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥° = $\frac{٣ط}{٤}$

س + ت ص = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣ط}{٤}$ + جا $\frac{٣ط}{٤}$)

$(س + ت\,ص)^{٨} = (\sqrt{٢})^{٨}(جتا\frac{٣ط}{٤} + جا\frac{٣ط}{٤})^{٨}$

= ١٦ (جتا ١٠٨٠° + ت جا ١٠٨٠°)

= ١٦ (١ + ٠) = ١٦

∴ $(س + ت\,ص)^{٨} = ١٦$

حل آخر لثانيا :

$(س + ت\,ص)^{٨} = (- ١ + ت)^{٨}$

$= [(- ١ + ت)^{٢}]^{٤} = [- ١ + ت^{٢} - ٢ت]^{٤}$

$= (- ٢ت)^{٤} = ١٦ت^{٤} = ١٦ \times ١ = ١٦$

---

٢٨. نفرض أن $\sqrt[٣]{-١} + ٤ت = س + ص\ ت$

بتربيع الطرفين

$س^{٢} - ص^{٢} + ٢س\ ص\ ت = ٣ + ٤ت$

$س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ ..... (١)

٢ س ص = ٤ ..... (٢)

بتربيع كل من (١) ، (٢)

$س^{٤} - ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٩$ ... (١)/

$٤س^{٢}ص^{٢} = ١٦$ ..... (٢)/

بالجمع

$س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥$

$(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٥$ ..... (٣)

بجمع (١) ، (٣)

$٢س^{٢} = ٨$ $\Leftarrow$ س = $\pm$ ٢

بالتعويض في (٢)

$\pm ٤ص = ٤$ $\Leftarrow$ ص = $\pm$ ١

س + ص ت = ± ٢ ± ١ ت

$\sqrt{٣ + ٤ت}$ = ± (٢ + ت)

٢٩. ع^{٢} − ٤ ع + ٨ = صفر

أ = ١ ، ب = − ٤ ، جـ = ٨

ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

= $\frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٣٢}}{٢}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{-١٦}}{٢}$

= $\frac{٤ \pm \sqrt{١٦ ت^{٢}}}{٢}$ = $\frac{٤ \pm ٤ ت}{٢}$ = ٢ ± ٢ت

---

٣٠. إذا كان ع + ٢ = ت (ع − ٢)

ع + ٢ = ت ع − ٢ ت

ع − ت ع = − ٢ − ٢ ت

ع (١ − ت) = − ٢ − ٢ ت

ع = $\frac{-٢ - ٢ ت}{١ - ت} \times \frac{-١ + ت}{١ + ت}$

= $\frac{-٢ - ٤ ت - ٢ ت^{٢}}{١ - ت^{٢}}$ = $\frac{- ٤ ت}{٢}$ = − ٢ت

= ٢ (− ت) = ٢ (جتا $\frac{٣ط}{٢}$ ت + ت جا $\frac{٣ط}{٢}$ ت)

ع = ٢ هـ $^{\frac{٣ط}{٢} ت}$

$\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ هـ $^{\frac{\frac{٣ط}{٢} + ٢ط ر}{٢} ت}$ = $\sqrt{٢}$ هـ $^{\frac{٣ط + ٤ط ر}{٤} ت}$

، ر = ٠ ، ١

ر = ٠ ⟸ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ هـ $^{\frac{٣ط}{٤} ت}$

ر = ١ ⟸ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ هـ $^{\frac{٧ط}{٤} ت}$

---

٣١. | ٣ + ٤ ت | = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥

| − ٣ | = $\sqrt{٩ + ٠}$ = ٣

| ٢ ت | = $\sqrt{٠ + ٤}$ = ٢

ملحوظة : | ت | = | − ت | = | − ١ | = ١

٣٢. | ٢ + ت ص + س | + س + ت ص = ٠

| (٢ + س) + ت ص | = − س − ت ص

بتربيع الطرفين

(٢ + س)^{٢} + ص^{٢} = (− س − ت ص)^{٢}

٤ + ٤س + س^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} ت^{٢} + ٢س ص ت

٤ + ٤س + ص^{٢} = − ص^{٢} + ٢ س ص ت

٤ + ٤س + ٢ ص^{٢} = ٢ س ص ت

٤ + ٤س + ٢ص^{٢} = ٠ ..... (١)

٢ س ص = ٠ ⟸ س = ٠ وإما ص = ٠ بالتعويض في (١)

عند س = ٠ ⟸ ٤ + ٢ ص^{٢} = ٠

ص = $\sqrt{٢}$ ت مرفوض حيث ص ∈ ح

عند ص = ٠ ⟸ ٤ + ٤ س = ٠

س = − ١

---

٣٣. (٢ + ٧ ω^{٢} + ω^{٢})(٢ + ٧ ω^{٢} + ω^{٤})

= [٢ + ٧ ω^{٢} + ω^{٢} (١ + ١)][٢ + ٧ ω^{٢} + ω^{٤}]

= (− ٢ ω^{٢} + ٧ ω^{٢})(٧ ω^{٢} + ٢ ω^{٢} −)

= ω^{٥} × ω^{٥} = ω^{١٠} = ω^{٢٥}

---

٣٤. (١ + ٢ ω^{٥} + $\frac{١}{ω^{٢}}$)(١ + ٢ ω + $\frac{١}{ω^{٤}}$)

= (١ + ٢ ω^{٢} + ω^{٤})(١ + ٢ ω + ω^{٢})

= (− ٢ ω^{٢} + ω^{٢})(ω − ٢ ω^{٢})

= ω × ω^{٢} = ω^{٣} = ١

---

٣٥. (١ + $\frac{١}{ω}$ + ت)(١ + $\frac{١}{ω^{٢}}$ + ت)

= (١ + ω^{٢} + ت)(١ + ω + ت)

= (ω − ت)(ω^{٢} − ت)

= ت^{٢} − ω^{٢} ت − ω ت + ω^{٣}

= − ١ − ت(ω^{٢} + ω) + ١

= − ت × − ١ = ت

---

٣٦. ($\frac{٣ - ω^{٥}}{ω^{٣} - ٥}$ + $\frac{ω^{٤} + ٧}{٤ + ω^{٢} ٧}$)^{٢}

= ($\frac{ω^{٣} ٣ - ω^{٥}}{ω^{٣} - ٥}$ + $\frac{ω^{٤} + ٣ ω^{٧}}{٤ + ω^{٢} ٧}$)^{٢}

= ($\frac{(ω^{٣} - ٥) ω^{٢}}{(ω^{٣} - ٥)}$ + $\frac{(٤ + ω^{٢} ٧) ω}{(٤ + ω^{٢} ٧)}$)^{٢}

= (ω^{٢} + ω)^{٢} = (− ١)^{٢} = ١

---

٣٧. $\frac{ω + ٢}{ω^{٢} - ω^{٢}}$ + $\frac{ω + ٢}{ω^{٢} - ٢}$

= $\frac{(ω + ٢)(ω^{٢} - ω^{٢}) + (ω^{٢} - ٢)(ω - ٢)(ω + ٢)}{(ω^{٢} - ٢)(ω^{٢} - ω^{٢})}$

= $\frac{ω^{٤} - ω^{٢} - ω^{٣} + ω^{٢} + ω^{٤} + ω^{٢} - ω^{٣} - ٢ω + ٤ - ٢ω^{٢}}{ω^{٣} + ω^{٤} - ω^{٢} - ω^{٤}}$

= $\frac{ω^{٤} - ω^{٢} + ٢ + ω^{٤} + ω^{٢} - ٢ - ω^{٢} - ω^{٢}}{١ + ω^{٢} - ٤ - ω^{٢}}$

= $\frac{ω^{٤} + ω^{٢} + ٤}{(ω + ω^{٢}) - ٥}$ = $\frac{٤ + ١ -}{٥ - ١ - \times ٢}$ = $\frac{٣}{٧}$

---

٣٨. س^{٢} + (١ + ٢ ω + ω^{٢}) (١ + ٢ ω + ω^{٢}) = صفر

س^{٢} + (٢ − ω)(٢ − ω^{٢}) = ٠

$س^{٢} + (\omega)(\omega^{٢}) =$ صفر

$س^{٢} + \omega^{٣} =$ صفر

$س^{٢} = -١ \Leftarrow س^{٢} = ت^{٢}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $س = \pm ت$

---

٣٩. $\left(\frac{س + \omega^{٤} ص}{\omega^{٢} س + ص} - \frac{س + \omega^{٢} ص}{\omega س + ص}\right)^{٤}$

$= \left(\frac{\omega^{٣} س + \omega ص}{\omega^{٢} س + ص} - \frac{\omega^{٣} س + \omega^{٢} ص}{\omega س + ص}\right)^{٤}$

$= \left(\frac{\omega\left(\omega^{٢} س + ص\right)}{\left(\omega^{٢} س + ص\right)} - \frac{\omega^{٢}(\omega س + ص)}{(\omega س + ص)}\right)^{٤}$

$= (\omega - \omega^{٢})^{٤} = (\pm \sqrt{٣}\, ت)^{٤}$

$= ٩ ت^{٤} = ٩ \times ١ = ٩$

---

٤٠. $\left(\frac{\omega}{\omega^{٢}+١}\right)^{٢} + \left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢}+١}\right)^{٢}$

$= \frac{\omega^{٢}}{\omega^{٤}+\omega^{٤}+١} + \frac{\omega^{٤}}{\omega^{٤}+\omega^{٤}+١}$

$= \frac{\omega^{٢}+\omega}{\omega^{٤}+\omega^{٤}+١} = \frac{\omega^{٢}+\omega}{(\omega+\omega^{٢})^{٤}+١}$

$= \frac{-١}{١ + ٤ \times -١} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

---

٤١. $\left(\frac{\omega^{٢}}{\omega^{٢}+١}\right)^{٤} + \left(\frac{\omega^{٢}+١}{\omega}\right)^{٤} = \omega^{٢}$ الطرف الأيمن

$= \frac{\omega^{٨}}{\left[(\omega^{٢}+١)^{٢}\right]^{٢}} + \frac{\left[(\omega^{٢}+١)\right]^{٢}}{\omega^{٤}}$

$= \frac{\omega^{٢}}{(\omega^{٤}+\omega^{٢}+١)^{٢}} + \frac{(\omega^{٤}+\omega^{٤}+١)^{٢}}{\omega^{٤}}$

$= \frac{\omega^{٢}}{(\omega^{٤}+\omega^{٢}+١)^{٢}} + \frac{(\omega^{٤}+\omega^{٤}+١)^{٢}}{\omega}$

$= \frac{\omega^{٢}}{\left((\omega+\omega^{٢})^{٤}+١\right)^{٢}} + \frac{\left((\omega+\omega^{٢})^{٤}+١\right)^{٢}}{\omega}$

$= \frac{\omega^{٢}}{(-٣)^{٢}} + \frac{(-٣)^{٢}}{\omega} = \frac{\omega^{٢}}{٩} + \frac{٩}{\omega}$

$= \frac{\omega^{٣}+٨١}{\omega^{٩}} = \frac{٨٢}{\omega^{٩}}$

∴ المعادلة هي $\omega^{٢} أ = \frac{٨٢}{\omega^{٩}}$

$\omega^{٣} أ^{٩} = ٨٢ \Leftarrow أ = \frac{٨٢}{٩}$

---

٤٢. $\left(\frac{١}{\omega^{٢}(٣+\omega)} - \frac{١}{\omega^{٣}+١}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{١}{\omega^{٣}+\omega^{٢}+١} - \frac{١}{\omega^{٣}+١}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{١}{\omega^{٣}+١} - \frac{١}{\omega^{٣}+١}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{(\omega+\omega^{٢})^{٣}-١}{(\omega+\omega^{٢})^{٣}+١} \times \frac{(\omega^{٣}+١)(\omega^{٢}\omega^{٣}+١)}{(\omega^{٣}+١)}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{(\omega^{٢}+\omega)^{٣}}{\omega^{٩}+\omega^{٣}\omega^{٢}+\omega^{٣}+١}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{(\omega^{٢}+\omega)^{٣}}{(\omega+\omega^{٢})^{٣}+١٠}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{(\omega^{٢}-\omega)^{٣}}{٧}\right)^{٢} = \frac{٩(\omega^{٢}-\omega)^{٢}}{٤٩}$

$= \frac{٩(\omega^{٤}+\omega^{٣}-٢\omega^{٢})}{٤٩}$

$= \frac{٩(-٣)}{٤٩} = \frac{-٢٧}{٤٩}$

---

٤٣. $ل = أ + ب$ ، $م = أ\omega + ب\omega^{٢}$ ، $ن = أ\omega^{٢} + ب\omega$

$م ن = (أ\omega + ب\omega^{٢})(أ\omega^{٢} + ب\omega)$

$م ن = أ^{٢}\omega^{٣} + أ ب \omega^{٢} + أ ب \omega^{٤} + ب^{٢}\omega^{٣}$

$= أ^{٢} + أ ب (\omega^{٢} + \omega) + ب^{٢}$

$= أ^{٢} - أ ب + ب^{٢}$

$\frac{ل}{أ^{٣}+ب^{٣}} \times \frac{م ن}{(أ+ب)(أ^{٢}-أ ب+ب^{٢})} = \frac{أ^{٣}+ب^{٣}}{أ^{٣}+ب^{٣}} = ١$

---

٤٤. نفرض أن $ع = \frac{\omega^{٢}-٣\omega-١}{\omega^{٢}+١٠\omega+١}$

$= \frac{(\omega+\omega^{٢})^{٣}-١}{(\omega+\omega^{٢})^{٣}+١٠} = \frac{-٣ \times -١}{-١٠}$

$= \frac{٤}{٩-}$

$ع = \frac{٤}{٩} ت^{٢} \Leftarrow \sqrt{ع} = \pm \frac{٢}{٣} ت$

$\therefore \frac{٢}{٣} ت$ هو أحد الجذرين التربيعيين

---

٤٥. $(\omega^{٢} - \frac{\omega}{\omega - ١})^{٢}$

$= \left(\frac{\omega^{٣} + \omega^{٢} - \omega}{\omega - ١}\right)^{٢} = \left(\frac{١ + \omega^{٢} - \omega}{\omega - ١}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\omega^{٢} - \omega^{٢} - \omega}{\omega - ١}\right)^{٢} = \frac{(\omega^{٢} - ٢)^{٢}}{\omega^{٢} + ١ - ٢\omega}$

$= \frac{\omega^{٤}}{\omega^{٢} - ٢\omega + ١} = \frac{\omega^{٤}}{\omega^{٣} -} = - \frac{٤}{٣}$

---

٤٦. نفرض أن ع = س + ص ت

$\overline{ع} = س - ص ت$

$ع^{٢} = (س + ص ت)^{٢}$

$ع^{٢} = س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت$

$ع^{٢} + \overline{ع} =$ صفر

$س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت + س - ص ت = ٠$

$(س^{٢} - ص^{٢} + س) + (٢ س ص - ص) = ٠$

$س^{٢} - ص^{٢} + س = ٠$ ..... (١)

$٢ س ص - ص = ٠$ ..... (٢)

من (٢) ص $(٢ س - ١) = ٠$

ص = ٠ أ، س $= \frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١)

عند ص = ٠

$س^{٢} + س = ٠$ س $(س + ١) = ٠$

س = ٠ أ، س = ـ ١

(س ، ص) = (٠ ، ٠) ع = ٠

(س ، ص) = (ـ ١ ، ٠) ع = ـ ١

عند س $= \frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٤} - ص^{٢} + \frac{١}{٢} = ٠$

$ص^{٢} = \frac{٣}{٤}$ $ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(س ، ص) $= (\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$

$ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

(س ، ص) $= (\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢})$

$ع = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

---

٤٧. بدون فك المحدد اثبت أن :

(١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ١ & ب & جـ أ \\ ١ & جـ & أ ب \end{vmatrix}$

ص٣ – ص١ ، ص٢ – ص١

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & ب - أ & جـ أ - ب جـ \\ ٠ & جـ - أ & أ ب - ب جـ \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & ب - أ & - جـ(ب - أ) \\ ٠ & جـ - أ & - ب(جـ - أ) \end{vmatrix}$

أخذ العامل المشترك (جـ - أ)(ب - أ)

$\Delta = (جـ - أ)(ب - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & ١ & - جـ \\ ٠ & ١ & - ب \end{vmatrix}$

(- ١) × ص٢ + ص٣

$\Delta = (جـ - أ)(ب - أ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب جـ \\ ٠ & ١ & - جـ \\ ٠ & ٠ & جـ - ب \end{vmatrix}$

$\Delta = (جـ - أ)(ب - أ) \times ١ \times ١ \times (جـ - ب)$

$\Delta = (أ - ب)(ب - جـ)(جـ - أ)$

---

(٢) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ب & ١ + ب^{٢} & ب جـ \\ جـ & ب جـ & ١ + جـ^{٢} \end{vmatrix}$

ص٣ – جـ ص١ ، ص٢ – ب ص١

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ \times ١ = ١$

---

(٣) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ب جـ & جـ أ + أ ب \\ ١ & جـ أ & أ ب + ب جـ \\ ١ & أ ب & ب جـ + جـ أ \end{vmatrix}$

ع٢ + ع٣

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ب\,جـ & ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب \\ ١ & جـ\,أ & جـ\,أ + أ\,ب + ب\,جـ \\ ١ & أ\,ب & أ\,ب + ب\,جـ + جـ\,أ \end{vmatrix}$$

$$= (ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب) \begin{vmatrix} ١ & ب\,جـ & ١ \\ ١ & جـ\,أ & ١ \\ ١ & أ\,ب & ١ \end{vmatrix}$$

$\Delta = (ب\,جـ + جـ\,أ + أ\,ب) \times$ صفر $=$ صفر

(٤)

$$\begin{vmatrix} س+ص+٢ & س & ص \\ ١ & ٢س+ص+١ & ص \\ ١ & س & س+٢ص+١ \end{vmatrix}$$

$ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$$\begin{vmatrix} ٢س+٢ص+٢ & س & ص \\ ٢س+٢ص+٢ & ٢س+ص+١ & ص \\ ٢س+٢ص+٢ & س & س+٢ص+١ \end{vmatrix}$$

أخذ العامل المشترك $(٢س + ٢ص + ٢)$

$\Delta = (٢س+٢ص+٢) \times$

$$\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ ١ & ٢س+ص+١ & ص \\ ١ & س & س+٢ص+١ \end{vmatrix}$$

$ص_٢ - ص_١$ ، $ص_٣ - ص_١$

المحدد $=$

$$\begin{vmatrix} ١ & س & ص \\ ٠ & س+ص+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س+ص+١ \end{vmatrix}$$

$= (٢س+٢ص+٢) \times ١ \times (س+ص+١) \times$

$(س+ص+١)$

$= ٢ (س + ص + ١)^{٣}$

(٥)

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & س \\ -٢س+٢س^{٢} & ١+٢س^{٢} & ٢س^{٣} \\ -٣س+٣س^{٢} & ٣س^{٢} & ١+٣س^{٣} \end{vmatrix}$$

$ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - س \times ع_١$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -٢س+٢س^{٢} & ١+٢س & ٢س^{٢} \\ -٣س+٣س^{٢} & ٣س & ١+٣س^{٢} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ١+٢س & ٢س^{٢} \\ ٣س & ١+٣س^{٢} \end{vmatrix}$$

$\Delta = (١+٢س)(١+٣س^{٢}) - ٣س \times ٢س^{٢}$

$\Delta = ١+٣س^{٢} + ٢س + ٦س^{٣} - ٦س^{٣}$

$\Delta = ١ + ٢ س + ٣ س^{٢}$

٤٨. $(س - ١)$ أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} س-١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & س+١ \\ -١ & ١ & س+ك \end{vmatrix}$$

$س = ١$ تجعل المحدد $=$ صفر

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ -١ & ١ & ١+ك \end{vmatrix} = ٠$$

$ص_٢ + ص_٣$

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٣+ك \end{vmatrix} = ٠$$

$$(-١) \times \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣+ك \end{vmatrix} = ٠$$

$٣ + ك - ٢ \times ٢ = ٠$ ك $= ١$

٤٩. $$\begin{vmatrix} س+١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ س & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

س عامل من عوامل المحدد

$س = ٠$ تجعل المحدد $= ٠$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ١ \\ ك & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$ع_٢ - ٢ ع_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ك & -٤ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

$$١ \times \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ك & -٤ \end{vmatrix} = ٠$$

$-٤ - ك = ٠$ ك $= -٤$

٥٠. $\omega - = \omega\, ت^{٢}$ ، $\omega - = \omega^{٢}$ $= \omega^{٢}\, ت^{٢}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ت & \omega^{٢} \\ \omega\, ت & \omega - & ٠ \\ \omega^{٢}\, ت & \omega^{٢} - & \omega \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ت & \omega^{٢} \\ \omega\, ت & \omega\, ت^{٢} & ٠ \\ \omega^{٢}\, ت & \omega^{٢}\, ت^{٢} & \omega \end{vmatrix}$$

بأخذ ت عامل مشترك من العمود الثاني

$$\Delta = ت \begin{vmatrix} ١ & ١ & \omega^{٢} \\ \omega\, ت & \omega\, ت & ٠ \\ \omega^{٢}\, ت & \omega^{٢}\, ت & \omega \end{vmatrix}$$

$= ت \times$ صفر $=$ صفر

٥١. $\Delta =$ $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix}$

بجمع الأعمدة الثلاثة

$$\Delta = \begin{vmatrix} س + أ + ب & أ & ب \\ س + أ + ب & س & ب \\ س + أ + ب & ب & س \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك (س + أ + ب)

$$\Delta = (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$$

ص٣ – ص١ ، ص٢ – ص١

$$\Delta = (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & س - أ & ٠ \\ ٠ & ب - أ & س - ب \end{vmatrix}$$

بتبديل ع٢ ، ع٣

$$\Delta = -(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ٠ & ٠ & س - أ \\ ٠ & س - ب & ب - أ \end{vmatrix}$$

بتبديل ص٢ ، ص٣

$$\Delta = +(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ٠ & س - ب & ب - أ \\ ٠ & ٠ & س - أ \end{vmatrix}$$

$= (س + أ + ب) \times ١ \times (س - ب)(س - أ)$

$= (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$

٥٢.

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^{٢} - ٢ & ٤ \end{vmatrix} =$$ صفر

ص٣ – ص١

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & س^{٢} - ٩ & ٠ \end{vmatrix} =$$ صفر

$$\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & س^{٢} - ٩ \end{vmatrix} =$$ صفر

$١ \times س\,(س^{٢} - ٩) = ٠$

$س = ٠$ أ، $س = ٣$ أ، $س = -٣$

٥٣.

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢س & ٢ص & ٢ع \\ ٥ل + س & ٥م + ص & ٥ن + ع \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ٢ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٥ل + س & ٥م + ص & ٥ن + ع \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

ص٢ – ص١

$$\Delta = ٢ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٥ل & ٥م & ٥ن \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٠ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

ص٣ + ٣ ص٢

$$\Delta = ١٠ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ٧ك & ٧ط & ٧هـ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٠ \times ٧ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٠ \times ٧ \times ٢ = ١٤٠$$

---

٥٤. $\begin{vmatrix} أ-أب & ١ & ب-٣ \\ أب-أجـ & ب & جـ-٣ب \\ أجـ-أ & جـ & ١-٣جـ \end{vmatrix}$

$= أ \times ع_{٣} + ع_{١}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -٢أ & ١ & ب-٣ \\ -٢أب & ب & جـ-٣ب \\ -٢أجـ & جـ & ١-٣جـ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -٢أ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ب-٣ \\ ب & ب & جـ-٣ب \\ جـ & جـ & ١-٣جـ \end{vmatrix}$$

$= -٢أ \times$ صفر $=$ صفر

---

٥٥. بجمع الصفوف الثلاثة

$$= ٢ \begin{vmatrix} ص & ع+س & س+ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ص+٢ع & ٢س+٢ع & ٢س+٢ص \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

$= ص_{١} - ص_{٣}$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ص \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

$= ص_{٢} - ص_{١}$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ص \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

$= ص_{٣} - ص_{٢}$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ص \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$$

---

٥٦. $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٥ & -٤ \\ ٢ & ٤ & -٥ \end{vmatrix}$

$= ع_{٢} - ع_{١}$

$$\Delta = ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -٤ \\ ٢ & ٢ & -٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = -٧$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٥ & -٤ \\ -٤ & ٤ & -٥ \end{vmatrix}$$

$= ع_{١} - ٥ع_{٢}$

$$\Delta س = (-١) \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -٢٢ & ٥ & -٤ \\ -٢٤ & ٤ & -٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٢٢ & -٤ \\ -٢٤ & -٥ \end{vmatrix} = -١٤$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -٤ \\ ٢ & -٤ & -٥ \end{vmatrix}$$

$= ع_{٢} - ٥ع_{١}$

$$\Delta ص = ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٧ & -٤ \\ ٢ & -١٤ & -٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٧ & -٤ \\ -١٤ & -٥ \end{vmatrix} = -٢١$$

$$\Delta ع = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= ع_{٢} - ع_{١}$ ، $ع_{٣} - ٥ع_{١}$

$$\Delta ع = ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -٧ \\ ٢ & ٢ & -١٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٧ \\ ٢ & -١٤ \end{vmatrix} = -٢٨$$

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = ٢ \text{ ، } ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = ٣ \text{ ، } ع = \frac{\Delta ع}{\Delta} = ٤$$

الحل $= (٢ ، ٣ ، ٤)$