الإختبار الأول

أجب عن السؤال الآتى :

(١) ⓐ إذا كان د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leqslant ١ \\ ٢ س & ، س > ١ \end{cases}$ ابحث إتصال الدالة د عند س = ١

وكذلك قابلية إشتقاقها عند س = ١

ⓑ أوجد $\int$ (جتا^{٢} س + جا س) . ء س

أجب عن ثلاثة أسئلة مما يأتى :

(٢) ⓐ المنحنى ص = س^{٣} + ﺃ س^{٢} + ب س له نقطة إنقلاب عند (٣ ، – ٩) . أوجد :

أولاً : قيمة كل من ﺃ ، ب ثانياً : موقع القيم العظمى والصغرى المحلية له

ⓑ إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه هو $\frac{٣ + س}{ص}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (– ٣ ، ٥) .

(٣) ⓐ إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = س – ص أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عندما س = ١

ⓑ يرتفع بالون بمعدل ثابت ١٠ متر / ث وعندما كان ارتفاع البالون ٢٢٠ متراً مرت من تحته سيارة تسير بسرعة منتظمة ٥٠ متر / ث أوجد سرعة تغير المسافة بينهما بعد ٢ ثانية .

(٤) ⓐ أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة د (س) = س (س^{٢} – ٣) ثم ارسم شكلاً تخطيطياً ل لمنحنى هذه الدالة .

ⓑ برهن على أن المماس للمنحنى ص = س^{٣} + س + ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة س = – ١

(٥) ⓐ منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى قا^{٢} س – جا س أوجد معادلته إذا عُلم أنه يمر بالنقطة ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) .

ⓑ تتحرك نقطة على المنحنى ص = س – $\frac{س}{س^{٢} + ١}$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند س = $\sqrt{٣}$ يساوى ٩ أوجد عند نفس النقطة معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

حل الاختبار الأول

(١) ⓐ $د(١^+) = (١)٢ + ١ = ٢ = د(١)$ ، $د(١^-) = ٢ (١) = ٢$

∵ $د(١^+) = د(١^-) = د(١) = ٢$ ∴ د (س) متصلة عند س = ١

، $د'(١^+) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{[(١+هـ)^٢ + ١] - ٢}{هـ} = ٢$

، $د'(١^-) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{[٢(١+هـ)] - ٢}{هـ} = ٢$

∵ $د'(١^+) = د'(١^-) = ٢$ ∴ الدالة قابلة للإشتقاق عند س = ١

ⓑ ∵ جتا ٢ س = ٢ جتا^٢ س − ١ ومنها جتا^٢ س = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$

∴ $\int$ (جتا^٢ س + جا س) . ء س = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ + جا س) . ء س

= $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س − جتا س + ث

مع خالص تحيات
الأستاذ / علي الدين يحيى
0119660616

(٢) ⓐ ص = س^٣ + أ س^٢ + ب س ..... (١)

ص$'$ = ٣ س^٢ + ٢ أ س + ب ..... (٢)

ص$''$ = ٦ س + ٢ أ ..... (٣)

عند نقطة الانقلاب تكون ص$''$ = ٠

∴ ٦ (٣) + ٢ أ = ٠ ومنها أ = − ٩

النقطة (٣ ، − ٩) ∈ المنحنى فهى تحقق معادلته وبالتعويض فى (١)

∴ − ٩ = ٢٧ − ٩ (٩) + ٣ ب ومنها ب = ١٥

لمعرفة النقط الحرجة للدالة نضع ص$'$ = ٠ وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٣ س^٢ − ١٨ س + ١٥ = ٠ ومنها س = ٥ أ، س = ١

د$''$ (٥) > ٠ عند س = ٥ توجد قيمة صغرى محلية = − ٢٥ وذلك من (١)

د$''$ (١) < ٠ عند س = ١ توجد قيمة عظمى محلية = ٧ وذلك من (١)

∴ (٥ ، − ٢٥) موقع قيمة صغرى محلية ، (١ ، ٧) موقع قيمة عظمى محلية

(ب) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣ + س}{ص}$ ∴ $\int$ ص . ء ص = $\int$ (٣ + س) . ء س

∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = ٣ س + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث ، ∵ (− ٣ ، ٥) تحقق معادلة المنحنى

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ = ٣ (− ٣) + $\frac{١}{٢}$ × ٩ + ث ومنها ث = ١٧

∴ معادلة المنحنى هى : ص^{٢} = ٦ س + س^{٢} + ٣٤

---

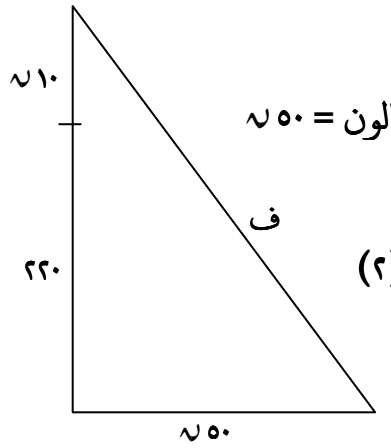
(٣) (أ) س^{٢} + ص^{٢} = س − ص بالتعويض عن س = ١ نجد أن ص = ٠ أ، ص = ١

وبإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ − $\frac{ء ص}{ء س}$

عند (١ ، ٠) : = − ١ ، عند (١ ، ١) : = − $\frac{١}{٣}$

(ب) بعد زمن قدره ن ثانية



ارتفاع البالون = ٢٢٠ + ١٠ن ، بُعد السيارة عن مسقط البالون = ٥٠ن

∴ ف^{٢} = (٥٠ن)^{٢} + (٢٢٠ + ١٠ن)^{٢} ..... (١)

∴ ٢ ف $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٥٠٠٠ن + ٢ (٢٢٠ + ١٠ن) × ١٠ ..... (٢)

بعد زمن قدره ٢ ث :

من (١) : ف^{٢} = (٥٠ × ٢)^{٢} + (٢٢٠ + ٢٠)^{٢}

ومنها ف = ٢٦٠ متر

من (٢) : ٢ × ٢٦٠ × $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٥٠٠٠ × ٢ + ٢٠ (٢٢٠ + ٢٠)

ومنها $\frac{ء ف}{ء ن}$ = $\frac{٣٧٠}{١٣}$ م / ث

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

---

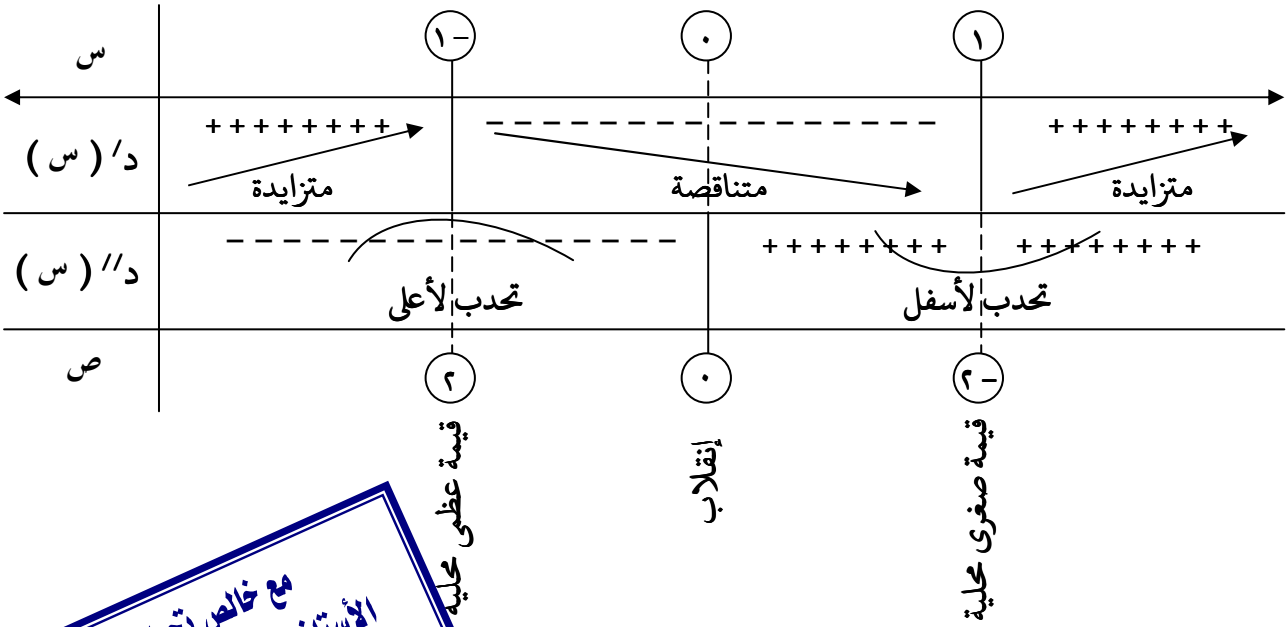
(٤) (أ) د (س) = س^{٣} − ٣ س ..... (١)

د$'$ (س) = ٣ س^{٢} − ٣ ..... (٢)

د$''$ (س) = ٦ س ..... (٣)

∵ د$'$ (س) = ٠ عندما ٣ (س^{٢} − ١) = ٠ ⇐ س = ١ ، − ١

، د$''$ (س) = ٠ عندما س = ٠



مع خالص تحيات
الأستاذ / علي الدين يحيى
01196606616

(ب) ص = س^{٣} + س + ٢ ..... (١)

ص/ = ٣ س^{٢} + ١ ..... (٢)

∵ ص/ موجبة دائماً ∴ المماس يميل بزاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

بالتعويض عن س = - ١ فى المعادلة (١) ⇐ ص = ٠ ∴ نقطة التماس هى (١ ، ٠)

بالتعويض عن س = - ١ فى المعادلة (٢) ⇐ ص/ = ٤

∵ معادلة المماس هى : ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

∴ معادلة المماس هى : ص - ٠ = ٤ (س + ١) أى ص - ٤ س - ٤ = ٠

---

(٥) (أ) ص/ = قا^{٢} س - جا س ∴ ص = ∫ (قا^{٢} س - جا س) . ء س

ص = ظا س + جتا س + ث وبالتعويض عن س = ٤٥° ⇐ ث = - ١

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ظا س + جتا س - ١

(ب) ص = $\frac{س^{٣}}{س^{٢}+١}$

$\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{س^{٤}+٣س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}} \times \frac{ء س}{ء ن}$ وبالتعويض عن س = $\sqrt{٢}$

$\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{٤+٣\times٢}{(٢+١)^{٢}} \times ٩ = ١٠$

الإختبار الثانى

أجب عن السؤال الآتى :

(١) ⓐ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س - ١}{\sqrt{٣ س - ٢} - \sqrt{س}} & \text{عندما } س \neq ١ \\ أ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١

ⓑ أوجد $\int س^{٣} \sqrt{\dfrac{٦}{س^{٢}} + \dfrac{٥}{س^{٣}}}$ د س ، $\int$ جتا ($\dfrac{س}{٢}$ + ٢) د س

أجب عن ثلاثة أسئلة مما يأتى :

(٢) ⓐ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة س = ٠

ⓑ إذا عُلم أن $\dfrac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = س^{٢} − ١ عند أى نقطة من نقط المنحنى ص = د (س) فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمس المستقيم س + ١٢ ص = جـ عند النقطة (١ ، ١) .

(٣) ⓐ إذا كان ص^{٢} = س^{٢} (١ − س) فاثبت أن : ص $\dfrac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ($\dfrac{د ص}{د س}$)^{٢} + ٣ س = ١

ⓑ إبحث تحدب المنحنى ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ وكذلك القيم العظمى والصغرى المطلقة فى الفترة [− ١ ، ٥] .

(٤) ⓐ إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير فإذا كان حجم السائل فى الوعاء يتغير بمعدل ٠,٤ط − ٤٠ سم^{٣} / ث وكان حجم السائل بعد ٣٠ ثانية من بدء التسرب ٩٨٠ سم^{٣} .
أوجد سعة الإناء ، وبيّن بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغاً .

ⓑ إذا عُلم أن د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة عند (١ ، ٤) أوجد قيمة كل من أ ، ب وحدد نوع النقطة .

(٥) ⓐ أوجد ميل المماس للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٨ = ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .

ⓑ وعاء إسطوانى مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ ط سم^{٣} أوجد أبعاده التى تجعل مساحته السطحية أقل ما يمكن .

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

حل الإختبار الثانى

(١) ⓐ ∵ الدالة متصلة عند س = ١

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١) = ٢

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س}}{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س})}{٣س - ٢ - س} = \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س}}{٢} = ١ = ٢$

ⓑ $\int س (\frac{٦}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}})^{\frac{١}{٣}}$ ء س $= \int [س^{٣} (\frac{٦}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}})]^{\frac{١}{٣}}$ ء س

$= \int (٦س + ٥)^{\frac{١}{٣}}$ ء س $= \frac{١}{٦} (٦س + ٥)^{\frac{٤}{٣}} \times \frac{١}{٨} + ث = \frac{١}{٨} (٦س + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

، $\int$ جتا $(\frac{س}{٢} + ٢)$ ء س $= ٢$ جا $(\frac{س}{٢} + ٢) + ث$

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

(٢) ⓐ ص = ٢ جا س + جتا س ..... (١)

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا س − جا س ..... (٢)

عند س = ٠ من (١) ⇐ ص = ١ ، ومن (٢) ⇐ م = ٢

معادلة المماس هى : ص − ١ = ٢ (س − ٠) أى ص − ٢ س − ١ = ٠

ⓑ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٣} س^{٣} - س + ث_{١}$ ولكن : $\frac{ء ص}{ء س} = -\frac{١}{١٢}$ عند س = ١ ⇐ $ث_{١} = \frac{٧}{١٢}$

، ص $= \frac{١}{١٢} س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{٧}{١٢} س + ث_{٢}$ ، عند (١،١) ⇐ $ث_{٢} = \frac{٥}{٦}$

∴ معادلة المنحنى هى : ص $= \frac{١}{١٢} س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{٧}{١٢} س + \frac{٥}{٦}$

---

(٣) ⓐ $ص^{٢} = س^{٢} (١ - س)$ ⇐ $ص^{٢} = س^{٢} - س^{٣}$

∴ ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ س - ٣ س^{٢}$

∴ ٢ $(\frac{ء ص}{ء س})^{٢} + ٢ ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢ - ٦ س$

∴ ص $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + (\frac{ء ص}{ء س})^{٢} + ٣ س = ١$

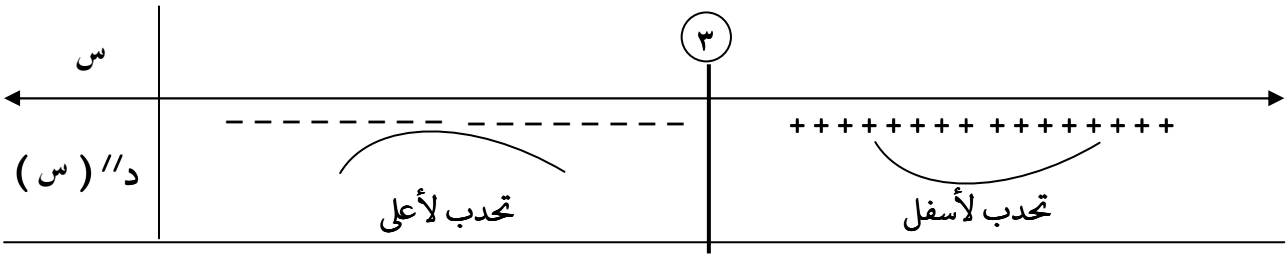
(ب) ص = د (س) = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ ..... (١)

د′ (س) = ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ ..... (٢)

د″ (س) = ٦ س − ١٨ ..... (٣)

من (٢) : د′ (س) = ٠ عندما ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ = ٠ ومنها س = ٢ أ، س = ٤

من (٣) : د″ (س) = ٠ عندما ٦ س − ١٨ = ٠ ومنها س = ٣



لحساب القيم العظمى والصغرى المطلقة نعوض فى (١) عن س = − ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

د (− ١) = − ٤٤ ، د (٢) = ١٠ ، د (٣) = ٨ ، د (٤) = ٦ ، د (٥) = ١٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٠ ، القيمة الصغرى المطلقة = − ٤٤

---

(٤) (أ) ح′ = ٠,٤ ن − ٤٠ ⇐ ح = ٠,٢ ن^{٢} − ٤٠ ن + ث

∴ ٩٨٠ = ٠,٢ (٣٠)^{٢} − ٤٠ (٣٠) + ث ومنها ث = ٢٠٠٠

∴ ح = ٠,٢ ن^{٢} − ٤٠ ن + ٢٠٠٠

لإيجاد سعة الإناء نضع ن = ٠ ∴ سعة الإناء = ٢٠٠٠ سم^{٣}

لمعرفة الزمن الذى يفرغ فيه الإناء نضع ح = ٠ ⇐ ن = ١٠٠ ثانية

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
0119660616

(ب) د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ ..... (١)

د′ (س) = ٢ أ س + ب ..... (٢)

∵ (١ ، ٤) نقطة حرجة ∴ د′ (١) = ٠ ⇐ ٢ أ + ب = ٠ ..... (٣)

، (١ ، ٤) ∋ المنحنى ∴ د (١) = ٠ ⇐ أ + ب = ٢ ..... (٤)

بحل (٣) ، (٤) جبرياً معاً ∴ أ = − ٢ ، ب = ٤

∵ د″ (س) = ٢ أ = − ٤ (كمية سالبة دائماً) ∴ (١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية .

---

(٥) ⓐ بوضع ص = ٠ ∴ س = ٤ ، − ٢ ∴ نقط التقاطع هى : (٤ ، ٠) ، (− ٢ ، ٠)

، $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ + ٢ ص − ٢ س = ٠

عند (٤ ، ٠) : $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ + ٠ − ٢ + ٨ = ٠ ⇐ = − $\frac{٣}{٢}$

عند (− ٢ ، ٠) : $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ + ٠ − ٢ + ٤ − = ٠ ⇐ = $\frac{٣}{٢}$

ⓑ المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

∴ م = ٢ ط نوه ع + ط نوه٢ ..... (١)

∵ حجم الاسطوانة = ٨٠٠٠ ط سم٣ ∴ ط نوه٢ ع = ٨٠٠٠ ط ومنها ع = $\frac{٨٠٠٠}{نوه^{٢}}$ .... (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

∴ م = ط ($\frac{١٦٠٠٠ + نوه^{٢}}{نوه}$) ومنها م/ = ط ($\frac{٢ نوه^{٢} + ١٦٠٠٠}{نوه^{٢}}$)

م/ = ٠ عندما ٢ نوه٣ − ١٦٠٠٠ = ٠ ⇐ نوه = ٢٠ سم ومن (٢) ع = ٢٠ سم

، م// > ٠ عند نوه = ٢٠

∴ المساحة أصغر مايمكن عندما تكون أبعاد الاسطوانة = ٢٠ ، ٢٠ سم

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

الإختبار الثالث

أجب عن السؤال الآتى :

(١) ⓐ ابحث إتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \leqslant ١ \\ ٢ س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$

عند س = ١ ثم قابليتها للاشتقاق عند نفس النقطة

ⓑ أوجد $\int \frac{س - ١}{(٢ س + ١)^{٣}}$ ء س

أجب عن ثلاثة أسئلة مما يأتى :

(٢) ⓐ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س جتا ٢ س + جا س عند نقطة الأصل .

ⓑ نقطة تتحرك على المنحنى س ص = س + ص − ٥ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها معدل تغير أحداثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

(٣) ⓐ أوجد قيمة $\int$ جا^{٢} س ء س

ⓑ عيّن فترات التزايد والتناقص للمنحنى ص = س (س − ٣)^{٢} ثم ارسم الشكل العام للمنحنى موضحاً عليه مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب إن وجدت .

(٤) ⓐ منحنى ميل المماس له عند أى نقطة يساوى $\frac{\sqrt{٢ ص - ٧}}{\sqrt{٤ س - ٣}}$ أوجد معادلته إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤) .

ⓑ إذا كانت المقاومة بثقل الكيلو جرام المؤثرة على قطار تحرك بسرعة ع كم / ساعة تتعين من العلاقة م = $\frac{١٠}{ع^{٥}}$ + ١٠ ع أوجد أصغر قيمة للمقاومة .

(٥) ⓐ أوجد قيمة $\int$ [قا^{٢} ($\frac{س}{٢}$ + ٥) + جتا (٢ س + ١)] ء س

ⓑ إذا كان معدل التغير فى مساحة صفيحة (م بالمتر المربع) بالنسبة للزمن (ن بالثانية) يتعين بالعلاقة : م$'$ = ٠,٠٦ ن − ٠,٥ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٥٠ متراً مربعاً أوجد مساحة الصفيحة بعد ١٠ ثوانى .

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

حل الاختبار الثالث

(١) ⓐ $د(١^+) = ١ + ١ = ٢ = د(١)$ ، $د(١^-) = ٢ \times ١ = ٢$

∵ $د(١^+) = د(١^-) = د(١) = ٢$ ∴ الدالة متصلة عند $س = ١$

، $د'(١^+) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{[(١+هـ)^٢ + ١] - ٢}{هـ}$

$= \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ١ - ٢}{هـ} = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ} = ٢$

، $د'(١^-) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \text{نهـــا} \frac{[٢(١+هـ)] - ٢}{هـ} = ٢$

∵ $د'(١^+) = د'(١^-) = ٢$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

ⓑ $\int \frac{س - ١}{(٢س + ١)^٣}$ ء س ..... بالضرب بسطاً ومقاماً × ٢

$= \int \frac{٢س - ٢}{٢(٢س + ١)^٣}$ ء س $= \int \frac{(٢س + ١) - ٣}{٢(٢س + ١)^٣}$ ء س

$= \int [\frac{١}{٢}(٢س + ١)^{-٢} - \frac{٣}{٢}(٢س + ١)^{-٣}]$ ء س

$= \frac{١}{٤} \times \frac{(٢س + ١)^{-١}}{-١} - \frac{٣}{٤} \times \frac{(٢س + ١)^{-٢}}{-٢} + ث$

$= -\frac{١}{٤}(٢س + ١)^{-١} + \frac{٣}{٨}(٢س + ١)^{-٢} + ث$

---

(٢) ⓐ $ص = س \, جتا ٢س + جا س$

$ص' = جتا ٢س - ٢س \, جا ٢س + جتا س$

وعند النقطة $(٠، ٠)$: $ص' = ١ - ٠ + ١ = ٢$

∴ معادلة المماس هى : $ص = ٢س$

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606 16

ⓑ $س ص = س + ص - ٥$ ..... (١)

$ص \frac{ء س}{ء ن} + س \frac{ء ص}{ء ن} = \frac{ء س}{ء ن} + \frac{ء ص}{ء ن}$ (وبالقسمة على $\frac{ء س}{ء ن} = \frac{ء ص}{ء ن}$)

∴ $ص + س = ٢$ ومنها $ص = ٢ - س$ ..... (٢)

بالتعويض فى (١) : س (٢ – س) = س + ٢ – س – ٥

∴ ٢ س – س^{٢} = – ٣ ∴ س^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠ ومنها س = ٣ أ، س = – ١

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص = – ١ أ، ص = ٣

∴ المواقع هى (٣ ، – ١) ، (– ١ ، ٣)

---

(٣) ⓐ ∫ جا^{٢} س ء س = ∫ ($\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) ء س = $\frac{١}{٢}$ س – $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ث

ⓑ ص = س (س – ٣)^{٢}

ص = س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٩ س ..... (١)

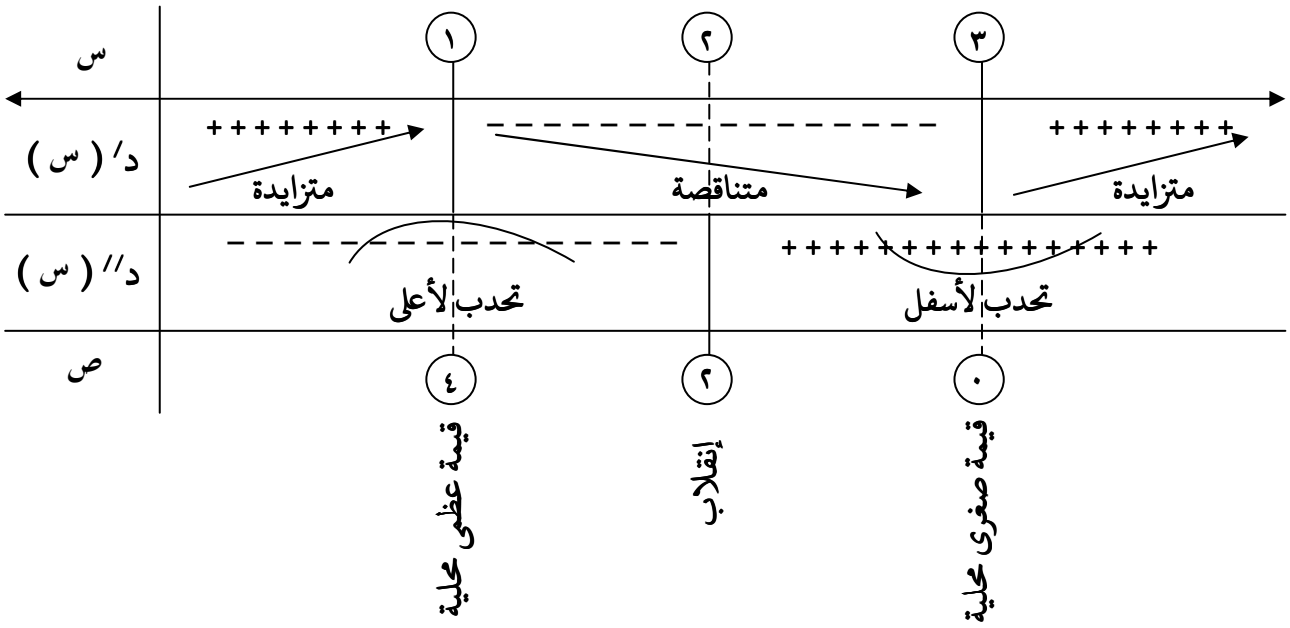
ص$'$ = ٣ س^{٢} – ١٢ س + ٩ ..... (٢)

ص$''$ = ٦ س – ١٢ ..... (٣)

، ص$'$ = ٠ عندما س^{٢} – ٤ س + ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ أ، س = ١

، ص$''$ = ٠ عندما س = ٢

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616



---

(٤) ⓐ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\sqrt{٢ ص – ٧}}{\sqrt{٤ س – ٣}}$ ∴ ∫ $\frac{١}{\sqrt{٢ ص – ٧}}$ ء ص = ∫ $\frac{١}{\sqrt{٤ س – ٣}}$ ء س

∴ ∫ (٢ ص – ٧)$^{-\frac{١}{٢}}$ ء ص = ∫ (٤ س – ٣)$^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{(2ص - 7)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{(4س - 3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + ث$

$(2ص - 7)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4س - 3)^{\frac{1}{2}} + ث$

$\because$ (١، ٤) $\in$ المنحنى فهى تحقق معادلته $\therefore$ $١ = \frac{1}{2} \times ١ + ث \Leftarrow ث = \frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى : $2\sqrt{2س - 7} = \sqrt{4س - 3} + ١$

ب) $م = \frac{١٠^{٥}}{ع} + ١٠ع \Leftarrow م' = -\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}} + ١٠$

$م' = ٠$ عندما $-\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}} + ١٠ = ٠ \Leftarrow ع = ١٠٠$ كم / س

$م'' = \frac{٢ \times ١٠^{٥} ع}{ع^{٤}} = \frac{٢ \times ١٠^{٥}}{ع^{٣}}$ موجب دائماً

$\therefore$ أصغر قيمة للمقاومة = $\frac{١٠^{٥}}{١٠٠} + ١٠ \times ١٠٠ = ٢٠٠٠$ ث كجم

---

(٥) ⓐ $\int [قا^{٢}(\frac{س}{2} + ٥) + جتا(٢س + ١)] ء س$

$= ٢ ظا(\frac{س}{2} + ٥) + \frac{1}{2} جا(٢س + ١) + ث$

ب) $\frac{ء م}{ء ن} = ٠,٠٦ن - ٠,٥ \Leftarrow م = ٠,٠٦ \times \frac{1}{2} ن^{٢} - ٠,٥ن + ث$

$م = ٠,٠٣ن^{٢} - ٠,٥ن + ث$

عند $ن = ٠$ ، $م = ٥٠ \Leftarrow ث = ٥٠$

$\therefore م = ٠,٠٣ن^{٢} - ٠,٥ن + ٥٠$

عندما $ن = ١٠$

$م = ٠,٠٣ \times ١٠٠ - ٠,٥ \times ١٠ + ٥٠ = ٤٨$ متر مربع

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

الإختبار الرابع

أجب عن السؤال الآتى :

(١) ⓐ أوجد $\int س^{١٠} \left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}} \right)^{٥}$ ء س ، $\int (جا س + جتا س)^{٢}$ ء س

ⓑ عيّن فترات التحدب لأعلى ولأسفل ومواقع الانقلاب للمنحنى ص = س^{٤} − ٢٤ س^{٢} + ١٠

أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) ⓐ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ ظا}^{٢} \text{ س}}$ وذلك عند النقطة س = $\frac{\text{ط}}{٦}$

ⓑ منحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) ، وميل العمودى عليه عند أى نقطة عليه يساوى $\sqrt{٢ س + ٥}$

أوجد معادلة المنحنى .

(٣) ⓐ نقطة تتحرك على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} − ٥ س + ٣ ص − ٦ = ٠ فإذا كانت سرعة إحداثيها السينى ٧ سم / ث عند النقطة (١ ، ٢) أوجد عند نفس النقطة سرعة إحداثيها الصادى

ⓑ أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة ص = س^{٣} − ١٢ س فى الفترة [− ١ ، ٤]

(٤) ⓐ إسطوانة تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نـ يزداد بمعدل ٠,٢ سم / ث وارتفاعها ع يزداد بمعدل ٠,١ سم / ث أوجد معدل التغير فى حجم الاسطوانة عندما نـ = ٢ سم ، ع = ٥ سم .

ⓑ أوجد معادلة المنحنى الذى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{٣ - ٢ س}{٢ ص + ١}$ إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

(٥) ⓐ إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٣ - ٢ س^{٢} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فأوجد قيمة ٢ ثم ابحث قابليتها للاشتقاق عند س = ١

ⓑ برهن على أن أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة يكون مربعاً وأوجد مساحة هذا المربع بدلالة طول نصف قطر الدائرة .

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

حل الاختبار الرابع

(١) ⓐ $\int س^{١٠} (\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})^{٥} ء س = \int [س^{٢} (\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})^{٥}] ء س = \int (٢ س + ٣)^{٥} ء س$

$= \frac{١}{١٢} (٢ س + ٣)^{٦} + ث$

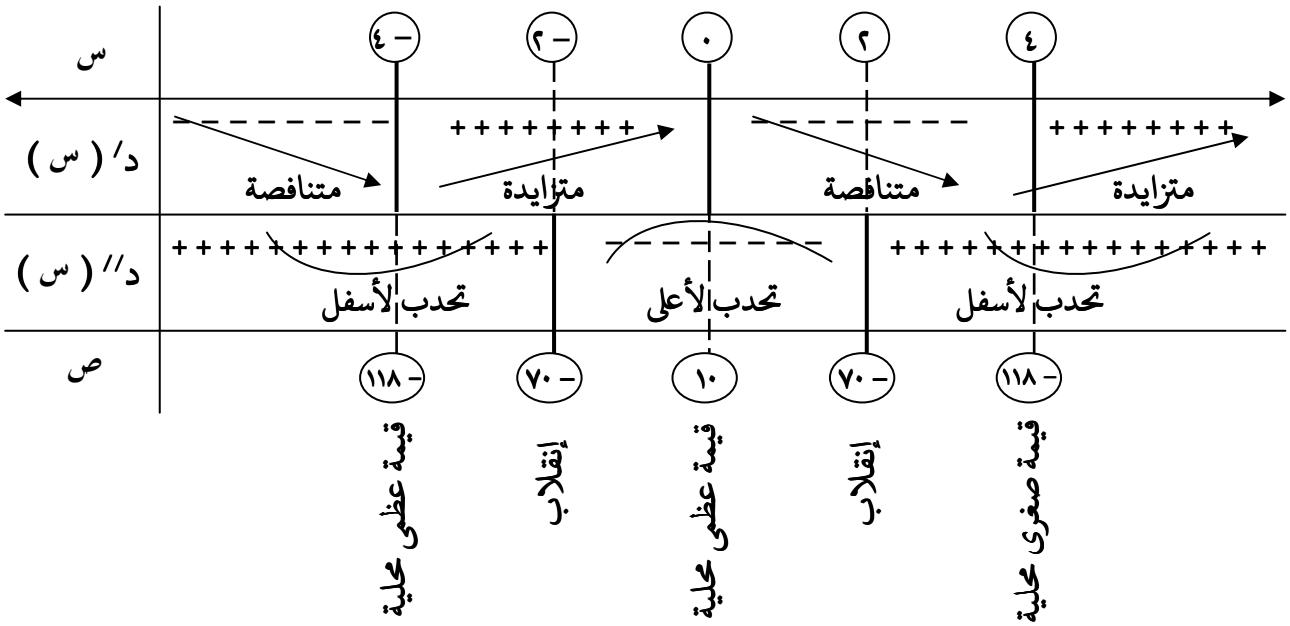
، $\int (جا س + جتا س)^{٢} ء س = \int (جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢ جا س جتا س) ء س$

$= \int (١ + جا ٢ س) ء س = س - \frac{١}{٢}$ جتا ٢ س + ث

ⓑ ص = $س^{٤} - ٢٤ س^{٢} + ١٠$ ⇐ ص/ = $٤ س^{٣} - ٤٨ س$ ⇐ ص// = $١٢ س^{٢} - ٤٨$

ص/ = ٠ عندما $٤ س (س^{٢} - ١٦) = ٠$ ⇐ س = ٠ أ، ٤ أ، $- ٤$

ص// = ٠ عندما $١٢ (س^{٢} - ٤) = ٠$ ⇐ س = ٢ أ، $- ٢$



---

(٢) ⓐ ص = $\frac{٢ ظا س}{١ - ظا^{٢} س}$ ⇐ ص = ظا ٢ س ⇐ ص/ = $٢ قا^{٢} ٢ س$

عندما س = $\frac{ط}{٦} = ٣٠°$ ∴ ص = $\sqrt{٣}$ ، ص/ = ٨

∴ معادلة المماس هى : ص - $\sqrt{٣} = ٨ (س - \frac{ط}{٦})$

أى : ص - $\sqrt{٣} = ٨ س - \frac{٤ ط}{٣}$

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
0119660616

ب $\frac{ع ص}{ع س} = - \frac{١}{\sqrt{٢ س + ٥}} = - (٢ س + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ ص $= - \frac{١}{٢} (٢ س + ٥)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ + ث$ $\Leftarrow$ ص $= - (٢ س + ٥)^{\frac{١}{٢}} + ث$

، $\because$ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) فهى تحقق معادلته

$\therefore$ ٠ $= - \sqrt{٩} + ث$ ومنها ث $= ٣$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى : ص $= - \sqrt{٢ س + ٥} + ٣$

---

(٣) أ $س^{٢} + ص^{٢} - ٥ س + ٣ ص - ٦ = ٠$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

$٢ س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} - ٥ \frac{ع س}{ع ن} + ٣ \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$

وعند النقطة (١ ، ٢) :

$٢ \times ١ \times ٧ + ٢ \times ٢ \frac{ع ص}{ع ن} - ٥ \times ٧ + ٣ \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$ ومنها $\frac{ع ص}{ع ن} = ٣$ سم / ث

ب ص $= س^{٣} - ١٢ س$ فى الفترة [- ١ ، ٤]

ص/ $= ٣ س^{٢} - ١٢ = ٠$ عندما س $= ٢$ ، $- ٢ \notin$ [- ١ ، ٤]

د (- ١) $= (- ١)^{٣} - ١٢ (- ١) = ١١$

د (٢) $= (٢)^{٣} - ١٢ (٢) = - ١٦$ $\Leftarrow$ قيمة صغرى مطلقة

د (٤) $= (٤)^{٣} - ١٢ (٤) = ١٦ \Leftarrow$ قيمة عظمى مطلقة

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

---

(٤) أ $\frac{ع نو}{ع ن} = ٠,٢$ ، $\frac{ع ع}{ع ن} = ٠,١$

ح $=$ ط $نو^{٢}$ ع

$=$ ط (٢ نو $\frac{ع نو}{ع ن}$ ع + $نو^{٢} \frac{ع ع}{ع ن}$) $=$ ط (٢ × ٢ × ٠,٢ × ٥ + ٤ × ٠,١) $= ٤,٤$ ط $سم^{٣}$ / ث

ب $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٣ - ٢ س}{٢ ص + ١}$ $\therefore$ $\int (٣ - ٢ س) ع س = \int (٢ ص + ١) ع ص$

$٣ س - س^{٢} = ص^{٢} + ص + ث$ ولكن (١ ، ٢) $\in$ للمنحنى

$\therefore$ $٣ - ١ = ٤ + ٢ + ث$ ومنها ث $= - ٤$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى : $٣ س - س^{٢} = ص^{٢} + ص - ٤$

(٥) ⓐ ∵ الدالة متصلة عند س = ١ ∴ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = د (١)

∴ ٣ − ٢ = ١ + ١ ومنها ٢ = ١

، د′ (١$^{+}$) = $\lim_{هـ \to 0^{+}}$ $\frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to 0^{+}}$ $\frac{[٣-(١+هـ)^{٢}]-٢}{هـ}$ = − ٢

د′ (١$^{-}$) = $\lim_{هـ \to 0^{+}}$ $\frac{(١+هـ+١)^{٢} - ٢}{هـ}$ = ١

∵ د′ (١$^{+}$) ≠ د′ (١$^{-}$) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١

ⓑ س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

ص^{٢} = ٤ نق^{٢} − س^{٢}

ص = $\sqrt{٤ نق^{٢} - س^{٢}}$ ..... (١)

م = س × ص

م = س $\sqrt{٤ نق^{٢} - س^{٢}}$ = س (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

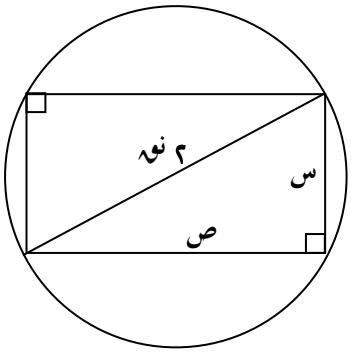
م′ = (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ − س^{٢} (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$

م′ = ٠ عندما (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ − س^{٢} (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ = ٠

بالضرب × (٤ نق^{٢} − س^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$: ∴ ٤ نق^{٢} − س^{٢} − س^{٢} = ٠ ومنها س = $\sqrt{٢}$ نق

بالتعويض فى (١) : ∴ ص = $\sqrt{٢}$ نق ∴ المستطيل هو مربع

مساحته = $\sqrt{٢}$ نق × $\sqrt{٢}$ نق = ٢ نق^{٢}



مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

الاختبار الخامس

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

أجب عن السؤال الآتى :

(١) ⓐ إذا كان د(س) = { ٢ س^{٢} − ١ عندما س ⩽ ٢ ، س + ٥ عندما س > ٢ }

ابحث اتصال الدالة د عند س = ٢ وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

ⓑ أوجد قيمة : ∫ $\frac{س^{٣} + س - ٢}{س - ١}$ ء س ، ∫ (جا س جتا س) ء س

أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) ⓐ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وذلك عند النقطة (١ ، ١) .

ⓑ منحنى يمر بالنقطة الأصل وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى ١ − جتا ٢ س أوجد معادلة المنحنى

(٣) ⓐ بدأت نقطة الحركة على المنحنى س^{٢} − ص^{٢} + ٦ س − ٢٥ = ٠ من الموقع (٢ ، − ٣) وكانت السرعة الابتدائية للاحداثى السينى ٦ سم / ث احسب السرعة الابتدائية للاحداثى الصادى .

ⓑ ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة ص = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س − ٥ موضحاً عليه مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك موقع الانقلاب إن وجدت .

(٤) ⓐ أوجد معادلة العمودى على المنحنى ص^{٢} = س + ٢ عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص = س

ⓑ خزان فارغ سعته ٦ متر مكعب يصب الماء بمعدل (∿ + ٢) متر مكعب كل دقيقة حيث ∿ الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

(٥) ⓐ منحنى يمر بالنقطة الأصل وميل العمودى عليه عند أى نقطة يساوى $\frac{-١}{٣ س^{٢} + ٢ س}$ أوجد معادلة المنحنى .

ⓑ عيّن فترات تحدب المنحنى ص = س^{٣} + ٣ س^{٢}

(١) ⓐ $د(٢^+) = د(٢) = ٢(٢)^٢ - ١ = ٧$ ، $د(٢^-) = ٢ + ٥ = ٧$

∵ $د(٢^+) = د(٢^-) = د(٢)$ ∴ الدالة متصلة عند $س = ٢$

، $د'(٢^+) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{[٢(٢+هـ)^٢ - ١] - ٧}{هـ} = ٢$

$د'(٢^-) = \text{نهـــا}_{هـ \to ٠} \frac{[(٢+هـ) + ٥] - ٧}{هـ} = ١$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

ⓑ نقسم البسط $س^٣ + س - ٢$ على المقام $س - ١$ ينتج لنا $س^٢ + س + ٢$

∴ $\int \frac{س^٣ + س - ٢}{س - ١} \, ء س = \int (س^٢ + س + ٢) \, ء س = \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{١}{٢} س^٢ + ٢ س + ث$

، $\int (\text{جا } س \text{ جتا } س) \, ء س = \int \frac{١}{٢} \text{جا } ٢ س \, ء س = -\frac{١}{٤} \text{جتا } ٢ س + ث$

---

(٢) ⓐ $س^٢ + ٣ س ص + ص^٢ = ٥$ بالاشتقاق بالنسبة إلى $س$:

$٢ س + ٣ س \frac{ء ص}{ء س} + ٣ ص + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

عند النقطة $(١ ، ١)$: $٢ + ٣ \frac{ء ص}{ء س} + ٣ + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = -١$ ∴ ظا هـ $= -١$ ∴ $ق(\angle هـ) = ١٣٥°$

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
0119660616

ⓑ $\frac{ء ص}{ء س} = -١ - \text{جتا } ٢ س$ ∴ $ص = \int (-١ - \text{جتا } ٢ س) \, ء س = -س - \frac{١}{٢} \text{جا } ٢ س + ث$

عند $(٠ ، ٠) \Leftarrow ث = ٠$ ∴ معادلة المنحنى هى : $ص = -س - \frac{١}{٢} \text{جا } ٢ س$

---

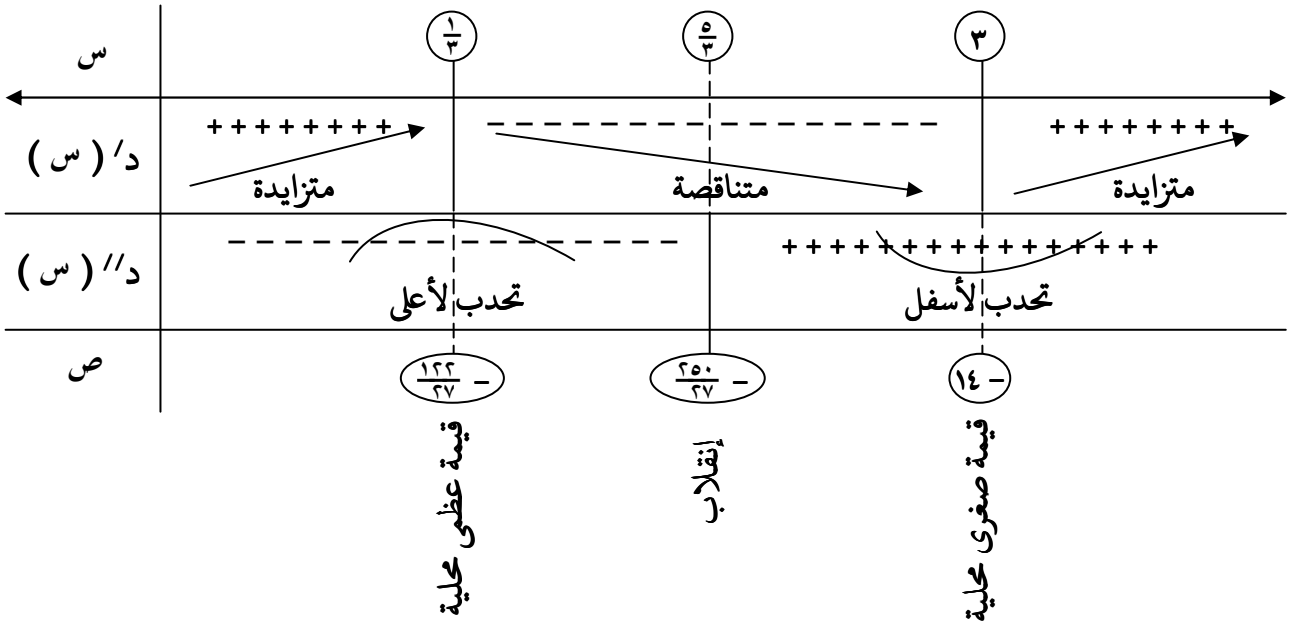
(٣) ⓐ $س^٢ - ص^٢ + ٦ س - ٢٥ = ٠ \Leftarrow ٢ س \frac{ء س}{ء ن} - ٢ ص \frac{ء ص}{ء ن} + ٦ \frac{ء س}{ء ن} = ٠$

عند النقطة $(٢ ، -٣)$: $٢ \times ٢ \times ٦ + ٦ \frac{ء ص}{ء ن} + ٦ \times ٦ = ٠ \Leftarrow \frac{ء ص}{ء ن} = -١٠$ سم / ث

ⓑ $ص = س^٣ - ٥ س^٢ + ٣ س - ٥$ ، $ص' = ٣ س^٢ - ١٠ س + ٣$ ، $ص'' = ٦ س - ١٠$

$ص' = ٠$ عندما $(٣ س - ١)(س - ٣) = ٠$ ومنها $س = ٣$ أ، $\frac{١}{٣}$

ص$''$ = ٠ عندما س = $\frac{٥}{٣}$



---

(٤) ⓐ ص^{٢} = س + ٢ ، ص = س بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ س^{٢} − س + ٢ = ٠ ومنها س = ٢ أ، − ١

∴ نقط التقاطع هى : (٢ ، ٢) ، (− ١ ، − ١)

٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١

عند (٢ ، ٢) : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ ميل العمودى = − ٤

معادلة العمودى هى : ص − ٢ = − ٤ (س − ٢) أى ٤ س + ص − ١٠ = ٠

عند (− ١ ، − ١) : = − $\frac{١}{٢}$ ⇐ ميل العمودى = ٢

معادلة العمودى هى : ص + ١ = ٢ (س + ١) أى ٢ س − ص + ١ = ٠

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606616

ⓑ $\frac{ء ح}{ء ن}$ = ن + ٢ ⇐ ح = ن^{٢} + ٢ ن + ث ، عند ن = ٠ يكون ح = ٠ ⇐ ث = ٠

∴ ح = ن^{٢} + ٢ ن

لكى يمتلئ الخزان يكون ح = ٦

∴ ٦ = ن^{٢} + ٢ ن ⇐ ن^{٢} + ٤ ن − ١٢ = ٠ ومنها ن = ٢ دقيقة

---

(٥) ⓐ $\frac{ع ص}{ع س} = ٣ س^{٢} + ٢ س$ ⇐ $ص = س^{٣} + س^{٢} + ث$

عند (٠،٠) : ث = ٠ ∴ معادلة المنحنى هى : $ص = س^{٣} + س^{٢}$

ⓑ $ص = س^{٣} + ٣ س^{٢}$ ، $ص' = ٣ س^{٢} + ٦ س$ ، $ص'' = ٦ س + ٦$

$ص'' = ٠$ عندما $س = -١$

عندما $س > -١$ ⇐ $ص'' > ٠$ المنحنى محدب لأسفل .

عندما $س < -١$ ⇐ $ص'' < ٠$ المنحنى محدب لأعلى .

مع خالص تحيات
الأستاذ / علىّ الدين يحيى
01196606l6